1 Warunkowe wartości oczekiwane

W tej serii zadań rozwiążemy różne zadania związane z problemem warunkowania.

1. (Eg 48/1) Załóżmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ równą 10. Obliczyć $\nu = \mathbf{Var}(X_3 + X_4 | X_1 + X_2 + X_3 = 9)$
   Odp: C-> $\nu = 12$.

   Rozwiązanie. Przypomnijmy, że rozkład X_3 pod warunkiem $X_1 + X_2 + X_3 = 9$ ma postać Bernoulliego $\mathcal{B}(9, \frac{1}{2})$. Warto zauważyć, że

   $$\mathbf{Var}(X_3+X_4|X_1+X_2+X_3 = 9) = \mathbf{Var}X_4+\mathbf{Var}(X_3|X_1+X_2+X_3 = 9) = \lambda+9\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = 10+2 = 12.$$

   ■

2. (Eg 49/7) Niech $X_0, X_1, X_2, ..., X_n$, $n > 2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości $f(x) = \frac{3}{(1+x)^4} 1_{x>0}$. Niech $U = \min\{X_0, X_1, X_2, ..., X_n\}$. Wtedy $\mathbf{E}(U|X_0 = 1)$ jest równa
   Odp: E-> $\frac{1}{3n-1}(1 - \frac{1}{2^{3n-1}})$.

   Rozwiązanie. Obliczamy

   $$\begin{aligned}
   &\mathbf{E}(U|X_0 = 1) = \mathbf{E}\min\{1, X_1, X_2, ..., X_n\} = \\
   &= \mathbf{P}(\min\{X_1, ..., X_n\} > 1) + \int_0^1 \mathbf{P}(t < \min\{X_1, ..., X_n\} \leqslant 1)dt = \\
   &= (\int_1^\infty f(x)dx)^n + \int_0^1 (\int_t^1 f(x)dx)^n dt = 2^{-3n} + \int_0^1 [(1 + t)^{-3n} - 2^{-3n}]dt = \\
   &= \int_0^1 (1 + t)^{-3n} dt = \frac{1}{3n - 1}(1 - 2^{-3n+1}).
   \end{aligned}$$

   ■

3. (Eg 50/2) Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi każda z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 1. Niech $U = 2X + Y$ i $V = X - Y$. Wtedy prawdopodobieństwo $\mathbf{P}(U \in (0, 6)$ i $V \in (0, 6))$ jest równe
   Odp: C-> $\frac{1}{2}(1 - 4e^{-3} + 3e^{-4})$.

   Rozwiązanie. Mamy do policzenia prawdopodobieństwo, że $(U, V) \in (0, 6)^2$. Jest jasne, że (U, V) jest przekształceniem liniowym $T(X, Y)$. Zatem $(U, V) \in (0, 6)^2$ tłumaczy się na $(X, Y) \in T^{-1}(0, 6)^2$. Wystarczy sprawdzić na co przekształcane są punkty $(0, 0), (6, 0), (0, 6), (6, 6)$, dostajemy $(0, 0), (2, 2), (2, -4), (4, -2)$ czyli wierzchołki równoległoboku R. Mamy

   $$\begin{aligned}
   &\mathbf{P}((U, V) \in (0, 6)^2) = \mathbf{P}((X, Y) \in R) = \int_0^2 \int_0^x e^{-y}dydx + \int_2^3 \int_0^{6-2x} e^{-y}dye^{-x}dx = \\
   &= \int_0^2 (e^{-x} - e^{-2x})dx + \int_2^3 (e^{-x} - e^{-6+x})dx = 1 - e^{-2} - \frac{1}{2}(1 - e^{-4}) + e^{-2} - e^{-3} - e^{-3} + e^{-4} = \\
   &= \frac{1}{2}(1 - 4e^{-3} + 3e^{-4}.
   \end{aligned}$$

   ■

4. (Eg 51/1) Niech będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości $f(x, y) = 2x^2+\frac{4}{3}xy1_{0<x<1}1_{0<y<1}$ Niech $S = X + Y$ i $V = Y - X$. Wyznacz $\mathbf{E}(V|S = 1)$.
   Odp: C-> $-\frac{3}{8}$.

   Rozwiązanie. W tym zadaniu należy wyznaczyć trzeba wyznaczyć rozkład (S, V) mamy

   $$f_{S,V}(s, v) = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}(s - v), \frac{1}{2}(s + v)) = [\frac{1}{4}(s - v)^2 + \frac{1}{6}(s^2 - v^2)]1_{|v|<\min(s,2-s)}.$$

Pozostaje zatem wyznaczyć rozkład warunkowy

$$f_{S,V}(v|s=1) = \frac{[\frac{1}{4}(1-v)^2 + \frac{1}{6}(1-v^2)]1_{|v|<1}}{\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1-v)^2 + \frac{1}{6}(1-v^2)dv} =$$
$$= \frac{9}{8}[\frac{1}{4}(1-v)^2 + \frac{1}{6}(1-v^2)]1_{|v|\leqslant 1}.$$

Obliczamy

$$\mathbf{E}(V|S=1) = \int_{-1}^{1} \frac{9}{32}v(1-v)^2 + \frac{3}{16}(v-v^3)dv = -\frac{3}{8}.$$

■

5. (Eg 52/7) Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y) = e^{-x}1_{x>0}1_{0<y<1}.$$

Niech $Z = X + 2Y$. Wtedy łączny rozkład zmiennych Z, X jest taki, że
Odp: D-> jego funkcja gęstości na zbiorze $\{(z,x) : 0 < x < z < 2+x\}$ wyraża się wzorem $g(z,x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.

Rozwiązanie. Mamy przekształcenie $(Z,X) = T(X,Y)$, gdzie T jest przekształceniem liniowym $T(X,Y) = (X+2Y, X)$. Zatem $T^{-1}(Z,X) = (X, \frac{1}{2}(Z-X))$, nadto moduł z wyznacznika $|DT^{-1}| = \frac{1}{2}$. Obliczamy

$$f_{Z,X}(z,x) = \frac{1}{2}f(x, \frac{1}{2}(z-x)) = \frac{1}{2}e^{-x}1_{x>0}1_{0<\frac{1}{2}(z-x)<1} = \frac{1}{2}e^{-x}1_{0<x\leqslant z\leqslant 2+x}.$$

■

6. (Eg 53/1) Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1, a zmienna losowa Y rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2. Obie zmienne są niezależne. Oblicz $\mathbf{E}(Y|X+Y=3)$
Odp: A-> $1,86$.

Rozwiązanie. Należy wyznaczyć wspólny rozkład $(Y, X+Y) = T(X,Y)$. Zatem $T^{-1}(U,V) = (V-U, U)$ oraz $|DT^{-1}| = 1$ co oznacza, że

$$f_{Y,X+Y}(u,v) = e^{-(v-u)}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}1_{v-u>0}1_{u>0} = \frac{1}{2}e^{-v+\frac{1}{2}u}1_{v>u>0}.$$

Stąd

$$f_{Y,X+Y}(u|v) = \frac{e^{\frac{1}{2}u}1_{v>u>0}}{2(e^{\frac{1}{2}v}-1)}.$$

Zatem

$$\mathbf{E}(Y|X+Y=3) = (1-e^{-3})^{-1}\int_0^3 ue^{-u}du = \frac{4+2\cdot e^{\frac{3}{2}}}{2(e^{\frac{3}{2}}-1)} \simeq 1,86.$$

■

7. (Eg 54/2) Załóżmy, że niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, ..., X_n$ mają rozkłady wykładnicze o wartościach oczekiwanych równych $\mathbf{E}X_i = \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Wtedy prawdopodobieństwo $\mathbf{P}(X_1 = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\})$ jest równe
Odp: D-> $\frac{2}{n^2+n}$.

Rozwiązanie. Przypomnijmy, że $\min(X_2, ..., X_n)$ ma rozkład wykładniczy którego parametr jest sumą parametrów poszczególnych zmiennych to znaczy $Exp(2+3+...+n) = Exp(\frac{(n+1)n}{2} - 1)$. Nadto jeśli X, Y są niezależne z rozkładu $Exp(1)$, to $X_1 \sim X$, $\min(X_2, ..., X_n) \sim \frac{2}{n^2+n-2}Y$. Zatem

$$\mathbf{P}(X_1 = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}) = \mathbf{P}(X \leqslant \frac{2}{n^2+n-2}Y) = \mathbf{EP}(X \leqslant \frac{2}{n^2+n-2}Y|X) =$$
$$= \int_0^\infty e^{-\frac{n^2+n-2}{2}x}e^{-x}dx = \frac{2}{n^2+n}.$$

■

8. (Eg 56/3) Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \frac{2}{x^3} 1_{x \geqslant 1} 1_{1 \leqslant y \leqslant 2}.$$

Niech $S = X + Y$ i $V = X - Y$. Wtedy $\mathbf{P}(V < 1 | S = 4)$ jest równe
Odp: C-> $\frac{81}{125}$.

Rozwiązanie. Należy wyznaczyć rozkład $(V, S) = (X - Y, X + Y) = T(X, Y)$. Mamy $T^{-1}(V, S) = (\frac{1}{2}(S + V), \frac{1}{2}(S - V))$, $|DT^{-1}| = \frac{1}{2}$, stąd

$$f_{V,S}(v, s) = \frac{1}{2} f(\frac{s+v}{2}, \frac{s-v}{2}) = \frac{8}{(s+v)^3} 1_{s+v \geqslant 2} 1_{2 \leqslant s-v \leqslant 4}$$

Zatem

$$f_{S,V}(v|s = 2) = \frac{288}{5(4+v)^3} 1_{0 \leqslant v \leqslant 2}.$$

Pozostaje obliczyć

$$\mathbf{P}(V < 1 | S = 4) = \int_0^1 \frac{288}{5(4+v)^3} dv = \frac{81}{125}.$$

■

9. (Eg 57/5) Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładów o gęstościach $f_X(x) = 32x^2 e^{-4x} 1_{x>0}$, $f_Y(x) = 16xe^{-4x} 1_{x>0}$. Wtedy $\mathbf{E}(X - Y | X + Y = s)$ jest równa
Odp: C-> $\frac{1}{5}s$.

Rozwiązanie. W tym zadaniu szczęśliwie mamy te same parametry przy rozkładach gamma. Rozkład zmiennej X ma postać $\Gamma(3, 4)$ rozkład Y ma postać $\Gamma(2, 4)$. Możemy skorzystać z wiedzy, że rozkład X pod warunkiem $X + Y$ ma rozkład $Beta(3, 2)$ (niezależny od $X + Y$), natomiast rozkład Y ma rozkład $Beta(2, 3)$ (niezależny od $X + Y$). Przypomnijmy, że dla rozkładu $Beta(\alpha, \beta)$ wartość oczekiwana wynosi $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Zatem

$$\mathbf{E}(X - Y | X + Y = s) = s\mathbf{E}\frac{X}{X+Y} - s\mathbf{E}\frac{Y}{X+Y} = s(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}) = \frac{s}{5}.$$

■

10. (Eg 58/10) Niech $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(-1, 1)$. Wyznaczyć $\mathbf{E}(Z_1 + Z_2 + ... + Z_n | \max(Z_1, Z_2, ..., Z_n) = t)$, gdzie t jest ustaloną liczba z przedziału $(-1, 1)$)
Odp: E-> $\frac{(n+1)t-n+1}{2}$.

Rozwiązanie. Problem najpierw redukujemy do zmiennych $X_1, X_2, ..., X_n$ z rozkładu jednostajnego na $(0, 1)$ podstawieniem $Z_i = -1 + 2X_i$. Stąd

$$\mathbf{E}(Z_1 + ... + Z_n | \max(Z_1, ..., Z_n) = t) = -n + 2\mathbf{E}(X_1 + ... + X_n | \max(X_1, ..., X_n) = \frac{1+t}{2}).$$

Zauważmy, że $\max(X_1, ..., X_n)$ ma rozkład o gęstości $g(t) = nt^{n-1}$ Zatem szukamy funkcji borelowskiej $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$\mathbf{E}X_1 + ... + X_n 1_{\max(X_1,...,X_n) \in A} = \mathbf{E}F(\max(X_1, ..., Z_n)) 1_{\max(X_1,...,X_n) \in A} = \int_A F(t)g(t)dt.$$

Statystyki pozycyjne $X_{n:1}, ..., X_{n:n}$ mają rozkład jednostajny na sympleksie $\triangle_n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 ... \leqslant x_n \leqslant 1\}$ o gęstości $n! 1_{0 \leqslant x_1 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant 1}$. Obliczamy

$$\mathbf{E}X_1 + ... + X_n 1_{\max(X_1,...,X_n) \in A} = \mathbf{E}(X_{n:1} + ... + X_{n:n}) 1_{X_{n:n} \in A} =$$
$$= n! \int_{\triangle_n} (\sum_{i=1}^n x_i) 1_{x_n \in A} dx_1 ... dx_n = n! \int_A (\int_0^{x_n} ... \int_0^{x_2} \sum_{i=1}^n x_i dx_1 ... dx_{n-1}) dx_n.$$

Pozostaje zauważyć, że

$$\frac{(n-1)!}{x_n^{n-1}}\int_0^{x_n}...\int_0^{x_2}\sum_{i=1}^n x_i dx_1...dx_{n-1} = (x_n + (\frac{n-1}{2})x_n) = \frac{n+1}{2}x_n.$$

Stąd

$$\mathbf{E}X_1 + ... + X_n 1_{\max(X_1,...,X_n)\in A} = \int_A \frac{n(n+1)}{2}x_n^n dx_n = \int_A \frac{(n+1)}{2}tg(t)dt.$$

Czyli $F(s) = \frac{n+1}{2}s$. Podstawiając $s = \frac{1+t}{2}$ otrzymujemy

$$\mathbf{E}(Z_1 + ... + Z_n | \max(Z_1,...,Z_n) = t) = -n + 2\frac{n+1}{2}\frac{1+t}{2} = \frac{(n+1)t - n + 1}{2}.$$

■

11. (Eg 59/3) Zmienne losowe X_j, gdzie $j = 1,2,3,...$ są warunkowo niezależne pod warunkiem zmiennej Θ i mają rozkłady warunkowe o wartości oczekiwanej Θ i wariancji $4\Theta^2$. Zmienna losowa N pod warunkiem zmiennej losowej $\Lambda = \lambda$ ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ. Zmienne $(X_1, X_2, ...), N$ są niezależne. Zmienna Θ ma rozkład Gamma z parametrami $(100, 2)$, a zmienna Λ ma rozkład Gamma z parametrami $(2, 4)$. Zmienne Λ i Θ są niezależne. Wariancja zmiennej losowej

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i, \text{ dla } N > 0 \;\; S = 0 \text{ dla } N = 0$$

jest równa
Odp: E-> $6634,375$.

Rozwiązanie. Mamy do policzenia wariancje S_N. Najpierw wyznaczamy wartość oczekiwaną

$$\mathbf{E}S_N = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}(N=n)\mathbf{E}S_n = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}(N=n)\mathbf{E}\mathbf{E}(S_n|\theta) =$$
$$= \mathbf{E}N\mathbf{E}\Theta = \mathbf{E}\mathbf{E}(N\Lambda)\mathbf{E}\Theta = \mathbf{E}\Lambda\mathbf{E}\Theta = \frac{1}{2}\cdot 50 = 25.$$

Obliczamy

$$\mathbf{E}S_N^2 = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}(N=n)\mathbf{E}S_n^2 = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}(N=n)\mathbf{E}S_n^2 =$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}(N=n)\mathbf{E}\mathbf{E}(S_n^2|\theta) = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}(N=n)\mathbf{E}n\mathbf{Var}(X|\Theta) + n^2(\mathbf{E}(X|\Theta))^2 =$$
$$= 4\mathbf{E}N\mathbf{E}\Theta^2 + \mathbf{E}N^2\mathbf{E}\Theta^2 = 4\mathbf{E}\mathbf{E}(N\Lambda)\mathbf{E}\Theta^2 + \mathbf{E}\mathbf{E}(N^2|\Lambda)\mathbf{E}\Theta^2 =$$
$$= \mathbf{E}(\Lambda^2 + 5\Lambda)\mathbf{E}\Theta^2 = 7259,375.$$

Stąd $\mathbf{Var}S_n = 6634,375$.

■

12. (Eg 59/6) Niech A, B, C będą zdarzeniami losowymi spełniającymi warunki $\mathbf{P}(C\backslash B) > 0$ i $\mathbf{P}(B\backslash C) > 0$ i $\mathbf{P}(B\cap C) > 0$ i $\mathbf{P}(A|C\backslash B) > \mathbf{P}(A|B)$. Wtedy
Odp: B-> $\mathbf{P}(A|B\cup C) > \mathbf{P}(A|B)$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\mathbf{P}(A|B\cup B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap(B\cup C))}{\mathbf{P}(B\cup C)} = \frac{\mathbf{P}(A\cap B) + \mathbf{P}(A\cap(C\backslash B))}{\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C\backslash B)} =$$
$$\frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|C\backslash B)\mathbf{P}(C\backslash B)}{\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C\backslash B)} > \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(C\backslash B)}{\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(B\backslash C)} = \mathbf{P}(A|B).$$

■

13. (Eg 60/7) Wybieramy losowo i niezależnie dwa punkty z odcinka $[0, 2\pi]$ Traktując te dwa punkty jako punkty na okręgu o promieniu 1, obliczyć wartość oczekiwaną odległości między nimi (odległość mierzymy wzdłuż cięciwy).
Odp: B-> $\frac{4}{\pi}$.

Rozwiązanie. Jeden z punktów możemy ustalić. Wtedy wybór drugiego punktu to wybór kąta α tworzonego przez środek okręgu i dwa punktu. Długość cięciwy liczymy ze wzoru $2\sin\alpha/2$ gdzie α pochodzi z rozkładu jednostajnego na $[0, 2\pi]$. Zatem wartość oczekiwana ma postać

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\alpha}{2}d\alpha = \frac{4}{\pi}.$$

■

14. (Eg 61/8) Niech U i V będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, 1)$. Niech

$$Z = \frac{U^{\frac{1}{2}}}{U^{\frac{1}{2}} + V^4},$$

wtedy $\mathbf{E}(Z|U^{\frac{1}{2}} + V^4 < 1)$ jest równe ?
Odp: B-> $\frac{8}{9}$.

Rozwiązanie. Zadanie polega na umiejętnym wykorzystaniu rozkładu beta. Zauważmy najpierw, że zmienne $(X, Y) = (\frac{U^{\frac{1}{2}}}{U^{\frac{1}{2}}+V^4})$ powstają przez przekształcenie $T : (0, 1)^2 \to (0, 1) \times (0, 2)$ którego odwrotne ma postać $T^{-1}(X, Y) = ((XY)^2, ((1 - X)Y)^{\frac{1}{4}})$, a którego jakobian ma postać $|DT^{-1}(x, y)| = \frac{1}{2}xy^5(1 - x)^{-\frac{3}{4}}$. Stąd gęstość rozkładu (X, Y) ma postać

$$\frac{1}{2}xy^{\frac{5}{4}}(1 - x)^{-\frac{3}{4}}(1_{0<x<1}1_{0<y<1} + 1_{1-\frac{1}{y}<x<\frac{1}{y}}1_{1\leqslant y<2}).$$

Pozostaje obliczyć z rozkładu beta

$$\mathbf{P}(Y < 1) = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}xy^{\frac{5}{4}}(1 - x)^{-\frac{3}{4}}dxdy = \frac{2}{9}\frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(2 + \frac{1}{4})} = \frac{32}{45}.$$

Nadto ponownie z rozkładu beta

$$\mathbf{E}X1_{Y<1} = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}x^2(1 - x)^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{5}{4}}dxdy = \frac{2}{9}\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(3 + \frac{1}{4})} = \frac{256}{405}.$$

Stąd

$$\mathbf{E}(X|Y < 1) = \frac{45}{32}\cdot\frac{256}{405} = \frac{8}{9}.$$

■

15. (Eg 62/5) Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład prawdopodobieństwa o funkcji gęstości $f(x, y) = 8xy1_{0<y<x<1}$. Niech $U = X + Y$ i $V = X - Y$. Wtedy $E(V|U = \frac{4}{3})$ jest równa ?
Odp: D-> $\frac{7}{22}$.

Rozwiązanie. Obliczamy wspólny rozkład $(V, U) = T(X, Y)$. Przekształcenie odwrotne ma postać $T^{-1}(V, U) = (\frac{1}{2}(U + V), \frac{1}{2}(U - V))$, którego jakobian ma postać $|DT^{-1}| = \frac{1}{2}$. Zatem

$$f_{V,U}(v, u) = \frac{1}{2}f(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}) = 2(u^2 - v^2)1_{0<v<\min(u,2-u)}1_{0<u<2}.$$

Pozostaje wyznaczyć gęstość warunkową

$$f_{V,U}(v|u = \frac{4}{3}) = \frac{81}{88}(\frac{16}{9} - v^2)1_{0<v<\frac{2}{3}}.$$

Obliczamy

$$\mathbf{E}(V|U = \frac{4}{3}) = \int^{\frac{2}{3}0} \frac{81}{88} v(\frac{16}{9} - v^2) dv = \frac{7}{22}.$$

■