1 Testowanie hipotez

W tej części rozwiązane zostaną zadania dotyczące testowania hipotez. Wymagana jest wiedza z zakresu najmocniejszych testów, ilorazu wiarygodności, parametrów testów statystycznych.

1. (Eg 52/1) Niech $X_1, X_2, ..., X_8$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa Pareto o dystrybuancie

$$F_\theta(x) = 1 - \frac{1}{x^\theta} \text{ dla } x \leqslant 1 \text{ oraz } F_\theta(x) = 0 \text{ dla } x < 1,$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozpatrzmy zadanie testowania hipotezy $H_0 : \theta = 2$ przeciwko alternatywie $H_1 : \theta = 4$. Zbudowano taki test, dla którego suma prawdopodobieństw błędów I i II rodzaju, oznaczanych odpowiednio przez α i β, jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość $\alpha + \beta$.
Odp: B-$>$ $0,3336$.

Rozwiązanie. Niech $f_\theta(x) = \theta x^{\theta+1}$ będzie gęstością rozkładu Pareto. Testem który dla ustalonego błędu pierwszego rodzaju (równego α) minimalizuje błąd drugiego rodzaju jest test Neymana-Pearsona, którego obszar krytyczny ma postać

$$\mathcal{K} = \{(x_1, .., x_8) : \frac{\prod_{i=1}^8 f_4(x_i)}{\prod_{i=1}^8 f_2(x_i)} > C\},$$

gdzie C jest dobrane tak aby $\mathbf{P}_{\theta=2}(X \in \mathcal{K}) = \alpha$. Nietrudno zauważyć, że $\mathcal{K} = \{(x_1, .., x_8) : \sum_{i=1}^8 \log x_i < \bar{C}\}$ dla pewnego $\bar{C}$. Zauważmy, że $\log X_i$ ma rozkład $Exp(\theta)$ zatem $\sum_{i=1}^8 \log X_i$ ma rozkład $Gamma(8, \theta)$. Stąd $\bar{C}$ musi być tak dobrane, że

$$\mathbf{P}_{\theta=2}(\sum_{i=1}^8 \log X_i < \bar{C}) = \int_0^{\bar{C}} \frac{2^8}{7!} x^7 e^{-2x} dx = \alpha(\bar{C}).$$

Z kolei błąd drugiego rodzaju to

$$\mathbf{P}_{\theta=4}(\sum_{i=1}^8 \log X_i \leqslant \bar{C}) = \int_{\bar{C}}^\infty \frac{4^8}{7!} x^7 e^{-4x} dx = \beta(\bar{C}).$$

Wystarczy znaleźć punkt minimum funkcji $\alpha(\bar{C}) + \beta(\bar{C})$. Zauważmy, że $\alpha'(\bar{C}) + \beta'(\bar{C}) = 0$ jeśli

$$-2^8 e^{-2\bar{C}} + 4^8 e^{-4\bar{C}} = 0$$

stąd $\bar{C} = 4 \log 2$. Pozostaje albo skorzystać z tablic rozkładu χ_2, wtedy dostajemy $0,3336$. Z przybliżenia rozkładem normalnym. Niech Z będzie z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$

$$\alpha(\bar{C}) = \mathbf{P}_{\theta=2}(\frac{\sum_{i=1}^8 \log X_i - 4}{\sqrt{2}} < \frac{\bar{C} - 4}{\sqrt{2}}) \simeq \mathbf{P}(Z < \frac{(4\log 2) - 4}{\sqrt{2}}) \simeq 0,1927.$$

oraz

$$\beta(\bar{C}) = \mathbf{P}_{\theta=4}(\frac{\sum_{i=1}^8 \log X_i - 2}{\sqrt{1/2}} \leqslant \frac{\bar{C} - 2}{\sqrt{1/2}}) \simeq \mathbf{P}(Z > \frac{(8\log 2) - 4}{\sqrt{2}}) \simeq 0,1373.$$

Zatem $\alpha(\bar{C}) + \beta(\bar{C}) \simeq 0,330$.

■

2. (Eg 53/3) Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(m+\theta, 1)$, $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(m - \theta, 1)$. Wszystkie zmienne są niezależne. Parametry m i θ są nieznane. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 0$ przy alternatywie $H_1 : \theta = 0,5$ za pomocą testu opartego na ilorazie wiarogodności na

poziomie istotności $0,05$. Moc tego testu przy $n = 18$ jest równa: ?
Odp: C-> $0,913$.

Rozwiązanie. Testy oparte na ilorazie i wiarygodności polegają na tym, że porównuje się $L_K(x) = \sup_{\theta\in\Theta_K} L(\theta, x$ z $L_H(x) = \sup_{\theta\in\Theta_H} L(\theta, x)$. Obszar krytyczny ma zatem postać

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{L_K(x)}{L_H(x)} > \lambda_0\}$$

dla pewnego $\lambda_0 \geqslant 1$ spełniającego warunek

$$\mathbf{P}_\theta(\frac{L_K(X)}{L_H(X)} > \lambda_0) \leqslant \alpha, \text{ gdy } \theta \in \Theta_H,$$

dla zadanej istotności α. W przypadku tego zadania są tylko dwie hipotezy i dlatego test oparty na ilorazie wiarygodności redukuje się do testu Neymana Pearsona. Najlepiej zapamiętać, że w przypadku rozwiązywanego zadania obszar krytyczny będzie miał postać $\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) > C\}$. Oczywiście wynik ten można potwierdzić rachunkiem zauważmy, że

$$\frac{L_K(x,y)}{L_H(x,y)} = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n[(x_i - m - \frac{1}{2}))^2 + (y_i - m + \frac{1}{2})^2])}{\exp(-\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n[(x_i - m))^2 + (y_i - m)^2])} =$$
$$= \exp(\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n[(x_i - y_i) - \frac{1}{2}])).$$

Stąd natychmiast szukana postać obszaru krytycznego. Znajdujemy właściwe C ze wzoru

$$\mathbf{P}_{\theta=0}(\mathcal{K}) = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^n (X_i - Y_i) > C) = 0,05.$$

Niech Z będzie z rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$ oczywiście w sensie rozkładu $\sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)$ (przy założeniu $\theta = 0$) ma postać $\sqrt{2n}Z$. Stad $C = 6 \cdot 1,64$ nadto dla $\theta = \frac{1}{2}$ w sensie rozkładu $\sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)$ ma postać $n + \sqrt{2n}Z$

$$\mathbf{P}_{\theta=\frac{1}{2}}(\mathcal{K}) = \mathbf{P}(n + \sqrt{2n}Z > \sqrt{2n}1,64) = \mathbf{P}(Z > 1,64 - \frac{n}{\sqrt{2n}}).$$

Dla $n = 18$ dostajemy $\mathbf{P}(Z > 1,64 - 3) = \mathbf{P}(Z > -1,36) \simeq 0,913$.

■

3. (Eg 54/10) Niech X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$p_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ gdy } x \geqslant 0, \text{ oraz } p_\lambda(x) = 0 \text{ gdy} x < 0,$$

gdzie $\lambda > 0$ jest nieznanym parametrem. Niestety nie obserwujemy zmiennych X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ale zmienne $Y_i = [X_i]$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, gdzie symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Dysponując próbą Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 weryfikujemy hipotezę $H_0 : \lambda = 1$, przy alternatywie $H_1 : \lambda = 3$ za pomocą testu o obszarze krytycznym

$$K = \{\hat{\lambda} > 1,79\},$$

gdzie $\hat{\lambda}$ oznacza estymator największej wiarygodności parametru λ otrzymany na podstawie próby losowej Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5. Rozmiar tego testu jest równy (wybierz najlepsze przybliżenie).
Odp: C-> $0,286$.

Rozwiązanie. Rozkład zmiennych Y_k ma postać

$$\mathbf{P}_\lambda(Y_k = n) = \mathbf{P}_\lambda(X_k \in [k, k+1)) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda k}, \text{ dla } k \geqslant 0,$$

czyli jest rozkładem geometrycznym z prawdopodobieństwem sukcesu $p = (1-e^{-\lambda})$. Wiarygodność dla rozkładów geometrycznych o prawdopodobieństwie sukcesu p ma postać

$$L(p,k) = \prod_{i=1}^{5} p(1-p)^{k_i} = p^5(1-p)^{k_1+\ldots+k_5}, \quad \text{gdzie } \ k = (k_1, ..., k_5).$$

Dla ustalonego k niech $f(p) = \log L(p,k)$. Szukamy p takiego, że $f'(p) = 0$, czyli

$$f'(p) = \frac{5}{p} - (k_1 + ... + k_5)\frac{1}{1-p} = 0.$$

Czyli $\hat{p} = \frac{5}{5+k_1+...+k_5}$. Stąd natychmiast $\hat{\lambda} = -\log(1-\hat{p})$. Ponieważ jest to rosnąca funkcja $\hat{p}$, więc obszar krytyczny ma postać $\mathcal{K} = \{k \in \mathbb{N}^5 : \frac{5}{5+k_1+...+k_5} > 1 - \exp(-1,79)\}$. Obliczamy rozmiar testu

$$\mathbf{P}_{\lambda=1}(\frac{5}{5+Y_1+...+Y_5} > 1-\exp(-1,79)).$$

Oczywiście przy założeniu $\lambda = 1$ zmienna $Y_1 + ... Y_5$ ma rozkład $\mathcal{B}_-(5,p)$, gdzie $p = 1-e^{-1}$. Zatem

$$\mathbf{P}_{\lambda=1}(Y_1 + ... + Y_5 < 5[(1-\exp(-1,79))^{-1} - 1]) = \mathbf{P}_{\lambda=1}(Y_1 + ... + Y_5 \leqslant 1)$$

Przypomnijmy, że $p = 1 - e^{-\lambda}$. Otrzymujemy

$$\mathbf{P}_{\lambda=1}(Y_1 + ... + Y_5 = 0) = p^5, \ \ \mathbf{P}_{\lambda=1}(Y_1 + ... + Y_5 = 1) = 5p^5(1-p).$$

Zatem odpowiedź to $p^5 + 5p^5(1-p)$, gdzie $p = 1 - e^{-1}$, która w przybliżeniu wynosi $0,286$.

■

4. (Eg 55/5) Niech X będzie pojedynczą obserwacją z rozkładu o gęstości

$$p_\theta(x) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - 2|x|) \ \text{ gdy } x \in [-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}] \ \text{ oraz } \ p_\theta(x) = 0 \ \text{ gdy } |x| > \frac{\theta}{2},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_1 : \theta \neq 1$ za pomocą testu opartego na ilorazie wiarogodności na poziomie istotności 0.2. Moc tego testu przy alternatywie $\theta = 6$ jest równa: ?
Odp: B-> $0,76$.

Rozwiązanie. Ponownie należy skorzystać z testu opartego na ilorazie wiarygodności. Zauważmy, że w tym przypadku

$$\frac{L_K(x)}{L_H(x)} = \frac{\sup_\theta p_\theta(x)}{p_2(x)}.$$

Zauważmy, że x musi należeć do przedziału $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ w przeciwnym przypadku iloraz będzie nieskończony. Zatem $\sup_\theta p_\theta(x) = \sup_\theta \frac{2}{\theta^2}(\theta - 2|x|)$ przyjmuje maksimum dla $\frac{\partial p_\theta(x)}{\partial\theta} = 0$ czyli

$$-\frac{4}{\theta^3}(\theta - 2|x|) + \frac{2}{\theta^2} = 0$$

stąd $\theta = 4|x|$. Zatem

$$L_K(x) = \frac{1}{4|x|}.$$

To oznacza, że

$$\frac{L_H(x)}{L_K(x)} = \frac{1}{8|x|(1-2|x|)}.$$

Obliczamy C takie, że

$$\mathbf{P}_{\theta=1}(\frac{1}{8|x|(1-2|x|)} \geqslant C) = 0,2.$$

Warunek jest równoważny temu, że $|x|(1-2|x|) \leqslant (8C)^{-1}$. Niech $d = \sqrt{1-C^{-1}}$ czyli $|x| \leqslant \frac{1-d}{4} = a$ lub $|x| \geqslant \frac{1+d}{4} = b$. Zauważmy, że

$$\mathbf{P}_\theta(X \leqslant t) = \begin{array}{ll} 1 - \frac{1}{2}[\theta - 2|x|]^2 & 0 < t \leqslant \frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{2}[\theta - 2|x|]^2 & -\frac{\theta}{2} < t \leqslant 0 \end{array} .$$

Stąd $\mathbf{P}_\theta(|X| \leqslant a) = 1 - \frac{[\theta-2|a|]^2}{\theta^2}$, jeśli $|a| \leqslant \frac{\theta}{2}$, a w przeciwnym razie 1 nadto $\mathbf{P}_\theta(|X| > b) = \frac{[\theta-2|b|]^2}{\theta^2}$ jeśli $|b| \leqslant \frac{\theta}{2}$, a w przeciwnym razie 0. Zatem

$$\mathbf{P}_{\theta=1}(X \in \mathcal{K}) = 1 - [1-2|b|]^2 + [1-2|a|]^2 = 1 + 2d - 2d(1/2) = 0,2.$$

Pozostaje zauważyć, że $b - a = \frac{\sqrt{1-8\bar{C}}}{2}$ nadto $b^2 - a^2 = \frac{\sqrt{1-8\bar{C}}}{4}$. Niech $d = \sqrt{1-8\bar{C}}$. Zachodzi

$$\mathbf{P}_{\theta=1}(X \in \mathcal{K}) = 1 - [1-2|a|]^2 + [1-2|b|]^2 = 1 - 2d + d = 1 - d$$

Stąd $d = \frac{4}{5}$ a dalej $a = \frac{1}{20}$, $b = \frac{9}{20}$. Obliczamy moc testu dla $\theta = 6$

$$\mathbf{P}_{\theta=6}(|x| \leqslant a, |x| \geqslant b) = 1 - \frac{(6-\frac{1}{10})^2}{36} + \frac{(6-\frac{9}{10})^2}{36} \simeq 0,76.$$

■

5. (Eg 56/5) Obserwujemy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_1}. Dystrybuanta F_μ spełnia warunek

$$F_\mu(x) = F(x - \mu)$$

dla pewnej ustalonej, nieznanej, ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuanty F. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ stosując test o obszarze krytycznym

$$K = \{S : S < 16\},$$

gdzie S jest sumą rang zmiennych losowych X_1, X_2, X_3, X_4 w próbce złożonej ze wszystkich obserwacji ustawionych w ciąg rosnący. Wyznaczyć rozmiar testu.
Odp: A-> $\frac{18}{126}$.

Rozwiązanie. Test rangi oparty jest o spostrzeżenie, że gdyby $\mu_1 = \mu_2$ wtedy zmienne X i Y powinny być losowo wymieszane. W związku z tym wystarczy obliczyć prawdopodobieństwo wszystkich układów sprzyjających temu że $S < 16$ przy założeniu losowego położenia zmiennych $X_1, ..., X_4$ po ustawieniu w ciąg rosnący w całej próbce. Sprawdzamy, że jest dokładnie 18 możliwych układów nadto wyborów zbiorów 4 elementowych w 9 elementowym jest $\binom{9}{4} = 126$. Stąd rozmiar testu wynosi $\frac{18}{126}$.

■

6. (Eg 56/10) Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie geometrycznym postaci

$$\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^k \quad \text{gdy } k = 0, 1, 2, ...,$$

gdzie $p \in (0,1)$ jest nieznanym parametrem. Hipotezę $H_0 : p = \frac{1}{2}$ przy alternatywie $H_1 : p > \frac{1}{2}$ weryfikujemy testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie istotności $0,1875$. Moc tego testu przy alternatywie $p = \frac{4}{5}$ jest równa:?
Odp: E-> $0,73728$.

Rozwiązanie. Test jednostajnie najmocniejszy oparty jest o statystykę $T(x)$ przy której dla dowolnego $p' > p$ funkcja $\frac{L(p',k)}{L(p,k)}$ jest rosnącą funkcją $T(k)$. Obliczamy

$$\frac{L(p',k)}{L(p,k)} = \frac{(1-p')^{k_1+...+k_4}}{(1-p)^{k_1+...+k_4}} = \left(\frac{1-p'}{1-p}\right)^{k_1+...+k_4} .$$

Zatem szukaną statystyką jest $T(k) = -(k_1 + ... + k_4)$. W przypadku rozkładów zawsze trzeba liczyć się z problemem randomizacji testu. To znaczy test ma postać

$$\varphi(k) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad T(k) > C \\ \gamma & \text{gdy} \quad T(k) = C \\ 0 & \text{gdy} \quad T(k) < C \end{cases}$$

Stałe C i γ wyznacza się z warunku $\mathbf{E}_{p=\frac{1}{2}}\varphi(X) = 0,1875$. Zauważmy, że przy $p = \frac{1}{2}$, $X_1 + ... + X_4$ ma rozkład ujemny dwumianowy $\mathcal{B}_-(4, \frac{1}{2})$. Należy znaleźć $C \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathbf{P}_{p=\frac{1}{2}}(X_1 + ... + X_4 < C) \leqslant 0,1875$ oraz $\mathbf{P}(X_1 + ... + X_4) > 0,1875$. Okazuje się, że $C = 2$, a test szczęśliwie nie jest zrandomizowany. Obliczamy moc testu dla $p = \frac{4}{5}$.

$$\mathbf{P}_{p=\frac{4}{5}}(X_1 + ... + X_4 < 2) = 0,7328.$$

■

7. (Eg 57/6) Niech $X_1, X_2, ..., X_8$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa Pareto o dystrybuancie

$$F_\theta(x) = 1 - \frac{1}{x^\theta} \text{ dla } x \leqslant 1 \text{ oraz } F_\theta(x) = 0 \text{ dla } x < 1,$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozpatrzmy zadanie testowania hipotezy $H_0 : \theta = 4$ przeciwko alternatywie $H_1 : \theta = 2$. Zbudowano taki test, dla którego suma prawdopodobieństw błędów I i II rodzaju, oznaczanych odpowiednio przez α i β, jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość $\alpha + \beta$.
Odp: B-$>$ $0,3336$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że gęstość ma postać $f_\theta(x) = \theta^8 \prod_{i=1}^8 \frac{1}{x_i}^{\theta+1}$. Stosujemy test Neymana Pearsona, w tym obliczy iloraz wiarygodności

$$\frac{L(2,x)}{L(4,x)} = 2^{-8} \prod_{i=1}^{8} x_i^2 = 2^{-8} \exp(2 \sum_{i=1}^{8} \log x_i).$$

Zatem obszar krytyczny $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^8 : \frac{L(2,x)}{L(4,x)} > C\}$ można zapisać jako

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^8 : \sum_{i=1}^{8} \log x_i > \bar{C}\}$$

Należy zauważyć, że $\log X_i$ ma rozkład *Exp*(θ) stąd $\sum_{i=1}^8 \log X_i$ ma przy zadanym θ rozkład $\Gamma(8, \theta)$. Stąd

$$\alpha(\bar{C}) + \beta(\bar{C}) = \mathbf{P}_{\theta=4}(\mathcal{K}) + 1 - \mathbf{P}_{\theta=2}(\mathcal{K}) =$$
$$= \int_{\bar{C}}^{\infty} \frac{4^8}{7!} \exp(-4x)dx + \int_0^{\bar{C}} \frac{2^8}{7!} \exp(-2x)dx = f(\bar{C}).$$

Poszukujemy $\bar{C}$ takiego, że $f'(\bar{C}) = 0$ Równanie $f'(\bar{C}) = 0$ jest równoważna

$$e^{-2\bar{C}} = 2^8 e^{-4\bar{C}}.$$

Czyli $\bar{C} = 4\log 2$. Pozostaje obliczyć $\alpha(\bar{C}) + \beta(\bar{C})$. Można skorzystać z tablic rozkładu chi-kwadrat, wtedy odpowiedzią jest $0,3336$. Alternatywnie korzystając z rozkładu normalnego dla zmiennej Z z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$

$$\alpha(\bar{C}) = \mathbf{P}_{\theta=4}(\frac{\sum_{i=1}^8 \log X_i - 2}{\sqrt{1/2}} \leqslant \frac{\bar{C} - 2}{\sqrt{1/2}}) \simeq \mathbf{P}(Z > \frac{(8\log 2) - 4}{\sqrt{2}}) \simeq 0,1373$$

oraz

$$\beta(\bar{C}) = \mathbf{P}_{\theta=2}(\frac{\sum_{i=1}^{8}\log X_i - 4}{\sqrt{2}} < \frac{\bar{C}-4}{\sqrt{2}}) \simeq \mathbf{P}(Z < \frac{(4\log 2)-4}{\sqrt{2}}) \simeq 0,1927,$$

a stąd $\alpha(\bar{C}) + \beta(\bar{C}) \simeq 0,330$.

■

8. (Eg 57/8) Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = 3\theta x^2 \exp(-\theta x^3), \text{ gdy } x > 0 \text{ oraz } f_\theta(x) = 0 \text{ gdy } x \leqslant 0.$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Niestety nie obserwujemy zmiennej X, ale zmienną Y równą $X-1$, gdy $X > 1$. W wyniku tych obserwacji otrzymujemy prostą próbę losową $Y_1, Y_2, ..., Y_{10}$ (nie wiemy ile razy pojawiły się wartości zmiennej X z przedziału $(0,1]$) i na jej podstawie wyznaczamy estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ. Dobierz stałą c tak, aby zachodziła równość

$$\mathbf{P}_\theta(\theta < c\hat{\theta}) = 0,95.$$

Odp: D-> $1,57$.

Rozwiązanie. W zadaniu musimy przejść do zmiennych Y_i które mają gęstość $f_\theta(x_i|x_i > 1)$. Jest jasne, że $p = \mathbf{P}(X_i > 1)$ ma postać

$$p = \int_0^\infty 3\theta x^2 \exp(-\theta x^3)dx = \int_1^\infty \theta\exp(-\theta x)dx = e^{-\theta}.$$

Zatem zmienne Y_i mają gęstość $e^\theta f_\theta(y_i+1)1_{y_i \geqslant 0}$, stąd wiarygodność ma postać

$$L(\theta, y) = e^{10\theta}\prod_{i=1}^{10} f_\theta(y_i+1)1_{y_i\geqslant 0}.$$

Aby obliczyć estymator największej wiarygodności rozważmy funkcję $f(\theta) = \log L(\theta, y)$, której pochodna ma postać jest równa

$$f'(\theta) = 10 + 10\frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{10}(y_i+1)^3.$$

Stąd $\hat{\theta} = \frac{10}{\sum_{i=1}^{10}((Y_i+1)^3-1)}$. Zauważmy, że dla przechodząc do zmiennych obserwowanych Y_i ten estymator ma postać

$$\hat{\theta} = \frac{10}{\sum_{i=1}^{10}((1+Y_i)^3 - 1)}$$

Pozostaje sprawdzić dla jakiego c zachodzi

$$\mathbf{P}_\theta(\theta \leqslant \frac{10c}{\sum_{i=1}^{10}(1+Y_i)^3 - 1}) = 0,95.$$

Oczywiście $(1+Y_i)^3$ ma rozkład wykładniczy $Exp(\theta)$ przesunięty o 1. Stąd też $\sum_{i=1}^{10}(1+Y_i)^3$ ma rozkład $\Gamma(10,\theta)$ przesunięty o 10. Ściślej $\sum_{i=1}^{10}(1+Y_i)^3$ ma ten sam rozkład co $10+Y$, gdzie Y ma rozkład $\Gamma(10,\theta)$. Stąd

$$\mathbf{P}_\theta(\theta \leqslant \frac{10c}{\sum_{i=1}^{10}(1+Y_i)^3 - 1}) = \mathbf{P}_\theta(\theta \leqslant \frac{10c}{Y}) = 0,95.$$

Łatwo zauważyć, że Y ma ten sam rozkład co $Z/(2\theta)$, gdzie Z ma rozkład $\Gamma(\frac{20}{2}, \frac{1}{2})$ czyli χ^2 z 20 stopniami swobody. Zatem

$$0,95 = \mathbf{P}(Z \leqslant 20c)$$

Z tablic rozkładu χ^2 dostajemy $20c \simeq 31,410$, czyli $c \simeq 1,57$.

■

9. (Eg 58/3) Niech $X_1, X_2, ..., X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Weryfikowano hipotezę $H_0 : \mathbf{Var}X = 4$ przy alternatywie $H_1 : \mathbf{Var}X > 4$. Zakładając, że zmienne losowe X, mają rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0 wykorzystano test jednostajnie najmocniejszy na poziomie $0,05$. W rzeczywistości zmienne losowe X, mają rozkład o gęstości

$$f_c(x) = c|x| \exp(-cx^2),$$

gdzie $c > 0$ jest nieznanym parametrem. Wyznacz rzeczywisty rozmiar wykorzystanego testu (wybierz najlepsze przybliżenie).
Odp: B-> $0,013$.

Rozwiązanie. Korzystamy z testu Neymana Pearsona dla gaussowskich zmiennych losowych. Iloraz wiarygodności dla $\theta > 4$ ma postać

$$\frac{L(\theta, x)}{L(4, x)} = \frac{(2\pi 4)^5}{(2\pi\theta)^5} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}) \sum_{i=1}^{10} x_i^2)$$

co jest rosnącą funkcją $\sum_{i=1}^{10} x_i^2$. Zatem obszar krytyczny ma postać

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^{10} : \sum_{i=1}^{10} x_i^2 > C\}$$

dla C takiego, że $\mathbf{P}_{\mathbf{Var}X=4}(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > C) = 0,05$. Oczywiście przy $\mathbf{Var}X = 4$ rozkład $\sum_{i=1}^{10} X_i^2$ to rozkład zmiennej $4Z$, gdzie Z ma rozkład χ^2 z 10 stopniami swobody. Z tablic otrzymujemy, że $C/4 = 18,307$. Pozostaje obliczyć

$$\alpha(c) = P_c(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > C)$$

dla X_i o rozkładzie z gęstością $f_c(x)$. Zauważmy najpierw, że X_i^2 ma rozkład o dystrybuancie

$$\mathbf{P}(X_i^2 \leqslant t) = 2\mathbf{P}(0 \leqslant X_i \leqslant \sqrt{t})$$

skąd wyznaczamy gęstość $c \exp(-ct) 1_{t \geqslant 0}$, czyli X_i^2 ma rozkład wykładniczy z parametrem c Parametr c obliczamy z warunku, że $\mathbf{E}X_i^2 = \mathbf{Var}X_i = 4$. Stąd $c = 1/4$. Zatem $\sum_{i=1}^{10} X_i^2$ ma rozkład $\Gamma(10, \frac{1}{4})$. Ostatecznie $\sum_{i=1}^{10} X_i^2$ ma rozkład jak $2Z$, gdzie Z pochodzi z rozkładu $\Gamma(\frac{20}{2}, \frac{1}{2})$ czyli $\chi^2(20)$. Z tablic odczytujemy, że

$$\mathbf{P}(Z > C/2) \simeq 0,013.$$

■

10. (Eg 59/9) Zakładając, że zmienne losowe $X_1, X_2, ..., X_5, Y_1, Y_2, , ..., Y_5$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X_i, $i = 1, 2, ..., 5$ mają rozkłady normalne $\mathcal{N}(\mu_X, 1)$, a zmienne Y_i, $i = 1, 2, ..., 5$ mają rozkłady normalne $N(\mu_Y, 2^2)$, zbudowano test najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy : $H_0 : \mu_X = \mu_Y = 0$ przy alternatywie $H_1 : \mu_X = 1$ i $\mu_Y = -1$ na poziomie istotności $0,05$. W rzeczywistości zmienne losowe (X_i, Y_i), $i = 1, 2, ..., 5$ są niezależne i mają rozkłady normalne o parametrach $\mathbf{E}X_i = \mu_X$, $\mathbf{E}Y_i = \mu_Y$, $\mathbf{Var}X_i = 1$, $\mathbf{Var}Y_i = 4$, współczynnik korelacji $\rho(X_i, Y_i) = 0,5$. Przy tych warunkach moc zbudowanego testu jest równa: ?
Odp: E-> $0,87$.

Rozwiązanie. Stosujemy test Neymana-Pearsona, obliczamy iloraz wiarygodności

$$\frac{L((1, -1), (x, y))}{L((0, 0), (x, y))} = \exp(\sum_{i=1}^{5} (x_i - \frac{y_i}{4}) + \frac{25}{8})$$

Zatem obszar krytyczny ma postać $\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 : \sum_{i=1}^5 (x_i - \frac{y_i}{4}) > C;\}$, gdzie C jest tak dobrane aby

$$\mathbf{P}_{(\mu_X,\mu_Y)=(0,0)}(\sum_{i=1}^5 (X_i - \frac{Y_i}{4}) > C).$$

Niech Z będzie z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$. Przy założeniu $\mu_X = \mu_Y = 0$ rozkład $\sum_{i=1}^5 (X_i - \frac{Y_i}{4})$ ma postać $\frac{5}{2}Z$. Stąd $\frac{2}{5}C \simeq 1,64$. Należy więc sprawdzić rozkład $\sum_{i=1}^5 (X_i - \frac{Y_i}{4})$ przy założeniu korelacji oraz $\mu_X = 1$, $\mu_Y = -1$. Obliczamy wartość oczekiwaną $\mathbf{E}\sum_{i=1}^5 (X_i - \frac{Y_i}{4}) = \frac{25}{4}$. Obliczamy kowariancję $\mathbf{Cov}(X_i, Y_i) = 1$ i wreszcie wariancję

$$\mathbf{Var}(\sum_{i=1}^5 (X_i - \frac{Y_i}{4})) = \frac{25}{4} - \frac{5}{2} = \frac{15}{4}.$$

Zatem $\sum_{i=1}^5 (X_i - \frac{Y_i}{4})$ ma rozkład $\frac{25}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2}Z$, gdzie Z ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Stąd

$$\mathbf{P}_{(\mu_X,\mu_Y)=(1,-1)}(\sum_{i=1}^5 (X_i - \frac{Y_i}{4}) \leqslant C) = \mathbf{P}(\frac{25}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2}Z > \frac{5}{2}\cdot 1,64) \simeq 0,866.$$

■

11. (Eg 60/5) Obserwujemy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_1}, a zmienne Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_2}. Dystrybuanta F_μ warunek

$$F_\mu(x) = F(x-\mu)$$

dla pewnej ustalonej, nieznanej, ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuanty F. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ stosując test o obszarze krytycznym

$$K = \{S : S < 10 \vee S > 17\},$$

gdzie S jest sumą rang zmiennych losowych X_1, X_2, X_3 w próbce złożonej ze wszystkich obserwacji ustawionych w ciąg rosnący. Wyznaczyć rozmiar testu.
Odp: B-$>$ $0,250$.

Rozwiązanie. Korzystamy z testu rangi. Wszystkich możliwych rozmieszczeń 3 elementów wśród 8 jest $\binom{8}{3} = 56$. Obliczamy teraz liczbę rozmieszczeń dla zbioru krytycznego to znaczy spełniającą warunki $S < 10$ lub $S > 17$. Dla $S < 10$ jest ich tyle samo co dla $S > 17$ czyli 7. Zatem rozmiar testu wynosi $\frac{14}{56} = 0,25$.

■

12. (Eg 60/8) Zakładając, że zmienne losowe X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają jednakowy rozkład jednostajny na przedziale $(-\theta, \theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_1 : \theta \neq 1$ za pomocą testu jednostajnie najmocniejszego na poziomie istotności $0,2$. W rzeczywistości zmienne losowe X_1, X_2, X_3 są niezależne o tym samym rozkładzie o gęstości

$$p(x) = \frac{1}{4}|x|, \ \text{ gdy } x \in (-2,2), \ \text{ oraz } \ p(x) = 0 \ \text{ gdy } |x| \geqslant 2.$$

Prawdopodobieństwo zbioru krytycznego rozważanego testu przy tym rozkładzie zmiennych X_1, X_2, X_3 jest równe: ?
Odp: B-$>$ $0,9850$.

Rozwiązanie. Zazwyczaj testy najmocniejsze są jednostronne. Znajdźmy strukturę testu Neymana Pearsona dla $\theta > 1$ opartą o iloraz wiarygodności

$$\frac{L(\theta,x)}{L(1,x)} = \frac{\prod_{i=1}^3 1_{|x_i|\leqslant\theta}}{\theta^3 \prod_{i=1}^3 1_{|x_i|\leqslant 1}}$$

jest stale równy $1/\theta^3$ na zbiorze $T = \max_{1\leqslant i\leqslant 3}|x_i| \leqslant 1$ i może być nieskończony dla $T > 1$. To oznacza, że w zbiorze krytycznym znajduje się zbiór $\{x \in \mathbb{R}^3 : T > 1\}$. Dla $\theta < 1$

$$\frac{L(\theta, x)}{L(1, x)} = \frac{\prod_{i=1}^{3} 1_{|x_i|\leqslant\theta}}{\theta^3 \prod_{i=1}^{3} 1_{|x_i|\leqslant 1}}$$

co daje 1 gdy $T \leqslant \theta$ oraz 0 gdy $T > \theta$ na zbiorze $T \leqslant 1$, czyli jest rosnącą funkcją statystyki $1/T$. To oznacza, że w zbiorze krytycznym znajduje się zbiór $\{x \in \mathbb{R}^3 : T(x) \leqslant C\}$. Pozostaje sprawdzić, że dla C dobranego tak, że $\mathbf{P}_{\theta=1}(T(X) \in \mathcal{K}) = 0,2$ obszar krytyczny spełnia warunki dostateczne testu Neymana-Persona dla dowolnego θ. Obliczamy

$$\mathbf{P}_{\theta=1}(\{T(X) \leqslant C\} \cup \{T(X) > 1\}) = 0,2.$$

Stąd $C^3 = 0,2$. Przy poprawionej funkcji gęstości dostajemy

$$\mathbf{P}_{\theta=1}(\{T(X) \leqslant C\} \cup \{T(X) > 1\}) = (\frac{1}{4}C^2)^3 + 1 - (\frac{1}{4})^3 = 0,985.$$

■

13. (Eg 61/1) Niech $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta_1)$, a $Y_1, Y_2, ..., Y_6$ niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta_2)$, gdzie θ_1, θ_2 są nieznanymi parametrami dodatnimi. Wszystkie zmienne są niezależne. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ przy alternatywie $H_1 : \theta_1 = 2\theta_2$ testem o obszarze krytycznym

$$K = \{\frac{\max(X_1, X_2, ..., X_6)}{\max(Y_1, Y_2, ..., Y_6)} > c\},$$

gdzie c jest stałą dobraną tak, aby test miał rozmiar $0,1$. Moc tego testu jest równa
Odp: B-> $0,961$.

Rozwiązanie. W tym zadaniu dysponujemy obszarem krytycznym zatem wystarczy przeprowadzić odpowiedni rachunek. Najpierw zauważmy, że $(\max_{1\leqslant i\leqslant 6} X_i, \max_{1\leqslant i\leqslant 6} Y_i)$ ma rozkład na $\mathbb{R}^2$ o gęstości

$$\frac{6t^5}{\theta_1^6} 1_{0\leqslant t\leqslant\theta_1} \frac{6s^5}{\theta_2^6} 1_{0\leqslant s\leqslant\theta_2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\theta_1,\theta_2}(\frac{\max_{1\leqslant i\leqslant 6} X_i}{\max_{1\leqslant i\leqslant 6} Y_i} > c) &= \int_0^{\theta_1}\int_0^{\theta_2} 1_{\frac{x}{y}>c} \frac{36x^5y^5}{\theta_1^6\theta_2^6} dydx = \\ &= \int_0^{\theta_1}\int^{\theta_2\wedge\frac{x}{c}} \frac{36x^5y^5}{\theta_1^6\theta_2^6} dydx = \int_0^{\theta_1} \frac{6x^5(\theta_2\wedge\frac{x}{c})^6}{\theta_1^6\theta_2^6} dx = \\ &= \frac{(\theta_1\wedge c\theta_2)^{12}}{2c^6\theta_1^6\theta_2^6} + 1 - \frac{(\theta_1\wedge c\theta_2)^6}{\theta_1^6}.\end{aligned}$$

Dla $\theta_1 = \theta_2$ zatem rozmiar testu wynosi

$$\alpha(c) = \frac{(1\wedge c)^{12}}{2c^6} + 1 - (1\wedge c)^6.$$

Czyli $c^6/2 = 1 - 0,1$, $c^6 = 1,8$. Dla $\theta_1 = 2\theta_2$ dostajemy

$$\beta(c) = \frac{c^{12}}{2^7c^6} + 1 - \frac{c^6}{2^6} = 1 - \frac{1.8}{2^7} \simeq 0,986.$$

■

14. (Eg 62/1) Każda ze zmiennych losowych $X_1, X_2, ..., X_9$ ma rozkład normalny z nieznaną wartością oczekiwaną m_1 i wariancją 1, a każda ze zmiennych losowych $Y_1, Y_2, ..., Y_9$ rozkład normalny z nieznaną wartością oczekiwaną m_2 i wariancją 4. Założono, że wszystkie zmienne losowe są niezależne i wyznaczono, przy tych założeniach, test oparty na ilorazie wiarogodności dla testowania hipotezy $H_0 : m_1 = m_2$ przy alternatywie $H_1 : m_1 \neq m_2$ na poziomie istotności $0,05$. W rzeczywistości założenie to nie jest spełnione:

- co prawda pary zmiennych $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)$ są niezależne i mają rozkłady normalne, ale
- dla $i = 1, 2, ..., 6$, X_i, Y_i są zależne i współczynnik korelacji $\mathrm{Corr}(X_i, Y_i) = -\frac{1}{2}$.

Moc testu przy alternatywie $m_1 = m_2 + 1$ jest równa:?
Odp: B-$> 0,293$.

Rozwiązanie. Stosujemy test oparty na ilorazie wiarygodności

$$\frac{L_K(x)}{L_H(x)} = \frac{\sup_{(m_1,m_2)\in K} L((m_1, m_2), x)}{\sup_{\theta\in H} L((m_1, m_2), x)}.$$

Obliczamy

$$\sup_{(\mu_1,\mu_2)\in K} L((m_1, m_2), x) = \sup_{(m_1,m_2)} (2\pi)^{\frac{9}{2}}(8\pi)^{\frac{9}{2}} \exp(-\sum_{i=1}^{9}[\frac{(x_i - m_1)^2}{2} + \frac{(y_i - m_2)^2}{8}]) =$$
$$= \sup_{m_1,m_2} (2\pi)^{\frac{9}{2}}(8\pi)^{\frac{9}{2}} \exp(-\sum_{i=1}^{9}[\frac{(x_i - \bar{x})^2}{2} + \frac{(y_i - \bar{y})^2}{8}]),$$

gdyż maksimum jest osiągane dla $m_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$, $m_2 = \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + ... + y_n)$. Z drugiej strony

$$\sup_{(m_1,m_2)\in H} L((m_1, m_2), x) = \sup_{m_1}(2\pi)^{\frac{9}{2}}(8\pi)^{\frac{9}{2}} \exp(-\sum_{i=1}^{9}[\frac{(x_i - m_1)^2}{2} + \frac{(y_i - m_1)^2}{8}]) =$$
$$= \sup_{m_1}(2\pi)^{\frac{9}{2}}(8\pi)^{\frac{9}{2}} \exp(-\sum_{i=1}^{9}[\frac{x_i^2}{2} + \frac{y_i^2}{8} - \frac{2}{5}n(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{4})^2]).$$

Stąd

$$\exp(-\sum_{i=1}^{9}[n(\frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{y}^2}{8} - \frac{2}{5}(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{4})^2)]) = \exp(n\sum_{i=1}^{9}\frac{(\bar{x} - \bar{y})^2}{10}).$$

Zatem obszar krytyczny ma postać

$$\mathcal{K} = \{(x, y) : \ |\bar{x} - \bar{y}| > C\}$$

co warto zapamiętać jako fakt pomocniczy. Obliczamy wartość C

$$\mathbf{P}_{m_1=m_2}(|\bar{X} - \bar{Y}| > C) = 0,05.$$

Przy założeniu $\bar{X} - \bar{Y}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, \frac{5}{9})$ czyli dla Z z rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\mathbf{P}_{m_1=m_2}(|\bar{X} - \bar{Y}| > C) = \mathbf{P}(\frac{\sqrt{5}}{3}|Z| > C) = 0,05.$$

Zatem $\frac{3}{\sqrt{5}}C = 1,96$, $C = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot 1,96$. Dla $m_1 = m_2 + 1$ rozkład $\bar{X} - \bar{Y}$ ma wartość średnią 1. Nadto przy założeniach o korelacji dla $i = 1, 2, ..., 6$ zachodzi $\mathbf{Cov}(X_i, Y_i) = -1$. Zatem

$$\mathbf{Var}(\bar{X} - \bar{Y}) = \frac{11}{27}.$$

Obliczamy

$$\mathbf{P}_{m_1=m_2+1}(|\bar{X}-\bar{Y}|>C)=\mathbf{P}(|1+\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{27}}Z|>C)\simeq 0,293.$$

■

15. (Eg 62/3) Załóżmy, że dysponujemy pojedynczą obserwacją X z rozkładu Laplace'a o gęstości

$$f_{\mu,\lambda}(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-\mu|},$$

gdzie $\lambda>0$ i $\mu\in\mathbb{R}$ są parametrami. Rozważamy zadanie testowania hipotezy

$$H_0:\mu=-1\ \text{ i }\ \lambda=0,5$$

przy alternatywie

$$H_1:\mu=0\ \text{ i }\ \lambda=1.$$

Obszar krytyczny najmocniejszego testu na poziomie istotności α jest postaci

$$K=\{x:\ x\in(b,2)\}.$$

Moc testu jest równa
Odp: C-> $0,676$.

Rozwiązanie. Najmocniejszy test ma konstrukcję testu Neymana-Pearsona czyli powinniśmy wyznaczyć iloraz wiarygodności

$$\frac{L((-1,\frac{1}{2}),x)}{L((0,1),x)}=2\exp(-|x|+\frac{1}{2}|x+1|).$$

Zatem obszar krytyczny ma postać $\mathcal{K}=\{x\in\mathbb{R}:-|x|+\frac{1}{2}|x+1|>C\}$. Stąd $C=-\frac{1}{2}$ oraz $b=-\frac{2}{3}$. Pozostaje obliczyć moc testu

$$\mathbf{P}_{\mu=0,\lambda=1}(X\in\mathcal{K})=\int_{-\frac{2}{3}}^{2}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=$$
$$=\frac{1}{2}(1-e^{-2})+\frac{1}{2}(1-e^{-\frac{2}{3}})\simeq 0,676.$$

■