

Analiza matematyczna I (skrypt wykładu)

Wydział MIiM UW, 2010/11

wersja z dnia: 1 czerwca 2011

Spis treści

1	Liczby rzeczywiste	1
1.1	Aksjomatyka liczb rzeczywistych	1
1.1.1	Aksjomaty ciała przemienne	2
1.1.2	Aksjomaty porządku	2
1.1.3	Pojęcie kresu górnego i aksjomat ciągłości	4
1.1.4	Podzbiory \mathbb{R}	5
1.2	Liczby naturalne i zasada indukcji zupełnej	6
1.3	Pierwiastki n -tego stopnia	11
1.4	Liczby całkowite. Entier. Gęstość zbioru liczb wymiernych i niewymiernych	13
2	Ciągi. Pojęcie granicy ciągu.	17
2.1	Granica ciągu i jej podstawowe własności	18
2.2	Ciągi monotoniczne.	26
2.3	Granice niewłaściwe	27
2.4	Podciągi. Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa.	28
3	Funkcja wykładnicza i logarytm	33
3.1	Funkcja wykładnicza	33
3.2	Charakteryzacja funkcji wykładniczej	40
4	Szeregi. Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej.	42
4.1	Szeregi o wyrazach dodatnich	45
4.2	Interludium: zbieżność ciągów i szeregów zespolonych	52
4.3	Szeregi o wyrazach dowolnych	54
4.3.1	Zbieżność bezwzględna i warunkowa	54
4.3.2	Przekształcenie Abela	56
4.3.3	Mnożenie szeregów i twierdzenie Mertensa	58
4.4	Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej	61
4.5	Funkcje trygonometryczne	68
4.6	Liczba π	70
4.7	Wzór de Moivre’a	74
5	Funkcje ciągłe	77
5.1	Punkty skupienia. Granica funkcji.	77
5.2	Funkcje monotoniczne	84
5.3	Ciągłość funkcji	85
5.4	Ciągłość funkcji odwrotnej	90

5.4.1	Funkcje cyklotometryczne.	92
5.5	Jednostajna ciągłość	93
5.6	Zbiory zwarte	96
5.7	Funkcje wypukłe, I	98
6	Rachunek różniczkowy	106
6.1	Pojęcie pochodnej	106
6.1.1	Związek różniczkowalności z ciągłością	107
6.1.2	Interpretacja pochodnej funkcji zmiennej rzeczywistej	107
6.1.3	Arytmetyczne własności pochodnej	109
6.1.4	Pochodna złożenia i funkcji odwrotnej	110
6.2	Pochodne funkcji elementarnych	113
6.3	Najważniejsze własności funkcji różniczkowalnych	117
6.4	Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora	122
6.4.1	Definicja pochodnych wyższych rzędów	122
6.4.2	Wzór Taylora	124
6.4.3	Warunki dostateczne istnienia ekstremów lokalnych	131
6.4.4	Warunki dostateczne wypukłości. Punkty przegięcia.	133
6.5	Reguła de l'Hospitala	136
7	Zbieżność jednostajna	144
7.1	Definicje i przykłady	144
7.2	Najprostsze kryteria zbieżności jednostajnej	150
7.3	Twierdzenia Weierstrassa i Diniego	151
7.4	Twierdzenie o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych	155
7.4.1	Przypadek rzeczywisty	155
7.4.2	Przypadek zespolony	159
7.4.3	Istnienie funkcji pierwotnej	162
7.4.4	Inne przykłady	163
7.5	Twierdzenie Arzeli–Ascoliego	165
8	Szeregi potęgowe	169
8.1	Dygresja: granica górna i dolna	169
8.2	Promień zbieżności; ciągłość sumy szeregu potęgowego	170
8.3	Różniczkowalność sumy szeregu potęgowego	173
8.3.1	Pojęcie funkcji analitycznej	175
8.4	Przykłady	177
8.5	Twierdzenie Abela o granicach kątowych	180
8.6	Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy	184
9	Całka	186
9.1	Całka nieoznaczona	186
9.1.1	Własności całek nieoznaczonych	188
9.1.2	Całkowanie funkcji wymiernych	190
9.1.3	Podstawienia Eulera, podstawienia trygonometryczne	195
9.2	Całka Newtona	198
9.2.1	Całka Newtona a zbieżność jednostajna	203

9.2.2	Wzór Wallisa i wzór Stirlinga	204
9.2.3	Niewymierność liczby π . Informacje o liczbach przestępnych.	208
9.2.4	Wzór Taylora z resztą w postaci całkowej	214
9.3	Całka Riemanna	215
9.4	Geometryczne zastosowania całki	220
9.4.1	Długość krzywej	220
9.4.2	Objętość bryły obrotowej. Pole powierzchni obrotowej	224
10	Całki niewłaściwe. Funkcje Γ i B Eulera oraz ich zastosowania	227
10.1	Całka niewłaściwa	227
10.2	Funkcje Γ i B	238
10.3	Wzór iloczynowy Weierstrassa i kilka innych własności funkcji Γ	245
10.4	Rozwinięcie cotangensa w szereg ułamków prostych	252
11	Zakończenie: eliptyczność orbit	257
A	Dygresje: dodatkowy materiał, omawiany na wykładzie	260
A.1	Twierdzenie Stolza	260
A.2	Zasadnicze twierdzenie algebry	263
A.3	Metoda stycznych (Newtona)	267

Zamiast wstępu

1. Ten tekst jest *w budowie*. Mogą w nim być różne błędy, zarówno literówki, jak i poważniejsze usterki. Mogą stopniowo pojawiać się pewne (niezbyt wielkie) zmiany układu treści. Wszelkie uwagi Czytelników (w tym sugestie, co zmienić, gdzie warto napisać dokładniejsze wyjaśnienie, gdzie umieścić rysunek itp.) są mile widziane, z góry za nie dziękuję.
2. Kolejne partie tekstu będę starał się publikować na bieżąco, mniej więcej raz w tygodniu, na stronie

<http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/analiza/>

(w zakładce z notatkami).

Rozdział 1

Liczby rzeczywiste

Czym zajmuje się Analiza Matematyczna?

Jedną z możliwych ogólnych odpowiedzi na to pytanie jest następująca: badaniem odpowiednio regularnych funkcji, określonych zwykle na podzbiorach przestrzeni wektorowych¹. Do najważniejszych zagadnień w Analizie należą zatem:

- sposoby definiowania tych funkcji oraz opis ich własności;
- badanie różnych typów procesów, które wiążą się z matematycznym opisem ciągłych zmian (przejścia graniczne, różniczkowanie, całkowanie);
- badanie wielu zastosowań powyższej teorii w innych obszarach, np. w geometrii, fizyce, ekonomii, biologii.

W najprostszym przypadku chodzi o funkcje jednej zmiennej rzeczywistej. Podczas pierwszego roku studiów matematycznych praktycznie nie będziemy się stykać z istotnie bardziej zaawansowanymi działami Analizy.

A jak powstaje typowa teoria matematyczna?

We współczesnej matematyce typowa teoria ma budowę aksjomatyczną. To znaczy, że wprowadzamy pewne *pojęcia pierwotne*, których nie definiujemy; zakładamy natomiast, że między tymi pojęciami zachodzą pewne określone związki, wyrażone za pomocą *aksjomatów* (inaczej nazywanych *pewnikami*). Na tej podstawie budujemy resztę teorii.

Ponieważ mamy zajmować się funkcjami zmiennej rzeczywistej, więc rozpoczniemy cały wykład od podania pojęć pierwotnych i aksjomatów teorii liczb rzeczywistych, oraz omówienia ich najważniejszych konsekwencji.

1.1 Aksjomatyka liczb rzeczywistych

Pojęcia pierwotne teorii liczb rzeczywistych są następujące: dany jest *zbiór liczb rzeczywistych* \mathbb{R} z dwoma wyróżnionymi elementami, 0 i 1 (przy czym $0 \neq 1$), *relacja nierówności* $<$, oraz dwa działania, *dodawanie* i *mnożenie*, przypisujące każdej parze liczb $x, y \in \mathbb{R}$ ich *sumę* $x + y$ oraz *iloczyn* $x \cdot y = xy$.

¹Z pojęciem przestrzeni wektorowej Czytelnik tych notatek zetknie się na wykładach Geometrii z Algebrą Liniową.

Uwaga. Czytelnik, jeśli tylko chce, może sobie wyobrażać jako \mathbb{R} zbiór punktów osi liczbowej, o której uczono go w szkole. Relacja nierówności, zero i jedynka, suma i iloczyn też nieprzypadkowo są oznaczane tak, jak w szkole. Zamiast mówić *liczba* $x \in \mathbb{R}$, będziemy czasem mówić *punkt* $x \in \mathbb{R}$

Aksjomaty teorii liczb rzeczywistych wygodnie jest podzielić na trzy grupy: aksjomaty ciała przemiennego, aksjomaty porządku, oraz aksjomat ciągłości.

1.1.1 Aksjomaty ciała przemiennego

Pierwsza grupa aksjomatów orzeka, że liczby rzeczywiste tworzą *ciało przemienne*. Chodzi o opis kluczowych własności dodawania i mnożenia.

Oto własności dodawania:

A.1 (Przemienność dodawania). Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $x + y = y + x$.

A.2 (Łączność dodawania). Dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A.3 (Charakteryzacja zera). Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest $x + 0 = x$.

A.4 (Istnienie elementów przeciwnych). Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje element $-x \in \mathbb{R}$, taki, że $x + (-x) = 0$.

Mnożenie ma podobną listę własności:

A.5 (Przemienność mnożenia). Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $xy = yx$.

A.6 (Łączność mnożenia). Dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(xy)z = x(yz)$.

A.7 (Charakteryzacja jedynki). Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest $x \cdot 1 = x$.

A.8 (Istnienie elementów odwrotnych). Dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, istnieje element $x^{-1} \in \mathbb{R}$, taki, że $x \cdot x^{-1} = 1$.

Ostatni aksjomat z tej grupy mówi o tym, jaki jest związek dodawania z mnożeniem.

A.9 (Rozdzielność mnożenia względem dodawania). Dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $x(y + z) = xy + xz$.

1.1.2 Aksjomaty porządku

N.1 (Prawo trichotomii). Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi *dokładnie jedna* z trzech możliwości:

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x.$$

N.2 (Przechodność). Dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$, jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$.

N.3 (Związki nierówności z działaniami). Dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$:

(a) jeśli $x < y$, to $x + z < y + z$;

(b) jeśli $x < y$ i $0 < z$, to $xz < yz$.

Z tych dwóch grup aksjomatów można wyprowadzić wszystkie szkolne reguły arytmetyki, definiując po drodze dwa pozostałe działania, odejmowanie i dzielenie (przez liczbę różną od zera). Są wśród tych reguł m.in. następujące:

(W1) Elementy przeciwne i odwrotne są określone jednoznacznie. Ponadto, $-(-x) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, a $(x^{-1})^{-1} = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

(W2) Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden element $x \in \mathbb{R}$ taki, że $a + x = b$.

(W3) Jeśli $xy = x$ i $x \neq 0$, to $y = 1$.

(W4) Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ z równości $xy = 0$ wynika, że $x = 0$ lub $y = 0$.

(W5) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $x \cdot 0 = 0$.

(W6) Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, istnieje dokładnie jeden element $x \in \mathbb{R}$ taki, że $ax = b$.

(W7) Dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b zachodzą równości $(-a)b = a(-b) = -ab$.

(W8) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $0 \leq x^2$; przy tym $x^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. W szczególności,

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$$

Uwaga notacyjna. Czytelnik zauważył może, że w ostatniej własności pojawił się symbol \leq , dotychczas niezdefiniowany, ani nie wymieniony wśród pojęć pierwotnych. Zgodnie z naturalnym oczekiwaniem, przyjmujemy dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b , że

(i) $a \leq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$ lub $a < b$;

(ii) $a \geq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \leq a$;

(iii) $a > b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b < a$.

Dla przykładu przeprowadzimy

Dowód własności (W5). Ustalmy dowolną liczbę $x \in \mathbb{R}$. Z aksjomatu A.3 wynika, że $1+0 = 1$. Mnożąc obie strony przez x i stosując wskazane aksjomaty, otrzymujemy

$$x \stackrel{\text{A.7}}{=} x \cdot 1 = x(1+0) \stackrel{\text{A.9}}{=} x \cdot 1 + x \cdot 0 \stackrel{\text{A.7}}{=} x + x \cdot 0, \quad (1.1)$$

a zatem

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &\stackrel{\text{A.3}}{=} x \cdot 0 + 0 \stackrel{\text{A.4}}{=} x \cdot 0 + (x + (-x)) \stackrel{\text{A.1 i A.2}}{=} x + x \cdot 0 + (-x) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} x + (-x) \quad (\text{wiemy już, patrz (1.1), że } x + x \cdot 0 = x) \\ &\stackrel{\text{A.4}}{=} 0, \end{aligned}$$

co było do udowodnienia. \square

Nie będziemy przeprowadzać dowodów wszystkich własności z listy (W1)–(W8). Dowody nie są zbyt skomplikowane, a treść tych własności powinna być Czytelnikowi dobrze

znana. Przykładowe dowody takich własności pojawią się na ćwiczeniach. Podkreślmy inną rzecz: warto i należy zdawać sobie sprawę, że podana lista aksjomatów A.1–A.9 i N.1–N.3, wystarcza, by wyprowadzić z niej *wszystkie* pozostałe reguły arytmetyki, zdefiniowawszy wcześniej odejmowanie $x - y := x + (-y)$ i dzielenie $x/y := x \cdot y^{-1}$ dla $y \neq 0$. To oznacza, że reguły z listy (W1)–(W8) czy np. szkolne prawo rozdzielności dzielenia względem odejmowania nie są już, jak aksjomaty, kwestią umowy, a tym bardziej opinii nauczyciela, zapisanej w kolorowych ramkach. Są *konieczną* konsekwencją aksjomatów.

1.1.3 Pojęcie kresu górnego i aksjomat ciągłości

Ostatni aksjomat, który jest nam potrzebny, ma inny charakter od aksjomatów ciała i porządku. Dotyczy nie pojedynczych liczb rzeczywistych, ani ich par czy trójek, tylko podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych. Sformułowanie tego aksjomatu poprzedzimy definicjami ograniczenia górnego i kresu górnego.

Definicja 1.1. Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest ograniczeniem górnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in A$ jest $x \leq M$.

Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, gdy ma choć jedno ograniczenie górne. Na przykład przedział domknięty $[0, 1]$ jest ograniczony z góry. Jego ograniczeniami górnymi są m.in. liczby 1, 10, 2010 i 2010^{2010} .

Definicja 1.2. Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

- (i) M jest ograniczeniem górnym A ,
- (ii) jeśli M' jest ograniczeniem górnym A , to $M \leq M'$.

Kres górny zbioru oznaczamy symbolem ‘sup’ (od łacińskiego *supremum*) i piszemy $M = \sup A$. Definicję kresu górnego niepustego zbioru liczb rzeczywistych można sformułować na inne, równoważne sposoby:

- $M = \sup A$ wtedy i tylko wtedy, gdy M jest *najmniejszym* ograniczeniem górnym zbioru A ;
- $M = \sup A$ wtedy i tylko wtedy, gdy M jest ograniczeniem górnym zbioru A i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $x \in A$ taki, że $M - \varepsilon < x$.

Sprawdzenie równoważności tych definicji pozostawiamy jako proste ćwiczenie. Podobnie, łatwo jest sprawdzić, posługując się tylko definicją, że

$$\sup\{a\} = a \quad \text{dla każdego } a \in \mathbb{R}, \quad \sup([a, b]) = b \quad \text{dla wszystkich } a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Teraz możemy już sformułować zapowiadany aksjomat ciągłości.

Aksjomat ciągłości (Dedekinda). *Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny $M = \sup A \in \mathbb{R}$.*

Uwaga. Analogicznie do ograniczenia górnego i kresu górnego definiuje się ograniczenie dolne zbioru liczb i kres dolny niepustego zbioru liczb $A \subset \mathbb{R}$. Kres dolny oznaczamy symbolem ‘inf’, od łacińskiego *infimum*. Liczba $\inf A$ jest największym ograniczeniem dolnym niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$. Sformułowanie ścisłych definicji pozostawiamy jako ćwiczenie.

Zbiór, który ma ograniczenie dolne, nazywa się ograniczony z dołu. Mówimy, że zbiór jest ograniczony, gdy jest ograniczony z góry i z dołu.

Wygodnie jest przyjąć następującą dodatkową umowę, która w wielu sytuacjach jest naturalna: $\sup A = +\infty$, gdy A nie jest ograniczony z góry, oraz $\inf A = -\infty$, gdy A nie jest ograniczony z dołu. Ponadto,

$$\sup \emptyset = -\infty, \quad \inf \emptyset = +\infty,$$

gdzie symbol \emptyset oznacza zbiór pusty.

1.1.4 Podzbiory \mathbb{R}

Wielokrotnie będziemy spotykać następujące podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, składających dobrze Czytelnikowi znane: zbiór *liczb naturalnych*,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\},$$

zbiór *liczb całkowitych*²,

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

oraz zbiór *liczb wymiernych*

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$

O kluczowych własnościach zbioru \mathbb{N} i jednym z możliwych sposobów aksjomatycznego wprowadzenia tego zbioru opowiemy w następnym podrozdziale. Teraz sformułujemy twierdzenie, z którego wynika, że zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} jest istotnie mniejszy, niż zbiór liczb rzeczywistych. Zbiór \mathbb{Q} , z naturalnymi działaniami “na ułamkach” i szkolną relacją mniejszości, spełnia wprawdzie (jak nietrudno sprawdzić, choć nie jest to zajęcie szczególnie pasjonujące) wszystkie aksjomaty ciała i porządku. Jednak \mathbb{Q} nie spełnia aksjomatu ciągłości: nie każdy ograniczony z góry zbiór liczb wymiernych ma kres górny, który jest liczbą wymierną.

Twierdzenie 1.3. *Zbiór liczb niewymiernych, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, jest niepusty.*

Dowód podamy już teraz, choć niektóre występujące w nim liczby nie zostały jeszcze w sposób ścisły zdefiniowane. Czytelnik zna je jednak pewnie ze szkoły, a ich ścisłe określenia pozna w ciągu najbliższych tygodni na wykładzie.

Dowód 1. Wykażemy, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną. Przypuśćmy na chwilę, że jest przeciwnie i $\sqrt{2} = p/q$, gdzie p i q są całkowite, $q \neq 0$. Ponieważ $\sqrt{2}$ jest dodatni, więc możemy bez zmniejszenia ogólności założyć, że p i q są liczbami naturalnymi. Możemy także założyć, w razie potrzeby skracając licznik i mianownik ułamka p/q , że p i q są względnie pierwsze, tzn. nie mają żadnego wspólnego dzielnika większego niż 1.

Jeśli $\sqrt{2} = p/q$, to $2 = p^2/q^2$, a więc $2q^2 = p^2$. Liczby p^2 i $2q^2$, zapisane w systemie dziesiętkowym, muszą więc mieć tę samą ostatnią cyfrę. Zbadajmy, jakie są wszystkie możliwości, wypisując ostatnią cyfrę każdej z liczb q , q^2 i $2q^2$ w tabelce:

²Symbol \mathbb{Z} , na ogół nie używany w polskiej szkole, za to powszechnie używany przez matematyków na całym świecie, pochodzi od niemieckiego słowa *Zahlen*, liczby.

$q \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q^2 \pmod{10}$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$2q^2 \pmod{10}$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

(Symbol $k \pmod{10}$ oznacza resztę z dzielenia k przez 10, czyli właśnie ostatnią cyfrę liczby k w zapisie dziesiętnym. Każdy, kto zna szkolny algorytm mnożenia pisemnego, może sam sprawdzić, dlaczego tabelka jest taka, a nie inna).

Ale ostatnia cyfra liczby p^2 musi być jedną z cyfr środkowego wiersza tej tabelki. I musi być taka sama, jak ostatnia cyfra $2q^2$. Jedyna możliwość to

$$p^2 \equiv 2q^2 \equiv 0 \pmod{10}.$$

Nietrudno jednak stwierdzić, że wtedy zarówno p , jak i q , dzielą się przez 5. Jest to sprzeczność, gdyż wiemy, że p i q nie mają wspólnych dzielników większych od 1. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $\sqrt{2}$ nie może być liczbą wymierną, co kończy dowód. \square

Dowód³ 2. Początek rozumowania jest taki sam, jak w pierwszym dowodzie. Zakładamy, że $\sqrt{2} = p/q$ jest liczbą wymierną, gdzie p i q są naturalne i nie mają wspólnych dzielników większych od 1.

Jak wcześniej, z równości $\sqrt{2} = p/q$ wynika, że $2q^2 = p^2$. Dalszy ciąg rozumowania jest nieco inny. Lewa strona tej równości jest parzysta, więc prawa też. Skoro p^2 jest liczbą parzystą, to i p jest parzyste (gdyby bowiem p było nieparzyste, to p^2 także byłoby nieparzyste: przecież jeśli $p = 2k + 1$, to $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$). Zatem $p = 2k$ dla pewnego k naturalnego. W takim razie,

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

to zaś oznacza, że $q^2 = 2k^2$. Liczba q^2 jest więc parzysta. Zatem q jest liczbą parzystą, $q = 2l$ dla pewnego l naturalnego. Stwierdziliśmy więc, że p i q dzielą się przez 2, a to jest sprzeczność. Sprzeczność wzięła się z założenia, że $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, więc ostatecznie $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. \square

Dowód 3. Wykażemy, że liczba $x = \log 2$ (gdzie logarytm bierzemy przy podstawie 10), czyli taka liczba dodatnia x , która spełnia równość $10^x = 2$, nie jest wymierna.⁴

Przypuśćmy, że $x = \log 2 = p/q$, gdzie p i q są naturalne. Wtedy $10^{p/q} = 2$. Podnosząc obie strony do potęgi q , dostaniemy $10^p = 2^q$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{N}$. To jednak jest oczywista sprzeczność, gdyż jedna z tych liczb dzieli się przez 5, a druga nie.

1.2 Liczby naturalne i zasada indukcji zupełnej

Niech A będzie rodziną wszystkich takich podzbiorów $A \subset \mathbb{R}$, które spełniają jednocześnie dwa warunki:

1. $1 \in A$;
2. Jeśli liczba rzeczywista $x \in A$, to $x + 1 \in A$.

³W pradawnych czasach Rzeczypospolitej Drugiej i Pół ten dowód poznawali wszyscy uczniowie ósmej klasy szkoły podstawowej.

⁴Czytelnik być może uczył się o logarytmach w szkole; za kilka tygodni zobaczymy, jak zdefiniować logarytm w sposób ścisły.

Nietrudno sprawdzić, że np. zbiór wszystkich liczb rzeczywistych \mathbb{R} , a także zbiór \mathbb{R}_+ , należą do rodziny \mathcal{A} . Nietrudno sobie także wyobrazić wiele – nieskończenie wiele! – innych zbiorów, należących do tej rodziny: bierzemy liczbę 1 i dowolną “chmurkę” punktów z przedziału $(1, 2)$, a następnie tworzymy sumę przesuniętych kopii takiego zbioru. Innymi słowy, bierzemy zbiór

$$B \subset [1, 2) \quad \text{taki, że } 1 \in B,$$

i kładziemy

$$A = B \cup (1 + B) \cup (2 + B) \cup \dots,$$

gdzie $k + B = \{k + x : x \in B\}$.

Znany skądinąd zbiór liczb naturalnych można, uprawiając aksjomatyczną teorię liczb rzeczywistych, określić następująco.

Definicja 1.4. $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ dla każdego zbioru } A \in \mathcal{A}\}$.

Inaczej mówiąc, zbiór liczb naturalnych to część wspólna wszystkich zbiorów należących do rodziny \mathcal{A} .

Stwierdzenie 1.5. *Zbiór \mathbb{N} nie jest ograniczony z góry.*

Dowód. Liczba $1 \in \mathbb{N}$, więc \mathbb{N} jest niepusty. Postawmy hipotezę, przeczącą tezie, tzn. przypuśćmy, że \mathbb{N} jest ograniczony z góry. Zgodnie z aksjomatem ciągłości, zbiór \mathbb{N} ma wtedy kres górny $b = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.

Z definicji kresu, $b \geq n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Z drugiej własności wszystkich zbiorów rodziny \mathcal{A} wynika, że $b \geq n + 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Stąd jednak $b - 1 \geq n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc $b - 1$ jest ograniczeniem górnym \mathbb{N} . Ponownie korzystając z definicji kresu górnego – z drugiejgo podanego w niej warunku – stwierdzamy, że

$$b - 1 \geq \sup \mathbb{N} = b,$$

a zatem $-1 \geq 0$, czyli $0 \geq 1$. To jest sprzeczność, więc przyjęta hipoteza musiała być fałszywa. Zbiór \mathbb{N} nie jest zatem ograniczony z góry. \square

Wniosek 1.6 (aksjomat Archimedesesa). *Dla dowolnych liczb dodatnich $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje taka liczba naturalna n , że $an > b$.*

Dowód. Gdyby $an \leq b$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to liczba b/a byłaby ograniczeniem górnym \mathbb{N} . Wiemy już jednak, że zbiór \mathbb{N} nie jest ograniczony z góry. \square

Omówimy teraz ważną metodę dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych, tak zwaną zasadę indukcji matematycznej (zwaną także zasadą indukcji zupełnej).

Twierdzenie 1.7. *Przypuśćmy, że pewna własność W przysługuje pewnym liczbom naturalnym, przy czym spełnione są dwa warunki:*

(i) $W(1)$, tzn. własność W przysługuje liczbie 1;

(ii) Jeśli $W(n)$, to także $W(n + 1)$.

Wówczas własność W przysługuje wszystkim liczbom naturalnym.

Dowód. Niech A będzie zbiorem wszystkich tych liczb naturalnych, którym przysługuje własność W , tzn.

$$A = \{n \in \mathbb{N} : W(n)\}.$$

Oczywiście $A \subset \mathbb{N}$. Pokażemy teraz, że A należy do rodziny \mathcal{A} .

Z założenia (i) mamy $1 \in A$, tzn. spełniony jest pierwszy z warunków z definicji rodziny \mathcal{A} . Ponadto, jeśli $x \in A$, to zachodzi $W(x)$, więc na mocy założenia (ii) zachodzi także $W(x+1)$, a to znaczy, że $x+1 \in A$. Spełniony jest więc również drugi warunek z definicji rodziny \mathcal{A} .

Zatem $A \in \mathcal{A}$. Ponieważ \mathbb{N} jest częścią wspólną wszystkich zbiorów rodziny \mathcal{A} , więc $\mathbb{N} \subset A$.

Otrzymaliśmy więc dwie inkluzje: $A \subset \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \subset A$. To oznacza, że $A = \mathbb{N}$. \square

Spójrzmy teraz na przykłady zastosowań zasady indukcji zupełnej w konkretnych dowodach. Pierwszy z nich będzie bardzo prosty, dwa pozostałe – wyraźnie trudniejsze.

Stwierdzenie 1.8 (nierówność Bernoulliego). *Dla każdej liczby rzeczywistej $a \geq -1$ i dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność*

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Dowód. Ustalmy dowolne $a \geq -1$.

Etap 1 (baza indukcji). Sprawdzamy, co się dzieje dla $n = 1$. Zarówno lewa, jak i prawa strona są wtedy równe $1+a$, więc nierówność Bernoulliego zachodzi dla $n = 1$.

Etap 2 (krok indukcyjny). Załóżmy, że $(1+a)^n \geq 1+na$. Wykażemy, że wtedy $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.

Z aksjomatu N.3(b) i własności $x \cdot 0 = 0$ wynika, że obie strony nierówności nieostrej wolno pomnożyć przez liczbę nieujemną. Ponieważ $1+a \geq 0$, więc z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) &\geq (1+na)(1+a) \\ &= 1+na+a+na^2 \\ &\geq 1+na+a \quad \text{gdyż } na^2 \geq 0 \text{ dla wszystkich } n \text{ i } a \\ &= 1+(n+1)a. \end{aligned}$$

Etap 3 (konkluzja). Stwierdziliśmy, że nierówność Bernoulliego zachodzi dla liczby $n = 1$, a także, że jeśli zachodzi dla liczby n , to zachodzi i dla $n+1$. Zatem, zgodnie z zasadą indukcji zupełnej, nierówność Bernoulli'ego zachodzi dla każdej liczby naturalnej n . Teza stwierdzenia wynika z dowolności $a \geq -1$. \square

Uwaga. Proszę sprawdzić, że równość w nierówności Bernoulliego zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$ lub $a = 0$.

Dla potrzeb drugiego przykładu zdefiniujemy najpierw średnią arytmetyczną i geometryczną n liczb rzeczywistych nieujemnych. Jeśli $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, to kładziemy

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}.$$

A_n to *średnia arytmetyczna* liczb a_1, \dots, a_n (tu założenie o nieujemności nie jest potrzebne; definicja średniej arytmetycznej ma sens dla dowolnych liczb rzeczywistych, niekoniecznie nieujemnych), natomiast G_n jest *średnią geometryczną* liczb nieujemnych a_1, \dots, a_n .

(Pierwiastki dowolnego stopnia z liczb nieujemnych zdefiniujemy ściśle po omówieniu przykładów dowodów indukcyjnych. Teraz wystarczy nam wiedza, że $\sqrt[n]{0} = 0$, a dla $x > 0$ liczba $y = \sqrt[n]{x}$ jest dodatnia i ma tę własność, że $y^n = x$).

Twierdzenie 1.9 (nierówność między średnimi). *Dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a_1, a_2, \dots, a_n zachodzi nierówność*

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} = G_n.$$

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek nietrywialny, gdy wszystkie a_i są dodatnie. (Gdy choćby jedna z liczb a_i jest zerem, to oczywiście $G_n = 0 \leq A_n$).

Baza indukcji. Dla $n = 1$ mamy jedną liczbę nieujemną a_1 . Teza jest prawdziwa, gdyż wtedy $A_1 = a_1 = G_1$.

Krok indukcyjny. Załóżmy, że dla pewnego m naturalnego nierówność

$$\frac{b_1 + \dots + b_m}{m} \geq (b_1 \dots b_m)^{1/m}$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich b_1, b_2, \dots, b_m . Wykażemy, że przy takim założeniu dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$ jest $A_{m+1} \geq G_{m+1}$.

Będziemy dowodzić równoważnej nierówności $A_{m+1}^{m+1} \geq G_{m+1}^{m+1}$. Skorzystamy z nierówności Bernoulliego, ale nie zrobimy tego od razu.

Z uwagi na przemienność dodawania i mnożenia mamy prawo założyć, że $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \leq a_{m+1}$. Wtedy, ponieważ średnia arytmetyczna m składników nie przekracza największego z tych składników, mamy

$$A_m = \frac{a_1 + \dots + a_m}{m} \leq \frac{m a_m}{m} = a_m \leq a_{m+1}. \quad (1.2)$$

Zapiszmy teraz średnią A_{m+1} w nieco innej postaci:

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= \frac{m A_m + a_{m+1}}{m+1} \\ &= A_m + \frac{a_{m+1} - A_m}{m+1}, \quad \text{gdź } \frac{m}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1}, \\ &= A_m \left(1 + \underbrace{\frac{a_{m+1} - A_m}{(m+1)A_m}}_a \right) \end{aligned}$$

(wypisując ostatnią liniijkę, po prostu wyłączyliśmy A_m przed nawias).

Z nierówności (1.2) wynika, że

$$a = \frac{a_{m+1} - A_m}{(m+1)A_m} \geq 0 \geq -1,$$

a to znaczy, że nierówność Bernoulliego można stosować do szacowania potęg sumy $(1+a)$ z dołu. Piszemy teraz

$$\begin{aligned}
 A_{m+1}^{m+1} &\geq A_m^{m+1}(1+a)^{m+1} \\
 &\geq A_m^{m+1}(1+(m+1)a) \quad (\text{tu użyliśmy nierówności Bernoulliego}) \\
 &= A_m^{m+1} \left(1 + \frac{a_{m+1} - A_m}{A_m} \right) = A_m^m a_{m+1} \\
 &\geq G_m^m a_{m+1} \quad (\text{tu użyliśmy założenia indukcyjnego}) \\
 &= (a_1 a_2 \dots a_m) a_{m+1} = G_{m+1}^{m+1}.
 \end{aligned}$$

Zatem, $A_{m+1} \geq G_{m+1}$. Stąd, na mocy zasady indukcji zupełnej, wynika już teza twierdzenia. \square

Uwaga. Czytelnik może się zastanawiać: skąd było wiadomo, że aby wykazać nierówność między średnimi, trzeba rozumować akurat tak? Na takie pytania często nie ma łatwych odpowiedzi. Tu akurat można było zauważyć, że dla dużych $a_1 = a_2 = \dots$ lewa strona nierówności $A_m^m \geq G_m^m$ rośnie wykładniczo wraz z m i *spróbować* szacowania (z dołu) czegoś rosnącego wykładniczo przez coś, co rośnie zaledwie liniowo – do tego służy nierówność Bernoulliego. Reszta powyższego dowodu polega na stosunkowo prostych przekształceniach, potrzebnych, by A_{m+1}^{m+1} przekształcić do odpowiedniej postaci.

Podamy teraz drugi dowód nierówności między średnimi, po to, żeby zilustrować, że rozumowania indukcyjne mogą mieć bardzo różny charakter. Dla zobrazowania zasady indukcji zupełnej używa się często porównania z kostkami domina: jeśli wiadomo, że kostki domina są ustawione w rzędzie, na tyle blisko, że każda z nich, upadając, przewróci następną, to przewrócenie pierwszej kostki spowoduje przewrócenie wszystkich. W następnym dowodzie ustawienie kostek będzie bardzo fantazyjne: takie, że dla każdego n kostka n -ta przewraca kostkę o numerze $2n$, a kostka k -ta przewraca kostkę z numerem $(k-1)$.

Dowód. Jak wcześniej, założymy, że wszystkie a_i są dodatnie. Dowód ma trzy części.

Po pierwsze, sprawdzamy, że $A_1 \geq G_1$ (to oczywiste) i $A_2 \geq G_2$. Druga nierówność jest równoważna innej, $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$.

Po drugie, wykażemy, że jeśli nierówność między średnimi zachodzi dla dowolnych liczb $b_1, \dots, b_n > 0$, to zachodzi także dla dowolnych liczb $a_1, \dots, a_{2n} > 0$. Istotnie, korzystając najpierw (dwukrotnie) z nierówności między średnimi dla n liczb, a potem z nierówności $A_2 \geq G_2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 A_{2n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n} \right) \\
 &\geq \frac{(a_1 \dots a_n)^{1/n} + (a_{n+1} \dots a_{2n})^{1/n}}{2} \\
 &\geq \sqrt{(a_1 \dots a_n)^{1/n} (a_{n+1} \dots a_{2n})^{1/n}} \\
 &= G_{2n}.
 \end{aligned}$$

(Komentarz: teraz wiemy, że nierówność między średnimi zachodzi dla n liczb, gdy $n \in \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$. Te wartości n stanowią *zdobyte przyczółki*.)

Po trzecie, dowodzimy, że jeśli nierówność między średnimi zachodzi dla $n + 1$ liczb dodatnich, to zachodzi także dla n liczb dodatnich. Piszemy

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{n}{n+1}A_n + \frac{1}{n+1}A_n \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + A_n}{n+1} && \text{w liczniku jest } n+1 \text{ liczb} \\ &\geq \frac{(a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot A_n)^{1/(n+1)}}{n+1}, && \text{z nierówności dla } n+1 \text{ liczb,} \\ &= G_n^{n/(n+1)} A_n^{1/n+1}. \end{aligned}$$

Dzielimy obie strony przez $A_n^{1/n+1}$, podnosimy do potęgi $(n+1)$ i otrzymujemy $A_n^n \geq G_n^n$.

(Komentarz: teraz wiemy, że z każdego zdobytego wcześniej przyczołka, tzn. od każdej z wartości $n = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$, można cofać się jednostkowymi krokami.)

Z trzech części dowodu wynika już teza twierdzenia. \square

Zadanie 1.10. Analizując wybrany dowód nierówności między średnimi, wykazać, że $A_n = G_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$ lub $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

1.3 Pierwiastki n -tego stopnia

Posługiwaliśmy się już pierwiastkami n -tego stopnia z liczb nieujemnych. Aby mieć pewność, że wolno było tak postępować, udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.11. Dla każdej liczby $a \geq 0$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba $b \geq 0$ taka, że $b^n = a$.

Dowód twierdzenia poprzedzimy sformulowaniem pomocniczego faktu.

Lemat 1.12 (wzór na różnicę n -tych potęg). Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ i wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}). \quad (1.3)$$

SZKIC DOWODU. To jest nieznacznie przekształcony wzór na sumę skończonego postępu geometrycznego. Gdy $y = 0$, nie ma czego dowodzić; obie strony są równe x^n . Jeśli $y \neq 0$, to dzieląc obie strony (1.3) przez y^n i kładąc $q = x/y$, otrzymujemy równoważny tezie lematu wzór

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + 1).$$

Nietrudno jest udowodnić go przez indukcję. Można także po prostu “otworzyć nawiasy” i zaobserwować, że prawa strona jest równa

$$q^n + \underbrace{(-q^{n-1}) + q^{n-1}}_{=0} + \underbrace{(-q^{n-2}) + q^{n-2}}_{=0} + \dots + \underbrace{(-q) + q}_{=0} - 1,$$

czyli po prostu $q^n - 1$, gdyż każda ze wskazanych par składników ma sumę zero.

DOWÓD TWIERDZENIA 1.11. Zaczniemy od wykazania jednoznaczności pierwiastków n -tego stopnia. Gdyby dla pewnego $a \geq 0$ było $b^n = b_1^n = a$, gdzie $b, b_1 \geq 0$, to byłoby wtedy

$$0 = b^n - b_1^n = (b - b_1) \underbrace{(b^{n-1} + b^{n-2}b_1 + \dots + b_1^{n-1})}_{=(\text{ozn.}) M}$$

Zatem, $b - b_1 = 0$ lub $M = 0$ (jeden z czynników musi zniknąć). W pierwszym przypadku mamy $b = b_1$. W drugim przypadku, ponieważ $b, b_1 \geq 0$, liczba M jest sumą n nieujemnych składników. Równość $M = 0$ może zachodzić jedynie wtedy, gdy każdy z tych składników jest zerem, czyli jedynie wtedy, gdy $b = b_1 = 0$.

W obu przypadkach mamy więc $b = b_1$. Dla każdego $a \geq 0$ istnieje zatem *co najwyżej jedna* liczba $b \geq 0$ taka, że $b^n = a$.

Teraz zajmiemy się istnieniem. Dla $a = 1$ wystarczy wziąć $b = 1$, a dla $a = 0 - b = 0$. Jeśli już udowodnimy twierdzenie dla wszystkich liczb $a > 1$, to dla $a \in (0, 1)$ będzie można postąpić następująco: jeśli $a \in (0, 1)$, to $a^{-1} > 1$, więc istnieje pierwiastek n -tego stopnia z a^{-1} , tzn. liczba b_1 taka, że $b_1^n = a^{-1}$. Wtedy jednak liczba $b = b_1^{-1}$ spełnia równość

$$b^n = (b_1^{-1})^n = (b_1^n)^{-1} = (a^{-1})^{-1} = a,$$

tzn. jest pierwiastkiem n -tego stopnia z a .

Wystarczy więc rozważyć przypadek $a > 1$. Tym się teraz zajmiemy. Niech

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x^n \leq a\}.$$

Jeśli $x \in S$, to $x \leq a$, bowiem w przeciwnym przypadku mielibyśmy $x^n > a^n > a > 1$, a to jest sprzeczność z definicją zbioru S . Liczba a jest więc ograniczeniem górnym zbioru S , a ponadto $1 \in S$, bo $1 = 1^n < a$.

Z aksjomatu ciągłości wynika, że zbiór S ma kres górny $b = \sup S$. Musi zachodzić jeden z trzech przypadków,

$$b^n < a, \quad b^n > a, \quad b^n = a.$$

Pokażemy, że pierwsza i druga możliwość prowadzą do sprzeczności.

Przypuśćmy, że $b^n < a$. Rozważmy liczbę $b + \varepsilon$; niewielką liczbę dodatnią $\varepsilon \in (0, a)$ dobierzemy za chwilę. Z lematu otrzymujemy

$$\begin{aligned} (b + \varepsilon)^n - b^n &= \varepsilon ((b + \varepsilon)^{n-1} + (b + \varepsilon)^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \\ &< \varepsilon \cdot n(b + a)^{n-1} \end{aligned}$$

(każdy z n składników w nawiasie szacujemy z góry przez $(b + a)^{n-1}$). Biorąc dowolną liczbę

$$0 < \varepsilon < \frac{a - b^n}{n(b + a)^{n-1}},$$

przekonujemy się, że $(b + \varepsilon)^n - b^n < a - b^n$, tzn. $(b + \varepsilon)^n < a$, a więc $b + \varepsilon \in S$. Stąd $b + \varepsilon \leq \sup S = b$, czyli $\varepsilon \leq 0$, sprzeczność.

Przypuśćmy zatem, że $b^n > a$. Rozważając tym razem $b - \delta$, gdzie δ jest małą liczbą dodatnią, otrzymujemy, ponownie stosując Lemat,

$$b^n - (b - \delta)^n = \delta (b^{n-1} + b^{n-2}(b - \delta) + \dots + (b - \delta)^{n-1}) < \delta \cdot nb^{n-1} < b^n - a,$$

o ile tylko $0 < \delta < (b^n - a)/nb^{n-1}$ (wtedy mamy prawo napisać ostatnią nierówność). To jednak oznacza, że

$$(b - \delta)^n > a.$$

Z definicji zbioru S mamy więc $(b - \delta)^n > x^n$ dla każdego $x \in S$, czyli $b - \delta \geq \sup S = b$. Stąd $-\delta \geq 0$, jednak liczbę δ wybraliśmy wcześniej dodatnią! Ta sprzeczność oznacza, że przypadek $b^n > a$ także nie może zachodzić.

Została tylko jedna możliwość: $b^n = a$. \square

Uwaga. Wygodnie jest przyjąć następującą dodatkową umowę: jeśli $a < 0$, natomiast $n = 2k + 1$ jest liczbą naturalną nieparzystą, to kładziemy

$$a^{1/n} = -(-a)^{1/n}.$$

Wtedy rzeczywiście $(a^{1/n})^n = a$, co wynika z przemienności mnożenia i stąd, że $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = -1$. Nietrudno zauważyć, że dla $n = 2k$ analogiczna umowa nie miałaby sensu: parzysta potęga liczby rzeczywistej b , $b^{2k} = (b^k)^2$ jest nieujemna, co wynika z własności (W8), patrz strona 3.

1.4 Liczby całkowite. Entier. Gęstość zbioru liczb wymiernych i niewymiernych

Jak już wiemy, zbiór liczb całkowitych jest określony następująco

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}).$$

Przytoczymy bez dowodu dwa twierdzenia, opisujące własności zbioru \mathbb{Z} .

Twierdzenie 1.13. *Jeśli $k \in \mathbb{Z}$, to w przedziale otwartym $(k, k + 1)$ nie ma żadnej liczby całkowitej, tzn. $(k, k + 1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.*

Twierdzenie 1.14. *Jeśli zbiór niepusty $A \subset \mathbb{Z}$ jest ograniczony z góry (odpowiednio: z dołu), to w A istnieje element największy (odpowiednio: najmniejszy).*

Każde z tych twierdzeń⁵ można sprowadzić do odpowiednich własności zbioru liczb naturalnych, których dowodzi się, stosując zasadę indukcji zupełnej. Nie będziemy tego robić; szczegóły pozostawiamy zainteresowanemu Czytelnikowi.

Definicja 1.15 (Entier, czyli część całkowita liczby rzeczywistej). Dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ określamy

$$[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}. \quad (1.4)$$

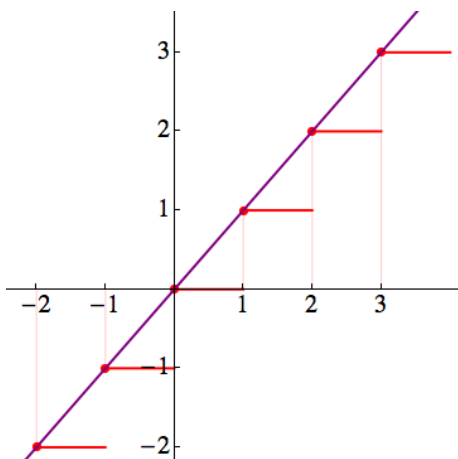
Zatem, na przykład, $[7] = 7 = -[-7]$, $[\frac{1}{3}] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, ale $[-\sqrt{2}] = -2$, gdyż największą liczbą całkowitą nie przekraczającą $-1,4142\dots = -\sqrt{2}$ jest właśnie -2 .

Stwierdzenie 1.16. *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ liczba $[x]$ jest całkowita i spełnia nierówności*

$$[x] \leq x < [x] + 1. \quad (1.5)$$

Dowód. Odpowiednie własności $[x]$ widać na załączonym rysunku.

⁵Nawiasem: ze szkolnego, a także zdroworozsądkowego punktu widzenia oba twierdzenia są, praktycznie biorąc, oczywiste – tzn. wyrażają nasze bardzo naturalne intuicje związane z *wyglądem* zbioru liczb całkowitych.



Funkcja entier i funkcja $f(x) = x$. Lewy koniec każdego z poziomych odcinków wykresu $[x]$ należy do tego wykresu, a prawy – nie.

którą ma zarówno zbiór \mathbb{Q} liczb wymiernych, jak i zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liczb niewymiernych.

Definicja 1.17. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywa się gęsty, jeśli dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, istnieje element $a \in A$ taki, że $x < a < y$.

Twierdzenie 1.18. Zarówno zbiór \mathbb{Q} liczb wymiernych, jak i zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liczb niewymiernych, są gęste w \mathbb{R} .

Mówiąc inaczej, w każdym przedziale otwartym prostej rzeczywistej jest jakaś liczba wymierna i jakaś liczba niewymierna.

Dowód. Ustalmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ takie, że $x < y$. Najpierw wskażemy liczbę wymierną w , która należy do przedziału (x, y) .

Wiemy, że $[nx] \leq nx < [nx] + 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\frac{[nx]}{n} \leq x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} =: w.$$

Ponieważ $[nx] \in \mathbb{Z}$, więc $w \in \mathbb{Q}$. Pozostaje dobrać n tak, żeby $w < y$, ale to nietrudne: mamy $[nx]/n \leq x$, a zatem

$$w = \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n}.$$

Wystarczy więc, gdy $x + \frac{1}{n} < y$, a tak jest dla dowolnej liczby $n > 1/(y - x)$ (proszę zauważyć, że korzystamy tu z dwóch faktów: $y - x > 0$, więc $1/(y - x) > 0$, a ponadto zachodzi aksjomat Archimedesesa).

Uwaga. Ta część dowodu wyraża prostą intuicję: jeśli wyruszamy z punktu $0 \in \mathbb{R}$ i idziemy krokami długości $1/n$, to stąpamy tylko po liczbach wymiernych i nie możemy ominąć żadnej “dziury” dłuższej niż $1/n$.

Teraz wskażemy liczbę niewymierną z taką, że $x < w < z < y$. Połóżmy

$$z = w + \frac{\sqrt{2}}{m}, \quad \text{gdzie } m \in \mathbb{N}.$$

Oto niedługi dowód, dla zainteresowanych formalizacją. To, że $[x] \in \mathbb{Z}$, wynika z definicji części całkowitej i własności zbioru \mathbb{Z} , wyrażonej w Twierdzeniu 1.14: zbiór

$$K = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

jest ograniczony z góry przez x , a liczba $[x]$ jest największym elementem K . Mamy $[x] \leq x$ wprost z definicji supremum. Gdyby $[x] + 1 \leq x$, to byłoby

$$\sup K = [x] < [x] + 1 \in K,$$

a to jest sprzeczność z definicją supremum. \square

Wiemy już zatem (z grubsza), co to są liczby rzeczywiste, naturalne, całkowite i wymierne. Wiemy też, że istnieją liczby niewymierne; jedną z nich jest $\sqrt{2}$. Sformułujmy jeszcze jedną ważną własność,

Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ mamy $z > w$ (to oczywiste), a ponadto $z \notin \mathbb{Q}$, bowiem w przeciwnym przypadku mielibyśmy $\sqrt{2} = m(z - w) \in \mathbb{Q}$, a wiemy, że $\sqrt{2}$ jest niewymierny. Pozostaje tylko dobrać m tak, żeby $z < y$, ale to nietrudne: ponieważ $w < y$, więc $z < y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt{2}/(y - w) < m$. Bierzymy więc jako m dowolną liczbę naturalną, która jest większa od $\sqrt{2}/(y - w)$. \square

Uwaga. Z Twierdzenia 1.18 wynika, że w każdym przedziale otwartym prostej rzeczywistej jest nieskończenie wiele liczb wymiernych i nieskończenie wiele liczb niewymiernych (Czytelnik zechce się zastanowić, dlaczego tak jest). W istocie, jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym zbiorem gęstym, to do każdego przedziału otwartego należy nieskończenie wiele elementów zbioru A .

Na zakończenie tej partii wykładu podamy jeszcze jeden dowód istnienia liczb niewymiernych – dowód Dedekinda niewymierności pierwiastków niecałkowitych. To ilustracja, jak wiele można wywnioskować z najprostszych reguł arytmetyki i jednej własności zbioru \mathbb{N} : *w każdym niepustym zbiorze $A \subset \mathbb{N}$ istnieje element najmniejszy.*

Twierdzenie 1.19. *Jeśli $n, k \in \mathbb{N}$ i $k \geq 2$, to $x = n^{1/k}$ jest albo liczbą naturalną, albo liczbą niewymierną.*

Dowód. Aby lepiej zilustrować najważniejszy pomysł dowodu, rozpatrzmy najpierw przypadek $k = 2$.

Przypuśćmy, że $0 < x = \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, ale jednak $x \in \mathbb{Q}$. Wtedy zbiór

$$A = \{m \in \mathbb{N} : mx \in \mathbb{N}\}$$

jest niepusty; to wynika wprost z definicji zbioru liczb wymiernych \mathbb{Q} . Niech m_0 będzie najmniejszym elementem A ; wtedy oczywiście $m_0 x = l \in \mathbb{N}$.

Położmy $m_1 = m_0(x - [x])$. Z nierówności $0 < x - [x] < 1$ (pamiętajmy: x nie jest liczbą całkowitą) wynika, że $0 < m_1 < m_0$. Ponadto,

$$m_1 = m_0 x - m_0 [x] = l - m_0 [x] \in \mathbb{Z},$$

a więc m_1 jest liczbą naturalną, bo $m_1 > 0$. Wreszcie, mamy

$$0 < m_1 x = m_0 x^2 - m_0 x [x] = m_0 n - l [x] \in \mathbb{Z},$$

a więc liczba $m_1 x$ też jest naturalna. To oznacza, że $m_1 \in A$ i $m_1 < m_0$, a przy tym m_0 jest *najmniejszym* elementem w zbiorze A . Otrzymaliśmy sprzeczność, która oznacza, że $x = \sqrt{n}$ nie może być liczbą wymierną. To kończy dowód twierdzenia w przypadku $k = 2$.

Pokażemy teraz, jak rozważyć przypadek ogólny. Załóżmy, że $x = n^{1/k} \notin \mathbb{N}$. Przypuśćmy, że $x \in \mathbb{Q}$; pokażemy, że to założenie prowadzi do sprzeczności. Niech

$$B = \{s \in \mathbb{N} : x^s \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiór $B \subset \mathbb{N}$ jest niepusty ($k \in B$, bowiem $x^k = n$), więc zawiera element najmniejszy s_0 ; przy tym $s_0 > 1$, gdyż $1 \notin B$. Oznaczmy

$$x^{s_0} = n_0. \tag{1.6}$$

Rozważmy zbiór

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \text{wszystkie liczby } mx, mx^2, \dots, mx^{s_0-1} \text{ są naturalne}\}.$$

Jest to zbiór niepusty, gdyż x, x^2, \dots, x^{s_0-1} są liczbami wymiernymi. Niech m_0 będzie najmniejszym elementem zbioru A . Dla wygody oznaczmy

$$m_0x = l_1 \in \mathbb{N}, \quad m_0x^2 = l_2 \in \mathbb{N}, \quad \dots, \quad m_0x^{s_0-1} = l_{s_0-1} \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ s_0 to najmniejszy element zbioru B , więc

$$0 < \varepsilon := x^{s_0-1} - [x^{s_0-1}] < 1$$

(liczba x^{s_0-1} nie jest naturalna, gdyż wtedy $s_0 - 1$ należałoby do B). Połóżmy $m_1 = \varepsilon m_0$. Wtedy $0 < m_1 < m_0$. Ponadto,

$$0 < m_1 = m_0\varepsilon = m_0x^{s_0-1} - m_0[x^{s_0-1}] = l_{s_0-1} - m_0[x^{s_0-1}] \in \mathbb{Z},$$

więc m_1 jest liczbą naturalną. Wreszcie, nietrudno sprawdzić, że

$$m_1x \in \mathbb{N}, \quad m_1x^2 \in \mathbb{N}, \quad \dots, \quad m_1x^{s_0-1} \in \mathbb{N}.$$

Istotnie, niech j będzie dowolną z liczb $1, 2, \dots, s_0 - 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} m_1x^j = m_0\varepsilon x^j &= m_0x^{j-1}x^{s_0} - m_0x^j[x^{s_0-1}] \\ &\stackrel{(1.6)}{=} m_0x^{j-1}n_0 - l_j[x^{s_0-1}] \\ &= \begin{cases} m_0n_0 - l_1[x^{s_0-1}] & \text{gdy } j = 1, \\ l_{j-1}n_0 - l_j[x^{s_0-1}] & \text{gdy } j > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

a więc m_1x^j jest liczbą całkowitą. Do tego oczywiście $m_1x^j > 0$, więc m_1x^j jest liczbą naturalną. Zatem, z definicji zbioru A i dowolności j , liczba $m_1 \in A$.

Otrzymaliśmy więc

$$m_0 = \inf A > m_1 \in A.$$

Jest to sprzeczność, która kończy dowód. \square

Ktoś, komu powyższy dowód wydaje się nie tylko pomysłowy, ale i trudny, powinien pamiętać, że o niewymierności $\sqrt{2}$ wiadomo od dwóch i pół tysiąca lat, a Dedekind swój artykuł *Was sind und was sollen die Zahlen?* publikował, jako pięćdziesięcioparolatek, w roku 1888.

Nie należy się dziwić, jeśli nie rozumiemy w ciągu pół godziny czegoś, na co inni potrzebowali wielu lat.

Rozdział 2

Ciągi. Pojęcie granicy ciągu.

Definicja 2.1. Ciąg jest to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych.

Będziemy rozważać ciągi o wyrazach rzeczywistych, czyli – zgodnie z powyższą definicją – funkcje $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Wartości takiej funkcji w kolejnych liczbach naturalnych nazywa się *wyrazami ciągu* i oznacza

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots$$

Zarówno na wykładzie, jak i na ćwiczeniach spotkamy wielokrotnie ciągi zdefiniowane w różny sposób: przez podanie ogólnego wzoru na n -ty wyraz, np. $a_n = 1/n$ dla $n \in \mathbb{N}$, albo przez określenie rekurencyjnej reguły, która pozwala obliczyć następny wyraz ciągu, gdy znane są wyrazy o wcześniejszych numerach, np.

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

(nawiasem: ciąg (F_n) nazywa się ciągiem Fibonacciego).

Ciągi służą matematykowi m.in. do tego, żeby nowe, nieznanne jeszcze liczby rzeczywiste *przybliżyć* liczbami prostszymi, już oswojonymi – np. liczbami wymiernymi. Bywa i na odwrót: znamy jakiś ciąg liczb, wyrażony skomplikowanym wzorem lub regułą, a chcemy powiedzieć coś względnie prostego i jasnego o zachowaniu dalekich wyrazów ciągu. Aby robić jedno i drugie w sposób możliwie ścisły, wprowadza się fundamentalne w całej Analizie pojęcie *granicy ciągu*. Zanim je wprowadzimy, przypomnijmy definicję wartości bezwzględnej.

Definicja 2.2 (wartość bezwzględna liczby rzeczywistej). Dla $x \in \mathbb{R}$ kładziemy

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0, \\ -x, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Interpretacja wartości bezwzględnej, z którą będziemy nieustannie mieć do czynienia, jest następująca: $|x|$ to odległość liczby (punktu) x od 0 na prostej rzeczywistej, a $|x - a|$ to odległość punktów $x \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$.

Stwierdzenie 2.3 (nierówność trójkąta). *Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{2.1}$$

Dowód. Sprawdzenie przypadków, gdy obie liczby są tego samego znaku lub co najmniej jedna z nich jest zerem, jest łatwe. W nierówności trójkąta zachodzi wtedy równość. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

Pozostaje wykazać nierówność dla $x < 0 < y$ (przypadek $y < 0 < x$ jest w pełni analogiczny, wystarczy zamienić x i y rolami). Prawa strona (2.1), którą oznaczmy P , jest wtedy równa $|x| + |y| = y - x$. Lewa strona, L , jest równa $x + y$ lub $-x - y$.

Jeśli $L = x + y$, to nierówność $L \leq P$ jest równoważna temu, że $x + y \leq y - x$, czyli temu, że $2x \leq 0$, a wiemy, że ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż $x < 0$.

Jeśli natomiast $L = -x - y$, to nierówność $L \leq P$ jest równoważna temu, że $-x - y \leq y - x$, czyli temu, że $0 \leq 2y$, a wiemy, że ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż $y > 0$.
□

2.1 Granica ciągu i jej podstawowe własności

Definicja 2.4. Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$ (inaczej: ma granicę $g \in \mathbb{R}$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich numerów $m > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność

$$|a_m - g| < \varepsilon.$$

Pozwólmy sobie na nieformalny komentarz. Warunek z definicji należy rozumieć tak: jakkolwiek *małą* liczbę $\varepsilon > 0$ weźmiemy, można będzie wskazać taką liczbę n_ε , odpowiednio dobraną do ε , że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych od n_ε będą się różnić od liczby g – granicy ciągu – mniej niż o ε . Mówiąc inaczej, liczba ε określa żądany poziom dokładności przybliżenia $a_m \approx g$, natomiast n_ε wskazuje moment, od którego jesteśmy w stanie taką dokładność zapewnić.

Oznaczenia i terminologia. Ciąg, który ma granicę, nazywa się *zbieżny*. Ciąg *rozbieżny* to taki ciąg, który nie ma granicy $g \in \mathbb{R}$. Jeśli (a_n) ma granicę, która jest równa liczbie $g \in \mathbb{R}$, to piszemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

(skrót *lim* pochodzi od łacińskiego *limes*), lub czasem po prostu: $a_n \rightarrow g$ dla $n \rightarrow \infty$. Proszę pamiętać,

Przykład 2.5. Ciąg stały, $a_n = a \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, ma granicę równą a . □

Przykład 2.6. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \dots$ ma granicę równą zero, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Sprawdźmy to, posługując się definicją. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Mamy wskazać n_ε tak, żeby $|a_m - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $m > n_\varepsilon$. Zobaczmy więc, kiedy nierówność $|a_m - g| < \varepsilon$ jest spełniona. Mamy

$$|a_m - g| = \left| \frac{1}{m} - 0 \right| = \frac{1}{m} < \varepsilon$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $m > 1/\varepsilon$. Można więc wybrać np. $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > 1/\varepsilon$; wtedy dla $m > n_\varepsilon$ jest $m > 1/\varepsilon$, a więc $\frac{1}{m} = |a_m - g| < \varepsilon$, zgodnie z warunkiem podanym w definicji granicy.

Uwaga (banalna, ale nie pozbawiona pewnego sensu). W tym przykładzie równie dobrze moglibyśmy użyć jako n_ε dowolnej liczby naturalnej większej od $1/\varepsilon$, np. wziąć

$$n'_\varepsilon = \left(\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 7 \right)^3 + 2010^{2010}.$$

Z implikacji $m > n'_\varepsilon$ wynika przecież, że $m > 1/\varepsilon$, a więc $\frac{1}{m} = |a_m - g| < \varepsilon$. W definicji granicy nie ma mowy o tym, że powinniśmy liczbę n_ε wybrać najlepiej, jak tylko się da.

Spójrzmy teraz na kolejny przykład, gdzie powyższa banalna uwaga ma pewne znaczenie.

Przykład 2.7. Niech $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Wykażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$.

Postępujemy podobnie, jak w poprzednim przykładzie. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Warunek

$$|a_m - g| = \left| \frac{1}{m!} - 0 \right| = \frac{1}{m!} < \varepsilon$$

jest równoważny innemu, $m! > 1/\varepsilon$. W przeciwieństwie do poprzedniego przykładu, tej nierówności nie potrafimy łatwo rozwiązać, tzn. wyznaczyć wszystkich liczb m , które ją spełniają. Możemy jednak skorzystać z oczywistej nierówności $m! \geq m$ i zauważyć, że jeśli $m > n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, to

$$m! \geq m > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

a zatem warunek $|a_m - g| < \varepsilon$ jest spełniony. Zatem, wprost z definicji $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$.

W obu powyższych przykładach było rzeczą względnie jasną, jaka liczba powinna być granicą ciągu. Nie zawsze tak jest.

Przykład 2.8. Znajdziemy granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{n}$. Ktoś, kto nie dowiedział się wcześniej, że jest to ciąg zbieżny, ma prawo tego nie wiedzieć; ma także prawo mieć wątpliwość: *jaka właściwie liczba powinna być granicą tego ciągu?*

Aby wskazać możliwą odpowiedź na to pytanie, użyjemy brutalnej siły, tzn. przyjrzymy się odpowiednio dużej liczbie wyrazów ciągu. Odpowiedni eksperyment można przeprowadzić z użyciem dowolnego pakietu do obliczeń symbolicznych, np. pakietu *Mathematica*, dostępnego dla każdego użytkownika w laboratorium komputerowym Wydziału MIM. Krótki program

```
Do[Print[{n, N[n^{1/n}, 8]}], {n, 1, 10000}]
```

pozwała wypisać przybliżone wartości wyrazów $a_1, a_2, \dots, a_{10000}$ z dokładnością do 8 miejsc znaczących. Jego wykonanie nie trwa szczególnie długo. Oględziny wyników eksperymentu wskazują, że

$$\begin{aligned} a_2 &= 1,414\dots, & a_3 &= 1,442\dots, & a_4 &= a_2, & a_5 &< a_4, \\ a_{10} &= 1,258\dots, & a_{100} &= 1,047\dots, & a_{1000} &= 1,0069\dots, & a_{10000} &= 1,0009\dots \end{aligned}$$

Naturalna, nawet temu, kto wątpi, że programy komputerowe robią naprawdę to, co im każemy, wydaje się więc hipoteza: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Aby sprawdzić, że tak rzeczywiście jest, oznaczymy różnicę $\sqrt[n]{n} - 1$ symbolem δ_n . Użyjemy *dwumianu Newtona*

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n,$$

gdzie tzw. *symbol Newtona* dany jest wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(Umowa: $0! = 1$.) Podstawiając $a = 1$ i $b = \delta_n$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} n &= (\sqrt[n]{n})^n = (1 + \delta_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\delta_n + \binom{n}{2}\delta_n^2 + [\text{cała reszta składników}] \\ &= 1 + n\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 + \dots \end{aligned}$$

Stąd $n > \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2$ dla $n > 1$, gdyż suma składników dodatnich jest większa od każdego z nich; równoważnie,

$$\delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad \text{dla } n > 1. \quad (2.2)$$

Ponieważ w tym przykładzie $|a_n - g| = |\sqrt[n]{n} - 1| = \delta_n$, więc wystarczy sprawdzić, dla jakich n zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon.$$

Nietrudno się przekonać, że spełniają ją wszystkie liczby $n > 1 + (2/\varepsilon^2)$. Zatem, dla wszystkich $n > n_\varepsilon := 2 + [2/\varepsilon^2]$ mamy

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = \delta_n \stackrel{(2.2)}{<} \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon,$$

a to, zgodnie z definicją granicy, oznacza, że $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ dla $n \rightarrow \infty$. \square

Przykład 2.9. Ciąg $a_n = (-1)^n$, czyli ciąg liczb $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ jest rozbieżny. Gdyby liczba $g \in \mathbb{R}$ była jego granicą, to biorąc w warunku z definicji granicy $\varepsilon = 1/2$ otrzymalibyśmy

$$g - \frac{1}{2} < a_n < g + \frac{1}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_\varepsilon = n_{1/2}.$$

To jednak jest niemożliwe: przedział $(g - 1/2, g + 1/2)$ ma długość 1, więc punkty 1 i -1 (odległe o 2) nie mogą do niego jednocześnie należeć, niezależnie od tego, jaką weźmiemy liczbę g .

Podobnie pokazuje się, że jeśli $a \neq b$, to ciąg a, b, a, b, a, b, \dots jest rozbieżny. \square

Posługiwanie się bezpośrednio definicją granicy ciągu za każdym razem, gdy chcemy wykazać, że jakiś ciąg jest zbieżny, i obliczyć jego granicę, byłoby rzeczą niewygodną. Bardzo pożyteczne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.10 (arytmetyczne własności granicy). *Założmy, że ciągi liczb rzeczywistych (a_n) i (b_n) są zbieżne odpowiednio do a i b , tzn.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad (2.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad (2.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab. \quad (2.5)$$

Ponadto, jeśli $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}. \quad (2.6)$$

Dowód tego nietrudnego, ale ważnego twierdzenia wygodnie będzie poprzedzić pewnym przygotowaniem.

Definicja 2.11. Ciąg (a_n) nazywa się *ograniczony* wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczonym podzbiorem \mathbb{R} .

Analogicznie definiuje się ciągi ograniczone *z góry* i *z dołu*. Nietrudno zobaczyć, że np. ciąg $a_n = n^2$ nie jest ograniczony z góry, choć jest ograniczony z dołu. Ciąg $a_n = (-1)^n n$ nie jest ograniczony ani z góry, ani z dołu.

Stwierdzenie 2.12. *Każdy zbieżny ciąg liczb rzeczywistych jest ograniczony.*

Dowód. Niech $a_n \rightarrow g$ dla $n \rightarrow \infty$. Weźmy w definicji granicy $\varepsilon = 1$. Istnieje taka liczba n_1 , że

$$g - 1 < a_n < g + 1 \quad \text{dla wszystkich } n > n_1. \quad (2.7)$$

Położmy teraz

$$M = \max(g + 1, \max(a_1, \dots, a_{n_1})), \quad m = \min(g - 1, \min(a_1, \dots, a_{n_1})),$$

gdzie symbol $\max(x_1, \dots, x_m)$ oznacza największą z liczb rzeczywistych x_1, \dots, x_m , a symbol $\min(x_1, \dots, x_m)$ – najmniejszą z tych liczb. Nietrudno zobaczyć, że $m \leq a_n \leq M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Dla $n > n_1$ wynika to z doboru n_1 , tzn. z warunku (2.7), i z nierówności

$$m \leq g - 1 \leq g + 1 \leq M$$

Dla $n \leq n_1$ nierówność $m \leq a_n \leq M$ wynika wprost z definicji liczb m, M . \square

Stwierdzenie 2.13 (o szacowaniu granic). *Założmy, że (a_n) i (b_n) są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych. Zachodzą wtedy następujące implikacje:*

(i) *Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > a$, to istnieje takie $n_1 \in \mathbb{N}$, że $a_n > a$ dla wszystkich $n > n_1$.*

(ii) *Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n < b$, to istnieje takie $n_1 \in \mathbb{N}$, że $b_n < b$ dla wszystkich $n > n_1$.*

(iii) *Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, to istnieje takie $n_1 \in \mathbb{N}$, że $a_n > b_n$ dla wszystkich $n > n_1$.*

(iv) *Jeśli istnieje takie $n_1 \in \mathbb{N}$, że $a_n \leq b_n$ dla wszystkich $n > n_1$, to wówczas*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Dowód. Zaczynamy od własności (i). Biorąc w definicji granicy $\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a > 0$, a następnie dobierając doń n_ε , otrzymujemy

$$a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a) = a \quad \text{dla wszystkich } n_\varepsilon.$$

Dowód własności (ii) jest analogiczny; Czytelnik może przeprowadzić go samodzielnie, lub skorzystać z własności

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = (-b),$$

która pozwala wyprowadzić (ii) z udowodnionej już (i).

Aby sprawdzić (iii), bierzemy dowolną liczbę rzeczywistą x taką, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > x > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Istnieje wtedy takie n_1 , że $a_n > x$ dla wszystkich $n > n_1$; to wynika z punktu (i). Podobnie, istnieje wtedy takie n_2 , że $x > b_n$ dla wszystkich $n > n_2$; to wynika z punktu (ii). Dla $n > \max(n_1, n_2)$ obie nierówności zachodzą jednocześnie, a więc, dzięki przechodniości, $a_n > b_n$.

Wreszcie, własność (iv) wynika z (iii) przez zaprzeczenie. Istotnie, gdyby nie zachodziła teza (iv), to dysponowalibyśmy założeniem (iii), a więc zgodnie z (iii) byłoby $a_n > b_n$ dla wszystkich $n > n_1$, co przeczyłoby założeniu (iv). \square

Wróćmy teraz do arytmetycznych własności granicy.

DOWÓD TWIERDZENIA 2.10. 1. *Granica sumy ciągów.* Ustalmy $\varepsilon > 0$. Korzystając z definicji granicy dla liczby $\varepsilon/2$ (można tak zrobić, bowiem warunek z definicji ma zachodzić dla każdej liczby dodatniej, a $\varepsilon/2 > 0$) dobierzmy liczby n_1 i n_2 tak, żeby

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_1, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_2.$$

Wówczas, dla $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$, zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad \text{z nierówności trójkąta} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że liczba $g = a + b$ jest granicą ciągu $a_n + b_n$.

Przerwijmy dowód na chwilę i skomentujmy całe rozumowanie.

Komentarz (dla początkujących). Czytelnik, który po raz pierwszy styka się z podobnym dowodem, może zapytać: *skąd było wiadomo, że trzeba skorzystać z definicji granicy ciągu a_n i ciągu b_n , biorąc w nich $\varepsilon/2$ zamiast ε ?* Po pierwsze, akurat w tym przypadku rachunki są na tyle krótkie, że można je przemyśleć w pamięci (lub szybko wykonać na brudno) i odgadnąć, że tak będzie wygodnie, bo na końcu otrzymamy wynik ε . Można jednak postąpić inaczej, i to co najmniej na dwa różne sposoby:

1. Użyć obu definicji, biorąc w nich ε , a nie $\varepsilon/2$; otrzymujemy wtedy, dla $n > n_3$,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

ale przecież 2ε jest dowolną liczbą dodatnią, więc otrzymaliśmy warunek z definicji granicy, tylko dla liczby o innej nazwie.

2. Użyć obu definicji, biorąc w nich ostrożnie $\eta > 0$ zamiast $\varepsilon > 0$, bowiem *a priori* nie mamy pewności, jaki będzie wynik; otrzymujemy wtedy, dla $n > n_3$,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \eta + \eta = 2\eta.$$

Teraz nietrudno już powiedzieć: *niech $\eta = \varepsilon/2$; w dodatku, mogliśmy tak rozumować od samego początku.* W dłuższych dowodach, uzasadniających, że jakaś granica ma tę, a nie inną wartość, taki sposób postępowania bywa wygodny.

2. *Granica różnicy ciągów.* Postępujemy tak samo, jak w poprzedniej części dowodu. Ustalmy $\varepsilon > 0$; liczby n_1 i n_2 dobierzmy tak, żeby

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_1, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_2.$$

Wówczas, dla $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (a - b)| &= |(a_n - a) + (b - b_n)| \\ &\leq |a_n - a| + |b - b_n| \quad \text{z nierówności trójkąta} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że różnica liczb a i b jest granicą różnicy ciągów a_n i b_n .

3. *Granica iloczynu ciągów.* Dowód jest podobny do poprzednich, jednak nieco dłuższy. Najpierw trzeba zapisać różnicę $a_n b_n - ab$ tak, żeby zobaczyć wyrażenia $a_n - a$ i $b_n - b$. Oto odpowiedni rachunek

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |b_n| |a_n - a| + |a| |b_n - b| \quad \text{z nierówności trójkąta} \\ &=: W_n. \end{aligned}$$

Ciąg b_n jest ograniczony, więc istnieje taka *dodatnia* liczba M , że $|b_n| \leq M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, dla ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją takie $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, że

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{dla wszystkich } n > n_1, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a| + 1} \quad \text{dla wszystkich } n > n_2.$$

Zatem, dla $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$ możemy oszacować

$$W_n < M \frac{\varepsilon}{2M} + |a| \frac{\varepsilon}{2|a| + 1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

gdyż $|a|/(2|a| + 1) < \frac{1}{2}$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$. Otrzymaliśmy $|a_n b_n - ab| \leq W_n < \varepsilon$ dla wszystkich $n > n_3$; dzięki dowolności $\varepsilon > 0$ wynika stąd, że $a_n b_n \rightarrow ab$ dla $n \rightarrow \infty$.

3. *Granica ilorazu ciągów.* Wystarczy wykazać, że $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ dla $n \rightarrow \infty$, a następnie skorzystać z poprzedniego punktu twierdzenia, gdyż $a_n/b_n = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$.

Ponieważ $b \neq 0$, więc istnieje taki przedział otwarty $(c, d) \subset \mathbb{R}$, że $b \in (c, d)$, ale $0 \notin (c, d)$. Posługując się dwukrotnie Stwierdzeniem 2.13, przekonujemy się, że

$$b_n \in (c, d) \quad \text{dla wszystkich } n \text{ większych od pewnego } n_1 \in \mathbb{N}.$$

Zatem

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b| |b_n|} \leq \frac{|b - b_n|}{\min(|c|, |d|)^2}.$$

Ustalamy teraz $\varepsilon > 0$ i wybieramy liczbę $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, żeby mieć $|b - b_n| \leq \varepsilon \min(|c|, |d|)^2$ dla $n > n_2$. Dla $n > \max(n_1, n_2)$ mamy wtedy

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{|b - b_n|}{\min(|c|, |d|)^2} < \varepsilon,$$

czyli istotnie $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ dla $n \rightarrow \infty$. Dowód całego twierdzenia jest zakończony. \square

Podamy teraz dwa inne twierdzenia. W połączeniu z Twierdzeniem 2.10 tworzą one wygodny zestaw narzędzi do badania zbieżności wielu ciągów o wyrazach rzeczywistych. Zobaczymy też pewne przykłady zastosowań tych twierdzeń.

Oto pierwsze z zapowiedzianych twierdzeń.

Twierdzenie 2.14 (o trzech ciągach). *Założmy, że $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$, a ponadto*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$$

i istnieje takie $n_1 \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n > n_1$ zachodzą nierówności

$$a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$.

Dowód. To twierdzenie jest stosunkowo prostym wnioskiem ze Stwierdzenia 2.13. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Ponieważ $g = \lim a_n > g - \varepsilon$, więc istnieje takie $n_2 \in \mathbb{N}$, że $a_n > g - \varepsilon$ dla $n > n_2$. Podobnie, $g = \lim b_n < g + \varepsilon$, więc istnieje takie $n_3 \in \mathbb{N}$, że $b_n < g + \varepsilon$ dla $n > n_3$.

Dla $n > \max(n_1, n_2, n_3)$ możemy skorzystać ze wszystkich nierówności, w których występują a_n, b_n i c_n . Zatem, dla takich n ,

$$g - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < g + \varepsilon,$$

stąd zaś wynika, że $|c_n - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > \max(n_1, n_2, n_3)$. \square

Twierdzenie o trzech ciągach jest bardzo wygodnym narzędziem. Popatrzmy na przykłady jego zastosowań.

Przykład 2.15. Niech $x \in (0, 1)$. Obliczymy granicę ciągu $c_n = \sqrt[n]{x}$. Założmy najpierw, że $x \geq 1$. Wtedy dla wszystkich $n > n_1 = [x] + 1 > x$ zachodzą nierówności

$$1 \leq c_n = \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{n}.$$

Wiemy już jednak, że $b_n = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ dla $n \rightarrow \infty$, a ciąg stały $a_n \equiv 1$ też ma granicę 1. Zatem, z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1. \quad (2.8)$$

Jeśli $x \in (0, 1)$, to $\sqrt[n]{x} = 1/\sqrt[n]{y}$ dla $y = 1/x > 1$, a więc wzór (2.8) także zachodzi. \square

Przykład 2.16. Niech $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Ponieważ $|q^n - 0| = |q^n| = ||q|^n - 0|$, więc wystarczy ograniczyć się do przypadku $q \in [0, 1)$. Dla $q = 0$ mamy do czynienia z ciągiem stałym, $q^n \equiv 0$; wtedy nie ma czego dowodzić.

Niech więc $q \in (0, 1)$; oznaczmy $a = \frac{1}{q} - 1$. Wtedy $a > 0$, $1/q = 1 + a$ i z nierówności Bernoulliego mamy

$$\frac{1}{q^n} = (1 + a)^n \geq 1 + na > na \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zatem,

$$0 \leftarrow 0 < q^n < \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

gdyż $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, i dla dowolnej liczby rzeczywistej c z twierdzenia o iloczynie granicy ciągów wynika, że $c \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy teraz, że $q^n \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$. \square

Przykład 2.17. Wykażemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} = 4. \quad (2.9)$$

Wskażemy w tym celu odpowiednie oszacowania $\sqrt[n]{3^n + 4^n}$ z góry i z dołu. Ponieważ $0 < 3^n < 4^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc

$$4 = \sqrt[n]{4^n} < \sqrt[n]{3^n + 4^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = 4 \sqrt[n]{2}.$$

Jednak $4 \sqrt[n]{2} \rightarrow 4$, gdy $n \rightarrow \infty$; to wynika z udowodnionego wcześniej wzoru (2.8). Oszacowaliśmy więc $\sqrt[n]{3^n + 4^n}$ z góry i z dołu przez wyrazy ciągów zbieżnych do liczby 4; można zastosować twierdzenie o trzech ciągach i stwierdzić, że wzór (2.9) rzeczywiście zachodzi. \square

W istocie, prawdziwy jest wzór nieco ogólniejszy od (2.9).

Przykład 2.18. Jeśli k jest liczbą naturalną i $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n} = x_k. \quad (2.10)$$

Istotnie, możemy wypisać oczywiste nierówności

$$x_k = \sqrt[n]{x_k^n} \leq \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n} \leq \sqrt[n]{k \cdot x_k^n} = x_k \sqrt[n]{k}.$$

Wiemy już jednak, że $\sqrt[n]{k} \rightarrow 1$, zatem, podobnie jak w poprzednim przykładzie, wzór (2.10) wynika z twierdzenia o trzech ciągach. \square

Uważny Czytelnik spostrzeżł zapewne, że praktycznie we wszystkich sytuacjach posługiwaliśmy się w istocie prostym wnioskiem z twierdzenia o trzech ciągach.

Wniosek 2.19. Jeśli $b \leq c_n \leq b_n$ dla wszystkich $n > n_1$, a ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to wtedy także $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = b$. \square

Drugie z zapowiedzianych twierdzeń zasługuje na osobny podrozdział.

2.2 Ciągi monotoniczne.

Definicja 2.20. Ciąg liczb rzeczywistych (a_n) jest:

- (i) *malejący*, gdy $a_n > a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) *niemalejący*, gdy $a_n \leq a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) *rosnący*, gdy $a_n < a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;
- (iv) *nierosnący*, gdy $a_n \geq a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.21. Ciąg (a_n) jest monotoniczny, gdy spełnia któryś z warunków (i)–(iv) poprzedniej definicji. Ciąg (a_n) jest ściśle monotoniczny, gdy jest rosnący albo malejący.

Twierdzenie 2.22. Załóżmy, że ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest niemalejący i ograniczony z góry. Wówczas ciąg (a_n) jest zbieżny. Jego granicą jest liczba

$$M = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że zbiór wyrazów ciągu, $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, jest ograniczony z góry, więc liczba $M = \sup A \in \mathbb{R}$ istnieje.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $M - \varepsilon < M$, więc $M - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym zbioru A . Zatem, znajdziemy takie n_1 , że

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \leq M.$$

Ciąg (a_n) jest niemalejący; dlatego $a_m \geq a_{n_1}$ dla wszystkich $m > n_1$. Jednak oczywiście mamy też $a_m \leq M$, gdyż M jest ograniczeniem górnym zbioru wyrazów ciągu. Podsumowując, mamy

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \leq a_m \leq M < M + \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } m > n_1,$$

tzn. $|a_m - M| < \varepsilon$ dla $m > n_1$. Przeto, zgodnie z definicją granicy ciągu, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$. \square

Ponieważ ciąg (a_n) jest niemalejący wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(-a_n)$ jest nierosnący, a $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -\inf\{-a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, więc zachodzi oczywiście następujący, bliźniaczy fakt.

Wniosek 2.23. Załóżmy, że ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest nierosnący i ograniczony z dołu. Wówczas ciąg (a_n) jest zbieżny. Jego granicą jest liczba

$$M = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Przykład 2.24. Niech $a_1 = \sqrt{6}$ i $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, tzn.

$$a_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \quad a_3 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \quad a_4 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}, \quad \dots$$

Sprawdzimy, że ciąg a_n jest rosnący i ograniczony. Niech $x > 0$. Zauważmy, że dla takich x nierówność $\sqrt{x+6} > x$ jest równoważna innej, $x^2 - x - 6 < 0$. Ponieważ $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, więc ostatecznie

$$x > 0 \text{ i } \sqrt{x+6} > x \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0, 3). \quad (2.11)$$

Zauważmy też, że

$$x \in (0, 3) \Rightarrow 0 < x + 6 < 9 \Rightarrow \sqrt{x + 6} \in (0, 3). \quad (2.12)$$

Wyrazy ciągu a_n są oczywiście dodatnie. Ponieważ $a_1 = \sqrt{6} \in (2, 3)$, więc z implikacji (2.12) wynika, na mocy zasady indukcji matematycznej, że $a_n \in (0, 3)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$; ciąg (a_n) jest więc ograniczony. Ponadto,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \stackrel{(2.11)}{>} a_n, \quad \text{bowiem wiemy już, że } a_n \in (0, 3).$$

Zatem ciąg a_n jest rosnący. Z Twierdzenia 2.22 wynika, że istnieje granica tego ciągu.

Nietrudno tę granicę znaleźć: ponieważ

$$a_{n+1}^2 = 6 + a_n,$$

więc z Twierdzenia 2.10 wynika, że $a = \lim a_n$ spełnia równość $a^2 = 6 + a$, a przy tym $a \geq 0$, gdyż $a_n > 0$ dla wszystkich n . Przeto $a = 3$. \square

Uwaga. Ostatni fragment rozumowania wolno przeprowadzić dopiero wtedy, gdy wiadomo już, że liczba $a = \lim a_n$ istnieje. Wcześniej można stąd jedynie wywnioskować, że jeśli $a = \lim a_n$ istnieje i $a \geq 0$, to wtedy $a = 3$.

Przykład 2.25. Niech $a_1 = \sqrt{3}$ i $a_{n+1} = 12 + \frac{a_n}{7}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, mamy $a_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, a także $a_n > 12$ dla wszystkich $n > 1$. Przez indukcję łatwo wykazać, że $a_n < 14$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ (tzn. ciąg a_n jest ograniczony, z dołu przez 0, a z góry przez 14). Zatem,

$$a_{n+1} - a_n = 12 + \frac{a_n}{7} - a_n = 12 - \frac{6a_n}{7} > 12 - \frac{6 \cdot 14}{7} = 0,$$

tzn. ciąg a_n jest rosnący. Z Twierdzenia 2.22 wynika teraz, że istnieje granica $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ tego ciągu. Mamy także $a = 12 + a/7$, stąd zaś $a = 14$.

2.3 Granice niewłaściwe

Wśród wszystkich ciągów rozbieżnych wygodnie jest wyróżnić osobno ciągi *rozbieżne do plus nieskończoności* i ciągi *rozbieżne do minus nieskończoności*

Definicja 2.26. Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych a_n jest rozbieżny do plus nieskończoności, i piszemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej t istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > t$ dla wszystkich $n > n_1$.

Definicja 2.27. Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych a_n jest rozbieżny do minus nieskończoności, i piszemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej t istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n < -t$ dla wszystkich $n > n_1$.

Oto proste przykłady: ciąg $a_n = n$ jest rozbieżny do $+\infty$, ciąg $b_n = -n^2$ jest rozbieżny do $-\infty$, natomiast ciąg $c_n = (-1)^n n^2$ jest rozbieżny, ale nie jest rozbieżny ani do $+\infty$, ani do $-\infty$. Czytelnik sam zechce się zastanowić, dlaczego tak jest.

Posługując się pojęciem granicy nieskończonej, łatwo jest podać nieco ogólniejszą wersję Twierdzenia 2.22.

Twierdzenie 2.28. *Każdy ciąg niemalejący $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest albo zbieżny, albo rozbieżny do $+\infty$. Zbieżność (a_n) jest równoważna jego ograniczoności.*

Dowód. Gdy ciąg jest ograniczony, to korzystamy po prostu z Twierdzenia 2.22. Gdy (a_n) jest nieograniczony z góry, to dla każdej liczby $t > 0$ można wskazać takie $n_1 \in \mathbb{N}$, że $a_{n_1} > t$. Dla $m \geq n_1$ mamy $a_m \geq a_{n_1} > t$, gdyż ciąg (a_n) jest niemalejący. Zatem, wprost z definicji, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. \square

Można wykazać, że przy naturalnej umowie

$$\begin{aligned} a + (+\infty) &= +\infty \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}, & -(-\infty) &= +\infty, & +\infty + \infty &= +\infty \\ a \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \quad \text{dla } a > 0, & (+\infty) \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \\ (-\infty) \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty & \text{oraz} & & \frac{1}{\pm\infty} &= 0 \end{aligned}$$

twierdzenie o arytmetycznych własnościach granicy (Twierdzenie 2.10) zachodzi także dla granic nieskończonych. Szczegółowe sprawdzenie tego faktu pozostawiamy zainteresowanym Czytelnikom (patrz też przykład, zamieszczony niżej). Nie można go jednak używać w innych przypadkach, tzn. do obliczania granic postaci

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Ćwiczenie 2.29. Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0, +\infty\}$ podać przykład takich dwóch ciągów x_n, y_n rozbieżnych do $+\infty$, żeby $x_n/y_n \rightarrow a$ dla $n \rightarrow \infty$.

Przykład 2.30. Załóżmy, że $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, natomiast $b_n \rightarrow +\infty$. Sprawdźmy, że wtedy $a_n + b_n \rightarrow +\infty$. Niech $M > 0$ będzie dużą liczbą dodatnią. Dla wszystkich dostatecznie dużych n mamy

$$a_n > a - 1 \quad \text{oraz} \quad b_n > M - a + 1.$$

(Pierwszą nierówność otrzymujemy, biorąc $\varepsilon = 1$ w definicji granicy ciągu, a drugą – biorąc $t = M - a + 1$ w definicji granicy niewłaściwej). Dodając obie nierówności stronami, sprawdzamy, że dla wszystkich dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $a_n + b_n > M$. \square

2.4 Podciągi. Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa.

Definicja 2.31. Jeśli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem, a k_1, k_2, k_3, \dots rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (y_n) , określony wzorem

$$y_n = x_{k_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

nazywamy *podciągiem* ciągu (x_n) .

Mówiąc potocznie, chodzi o wybranie nieskończenie wielu wyrazów ciągu, ale bez zmiany kolejności.

Pojęcie podciągu jest ważne m.in. z następującego powodu.

Stwierdzenie 2.32. *Jeśli ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest zbieżny do g , to każdy podciąg ciągu (a_n) też jest zbieżny do g .*

Łatwy dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Lemat 2.33 (W. Sierpiński). *Każdy ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg monotoniczny.*

Co więcej, można wskazać, jak taki podciąg należy wybierać.

Dowód. Połóżmy, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

Rozważymy osobno dwa przypadki:

1. W każdym ze zbiorów A_n istnieje element największy.
2. W którymś ze zbiorów A_n nie ma elementu największego.

W pierwszym przypadku z (a_n) można wybrać podciąg nierosnący. Pokażemy, jak to zrobić. Niech a_{k_1} będzie największym elementem A_1 . W A_{k_1+1} jest element największy, a_{k_2} ; oczywiście $k_2 \geq k_1 + 1 > k_1$, a przy tym $a_{k_2} \leq a_{k_1}$, bo $a_{k_2} \in A_1$, $a_{k_1} = \sup A_1$. Jeśli wyrazy $a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \dots \geq a_{k_n}$, gdzie $k_1 < k_2 < \dots < k_n$, zostały już wybrane, to dobieramy $k_{n+1} \geq k_n + 1$ tak, aby

$$a_{k_{n+1}} := \sup A_m \quad \text{dla } m = k_n + 1.$$

Definicja jest poprawna, gdyż w każdym zbiorze A_m istnieje element największy. Mamy, jak w pierwszym kroku rozumowania, $k_{n+1} > k_n$ i $a_{k_{n+1}} \leq a_{k_n}$.

W drugim przypadku można wybrać z (a_n) podciąg rosnący. Przypuśćmy, że w A_m nie ma elementu największego. Bierzemy wtedy $k_1 = m$. Zgodnie z założeniem, istnieje $k_2 > m$ takie, że $a_{k_2} > a_{k_1} = a_m$. Gdyby dalej, dla $n > k_2$, nie byłoby już wyrazów większych od a_{k_2} , to wtedy w A_m byłby element największy, wbrew założeniu. Zatem można znaleźć $a_{k_3} > a_{k_2}$, gdzie $k_3 > k_2$. To rozumowanie można powtórzyć dowolnie wiele razy (Czytelnik zechce sam uzupełnić szczegóły). \square

Twierdzenie 2.34 (Bolzano–Weierstrassa). *Każdy ciąg ograniczony $(a_n) \subset \mathbb{R}$ zawiera podciąg zbieżny.*

Dowód. Zgodnie z poprzednim lematem, ciąg (a_n) ma podciąg monotoniczny (a_{k_n}) . Oczywiście każdy podciąg ciągu ograniczonego jest ograniczony. Z Twierdzenia 2.22 wynika więc, że podciąg (a_{k_n}) jest zbieżny. \square

Ponieważ to naprawdę istotne twierdzenie, obejrzyjmy jeszcze jeden dowód.

Dowód drugi. Można bez zmniejszenia ogólności założyć, że $(a_n) \subset [0, 1]$ — gdyby tak nie było, możemy rozpatrzyć ciąg $\lambda(a_n + C)$ dla odpowiednio wybranych C oraz λ ; jego podciągom zbieżnym odpowiadają zbieżne podciągi ciągu (a_n) .

Podzielmy odcinek $[0, 1]$ na 10 równych części, o długości $1/10$. W jednej z nich, powiedzmy $[l_1, r_1]$, jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Wybierzmy jeden z nich, a_{k_1} .

Teraz podzielmy odcinek $[l_1, r_1]$ na 10 równych części, o długości $1/10^2$. W jednej z nich, powiedzmy $[l_2, r_2]$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu o numerach większych od k_1 ; niech a_{k_2} będzie jednym z tych wyrazów.

Przeprowadziwszy m kroków takiego rozumowania, skonstruujemy

- Przedziały domknięte $[0, 1] \supset [l_1, r_1] \supset [l_2, r_2] \supset \dots \supset [l_m, r_m]$ takie, że

$$|l_j - r_j| = \frac{1}{10^j}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

i w każdym z nich jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) ;

- Wyrazy $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}$ takie, że

$$a_{k_j} \in [l_j, r_j] \quad \text{dla } j = 1, \dots, m;$$

W $(m+1)$ -szym kroku dzielimy odcinek $[l_m, r_m]$ na 10 równych części. W jednej z nich jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu o numerach większych od k_m . Nazywamy tę część $[l_{m+1}, r_{m+1}]$ i wybieramy numer $k_{m+1} = s > k_m$ tak, żeby $a_s \in [l_{m+1}, r_{m+1}]$.

W efekcie otrzymujemy nieskończony, zstępujący ciąg przedziałów $[l_m, r_m]$ i podciąg (a_{k_m}) taki, że $a_{k_m} \in [l_m, r_m]$. Ciąg (l_m) jest niemalejący i ograniczony z góry przez 1, a ciąg (r_m) nierosnący i ograniczony z dołu przez 0, zatem oba są zbieżne. Ponadto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = \lim_{m \rightarrow \infty} r_m, \quad \text{gdyż } r_m - l_m = \frac{1}{10^m} \rightarrow 0.$$

Nietrudno wreszcie zauważyć, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{k_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} r_m$$

– to wynika z twierdzenia o trzech ciągach. \square

Uwaga. Czytelnik–koneser zechce zauważyć, że w drugim dowodzie tak naprawdę dobieramy kolejne wyrazy ciągu, próbując stabilizować coraz dłuższe początkowe fragmenty rozwinięć dziesiętnych. Oczywiście, liczbę 10 można zastąpić w rozumowaniu liczbą 2, i nie trzeba od początku zakładać, że wyrazy ciągu są akurat w przedziale jednostkowym, ale wtedy analogia związana z rozwinięciami dziesiętnymi nie jest widoczna.

Wniosek 2.35. *Ciąg ograniczony ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy granice wszystkich jego podciągów są równe.*

Dowód. Jest rzeczą praktycznie oczywistą, że jeśli ciąg a_n ma granicę, to wszystkie jego podciągi są zbieżne do tej samej granicy. Jeśli (a_n) jest rozbieżny (ale ograniczony), to wobec Tw. Bolzano–Weierstrassa ma zbieżny podciąg, $a_{n_k} \rightarrow g$. Ponieważ g nie jest granicą ciągu (a_n) , to dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$ poza przedziałem $(g - \varepsilon_0, g + \varepsilon_0)$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu; z nich wybieramy inny podciąg zbieżny, którego granica g' – zgodnie ze stwierdzeniem 2.13 – różni się od g co najmniej o ε_0 . \square

Czasem bywa tak, że umiemy wykazać zbieżność kilku różnych podciągów danego ciągu (np. niektóre są rosnące, a inne malejące, a wszystkie są ograniczone), dobranych tak, że każdy wyraz ciągu należy do jednego z tych podciągów. Wtedy przydaje się następujący prosty fakt.

Stwierdzenie 2.36. *Jeśli ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ma k różnych podciągów zbieżnych do tej samej granicy g , i każdy wyraz ciągu (a_n) jest wyrazem któregoś z tych podciągów (tzn. zbiór $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest sumą zbiorów wyrazów rozważanych podciągów), to $a_n \rightarrow g$ dla $n \rightarrow \infty$.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wybierzmy liczby $l_1, \dots, l_k \in \mathbb{N}$ tak, aby spełniony był warunek:

Jeśli a_m jest wyrazem j -tego z rozważanych podciągów (gdzie $j = 1, \dots, k$) i numer $m > l_j$, to $|a_m - g| < \varepsilon$.

(Innymi słowy, liczbę l_j dobieramy do ε , korzystając ze zbieżności j -tego podciągu). Połóżmy $l_0 = \max(l_1, \dots, l_k)$. Ponieważ każdy wyraz ciągu (a_n) jest wyrazem któregoś z k rozważanych podciągów, więc dla każdego $m > l_0$ z pewnością $|a_m - g| < \varepsilon$. \square

Podamy teraz ważne twierdzenie, które podaje warunek równoważny zbieżności ciągu.

Twierdzenie 2.37 (warunek Cauchy'ego). *Ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Cauchy'ego:*

(C) *Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $m, k > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|a_m - a_k| < \varepsilon$.*

Dowód. Część I. (\Rightarrow) Niech $\varepsilon > 0$. Jeśli $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, to istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - g| < \varepsilon/2$ dla wszystkich $n > n_\varepsilon$. Weźmy teraz dwie liczby $m, k > n_\varepsilon$. Wówczas

$$|a_m - a_k| = |(a_m - g) + (g - a_k)| \leq |a_m - g| + |a_k - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zatem ciąg (a_n) spełnia warunek (C) – właśnie pokazaliśmy, jak dobrać n_ε do liczby $\varepsilon > 0$.

Część II. (\Leftarrow) Łatwo sprawdzić, że każdy ciąg spełniający (C) jest ograniczony: stosujemy warunek Cauchy'ego dla $\varepsilon = 1$ i widzimy, że dostatecznie duże wyrazy różnią się o mniej niż 1, a więc muszą zawierać się w pewnym przedziale, np. przedziale $(a_{n_1+1} - 1, a_{n_1+1} + 1)$; skończony zbiór wyrazów a_1, \dots, a_{n_1} też jest ograniczony.

Stosujemy zatem twierdzenie Bolzano–Weierstrassa i wybieramy z (a_n) podciąg $a_{n_k} \rightarrow g \in \mathbb{R}$ dla $k \rightarrow \infty$. Pokażemy, że g jest granicą całego ciągu (a_n) . Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje takie $l_1 \in \mathbb{N}$, że

$$|a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n_k > l_1,$$

a ponadto istnieje takie $l_2 \in \mathbb{N}$, że $|a_m - a_k| < \varepsilon/2$ dla $m, k > l_2$. Niech $l_3 = \max(l_1, l_2)$. Ustalając *jakikolwiek* numer $n_k > l_3 \geq l_1$ i biorąc dowolne $m > l_3 \geq l_2$, możemy oszacować

$$|a_m - g| = |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - g| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To kończy dowód twierdzenia. \square

Warunek Cauchy'ego odgrywa ważną rolę z kilku powodów. Po pierwsze, pozwala stwierdzić zbieżność ciągu bez wskazywania konkretnej granicy, a także pozwala stwierdzić, że jakiś ciąg jest rozbieżny. Proszę zauważyć, że wcześniej, sprawdzając rozbieżność ciągu $a_n = (-1)^n$, sprawdziliśmy tak naprawdę, że warunek Cauchy'ego nie zachodzi dla $\varepsilon = 1$. Po drugie, można posłużyć się warunkiem Cauchy'ego, żeby *skonstruować* liczby rzeczywiste, mając do dyspozycji liczby wymierne; jest to konstrukcja na tyle ogólna, że używa się jej w wielu działach matematyki – do tej sprawy wrócimy jeszcze przy innej okazji.

Stwierdzenie 2.38 (kryterium spełniania warunku Cauchy’ego). *Założmy, że a_1, a_2, \dots są dodatnie, a ponadto istnieje taka stała $C \in \mathbb{R}$, że*

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq C \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Jeśli ciąg $(x_n) \subset \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a_n \quad \text{dla dostatecznie dużych } n \in \mathbb{N},$$

to (x_n) spełnia warunek Cauchy’ego.

Dowód. Ciąg $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ jest rosnący (bo a_j są dodatnie) i ograniczony z góry przez C . Zatem (s_n) jest zbieżny i spełnia warunek Cauchy’ego.

Niech $m > k$ będą dostatecznie duże. Piszemy, korzystając z nierówności trójkąta, założeń i monotoniczności ciągu s_n ,

$$\begin{aligned} |x_m - x_k| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq a_{m-1} + a_{m-2} + \dots + a_k \\ &= s_{m-1} - s_{k-1} = |s_{m-1} - s_{k-1}|. \end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Dla wszystkich dostatecznie dużych m, k mamy $|x_m - x_k| \leq |s_{m-1} - s_{k-1}| < \varepsilon$, gdyż (s_n) spełnia warunek Cauchy’ego. Zatem (x_n) też spełnia warunek Cauchy’ego. \square

Przykład 2.39. Nietrudno zauważyć, że jeśli dla danego ciągu (x_n) umiemy wskazać taką stałą $M > 0$ i taką liczbę $q \in (0, 1)$, że

$$|x_{n+1} - x_n| \leq Mq^n \quad \text{dla dostatecznie dużych } n \in \mathbb{N},$$

to założenia powyższego stwierdzenia są spełnione. Istotnie, biorąc wtedy $a_n = Mq^n$ mamy

$$s_n = Mq + Mq^2 + \dots + Mq^n = Mq \frac{1 - q^n}{1 - q} \leq \frac{Mq}{1 - q} \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

To wynika ze szkolnego wzoru na sumę skończonego postępu geometrycznego; patrz także Lemat 1.12 i szkic jego dowodu.

Ćwiczenie 2.40 (wzór na sumę szeregu geometrycznego). Proszę wykazać, że jeśli $|q| < 1$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + \dots + q^{n-1}) = \frac{1}{1 - q}.$$

Rozdział 3

Funkcja wykładnicza i logarytm

Potrafimy już definiować potęgi liczb dodatnich o wykładniku wymiernym: jeśli $a > 0$ i $x = p/q \in \mathbb{Q}$ dla $p, q \in \mathbb{N}$, to naturalnie jest przyjąć

$$a^x = \left(a^{1/q}\right)^p = \underbrace{a^{1/q} \cdot \dots \cdot a^{1/q}}_{p \text{ razy}}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Zasadniczym celem tego rozdziału jest wskazanie, jak można określać potęgę a^x liczby $a > 0$ o dowolnym wykładniku rzeczywistym x – także *niewymiernym*, i jak określić logarytm, to znaczy funkcję, która dla danych liczb dodatnich $y, a, a \neq 1$, wskazuje taką liczbę $x \in \mathbb{R}$, że $a^x = y$.

Poznamy przy okazji cały szereg fundamentalnych własności tych funkcji. Jak Czytelnik być może zauważy, w nazwach niektórych z tych własności figurują takie słowa jak *ciągłość* i *różniczkowalność*. Na razie to tylko terminy; pełną treść nadamy im wtedy, gdy zajmiemy się bliżej systematycznym badaniem własności funkcji ciągłych i funkcji różniczkowalnych.

Uwaga. W jednym z późniejszych rozdziałów zajmiemy się wprowadzeniem funkcji wykładniczej w dziedzinie zespolonej. Do tego jednak przyda się nam nieco więcej narzędzi.

3.1 Funkcja wykładnicza

Lemat 3.1 (o ciągach szybko zbieżnych do 1). *Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $na_n \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$. Wtedy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n = 1.$$

Dowód. Ponieważ $na_n \rightarrow 0$, więc $|a_n| \leq |na_n| < 1/2$ i $|a_n| < \frac{1}{2} < |1 + a_n|$ dla dostatecznie dużych n ; dla takich n skorzystamy dwukrotnie z nierówności Bernoulliego. (Czytelnik zechce sprawdzić, że dzięki poprzedniemu zdaniu wszystkie założenia tej nierówności są spełnione). Po pierwsze,

$$\frac{1}{(1 + a_n)^n} = \left(1 - \frac{a_n}{1 + a_n}\right)^n \geq 1 - \frac{na_n}{1 + a_n}.$$

Po drugie,

$$(1 + a_n)^n \geq 1 + na_n > 0, \quad \text{więc} \quad \frac{1}{(1 + a_n)^n} \leq \frac{1}{1 + na_n}.$$

Zatem, dla wszystkich dostatecznie dużych n ,

$$1 - \frac{na_n}{1 + a_n} \leq \frac{1}{(1 + a_n)^n} \leq \frac{1}{1 + na_n}$$

Ponieważ $na_n \rightarrow 0$ (i oczywiście tym bardziej $a_n \rightarrow 0$) dla $n \rightarrow \infty$, więc teza lematu łatwo wynika z twierdzenia o 3 ciągach. \square

Twierdzenie 3.2 (własności funkcji wykładniczej). Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ciąg

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

jest zbieżny do granicy $a(x) \in \mathbb{R}$, która ma następujące własności:

(E1) $a(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $a(0) = 1$;

(E2) $a(x)a(y) = a(x + y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$;

(E3) $a(x) \geq 1 + x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$;

(E4) (Monotoniczność): $a(x) > a(y)$ dla wszystkich $x > y$;

(E5) $a(x) \leq 1/(1 - x)$ dla każdego $x < 1$;

(E6) $|a(x) - 1 - x| \leq 2|x|^2$ dla każdego $|x| \leq \frac{1}{2}$;

(E7) (Ciągłość): jeśli $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$, to $a(x_n) \rightarrow a(x)$;

(E8) (Różniczkowalność): jeśli $h_n \rightarrow 0$ i $h_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(x + h_n) - a(x)}{h_n} = a(x)$$

Dowód. Plan postępowania jest taki: wykażemy, że granica $a(x)$ ciągu $a_n(x)$ istnieje dla każdego x , a potem stopniowo będziemy dowodzić jej własności.

Krok 1. Najpierw sprawdzimy, że ciąg $a_n(x)$ jest monotoniczny od pewnego miejsca. Ustalmy $x \in \mathbb{R}$. Rozpatrujemy odtąd tylko $n > |x|$; wtedy $(n+x)/n = 1 + \frac{x}{n} > 0$ i $a_n(x) > 0$, zatem

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}} \geq \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{n}{n+x}.$$

Zapiszmy iloraz potęg, występujący w ostatnim wyrażeniu, w postaci $(1 + \dots)^{n+1}$ i skorzystajmy wtedy z nierówności Bernoulliego:

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}} &= \left(\frac{(n+1+x)n}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \\ &\quad \text{gdyż } (n+1)(n+x) - x = (n+1+x)n \\ &\geq 1 - \frac{x}{(n+x)} = \frac{n}{n+x}. \end{aligned}$$

(Dla $x < 0$ oczywiście wolno było nierówność Bernoulli'ego stosować; dla $x \geq 0$ jest $|\frac{x}{(n+1)(n+x)}| \leq \frac{x}{(n+x)} \leq 1$). Zatem istotnie ciąg $a_n(x)$ jest niemalejący dla $n > |x|$.

Krok 2. Niech $x < 0$. Wtedy dla $n > |x|$ zachodzą nierówności

$$0 < 1 + \frac{x}{n} < 1, \quad 0 < a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < 1,$$

a to znaczy, że ciąg $a_n(x)$ jest ograniczony. Ponieważ jest niemalejący od pewnego miejsca, więc jest zbieżny, a jego granica $a(x) > 0$, bo dzięki monotoniczności $a(x) \geq a_m(x) > 0$ dla $m > |x|$.

Krok 3. Dla $x > 0$ posłużymy się sztuczką. Mianowicie, $1 - \frac{x^2}{n^2} = (1 - \frac{x}{n})(1 + \frac{x}{n})$, a zatem dla $n > |x|$ możemy napisać

$$a_n(x) = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}{a_n(-x)}.$$

Z lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1 wiemy, że licznik jest zbieżny do 1, a z poprzedniego kroku dowodu – że mianownik jest zbieżny do $a(-x) > 0$. Zatem, z twierdzenia o granicy ilorazu ciągów, $a_n(x) \rightarrow a(x) = 1/a(-x) > 0$. Dla $x = 0$ oczywiście $a_n(0) \equiv 1 \rightarrow 1$. To daje istnienie $a(x)$ dla każdego x i własność (E1).

Krok 4. Teraz udowodnimy, że własności (E2)–(E6) istotnie przysługują $a(x)$.

Z twierdzenia o granicy ilorazu

$$\frac{a(x)a(y)}{a(x+y)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n}{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \underbrace{\frac{\frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n}}}_{=(\text{ozn.}) a_n}\right)^n$$

Łatwo zauważyć, że $na_n \rightarrow 0$, więc z lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1 otrzymujemy $a(x)a(y)/a(x+y) = 1$, czyli własność (E2).

Ponieważ, dzięki nierówności Bernoulliego, $a_n(x) \geq 1 + x$ dla wszystkich $n > |x|$ i wszystkich $x \in \mathbb{R}$, więc na mocy stwierdzenia o szacowaniu granic także $a(x) \geq 1 + x$. To daje własność (E3).

Sprawdzimy monotoniczność, czyli własność (E4). Niech $x > y$. Korzystając z (E1)–(E3) piszemy

$$a(x) - a(y) \stackrel{(E2)}{=} a(y)a(x-y) - a(y) = a(y)(a(x-y) - 1) \stackrel{(E1), (E3)}{\geq} a(y)(x-y) > 0$$

gdyż $a(y) > 0$ i $x - y > 0$. Zatem $a(x) > a(y)$ dla $x > y$.

Własność (E5) łatwo wynika z (E3) i (E2). Istotnie, $a(-x) \geq 1 - x > 0$ dla $x < 1$, a więc dla takich x jest

$$a(x) = \frac{1}{a(-x)} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Aby wykazać (E6), stosujemy dla $|x| \leq 1/2 < 1$ własności (E3) i (E5):

$$0 \stackrel{(E3)}{\leq} a(x) - 1 - x \stackrel{(E5)}{\leq} \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{1 - 1 + x - x + x^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} \leq 2|x|^2$$

(w ostatniej nierówności używamy warunku $|x| \leq \frac{1}{2}$).

Krok 5. Na koniec wykażemy własności (E7) i (E8). Jeśli $x_n \rightarrow x$, to wówczas $|x_n - x|^2 < |x_n - x| < 1/2$ dla dostatecznie dużych n , więc oznaczając dla krótkości $r_n = x_n - x$, otrzymujemy z nierówności trójkąta

$$|a(r_n) - 1| \leq |a(r_n) - 1 - r_n| + |r_n| \stackrel{(E6)}{\leq} 2r_n^2 + |r_n| \leq 3|r_n| = 3|x_n - x|.$$

Zatem, posługując się twierdzeniem o 3 ciągach, łatwo wnioskujemy, że $a(x_n - x) = a(r_n) \rightarrow 1$ dla $n \rightarrow \infty$. Ponadto,

$$0 \leq |a(x_n) - a(x)| \stackrel{(E2)}{=} |a(x)| \cdot |a(x_n - x) - 1|,$$

więc także $a(x_n) \rightarrow a(x)$.

Została nam ostatnia własność, (E8). Piszemy

$$\frac{a(x + h_n) - a(x)}{h_n} \stackrel{(E2)}{=} \frac{a(x)a(h_n) - a(x)}{h_n} = a(x) \cdot \underbrace{\frac{a(h_n) - 1}{h_n}}_{=(ozn.) U_n} \equiv a(x) \cdot U_n.$$

Skoro $h_n \rightarrow 0$, to dla dostatecznie dużych n jest $|h_n| < 1/2$ i wtedy

$$0 \leq |U_n - 1| = \left| \frac{a(h_n) - 1}{h_n} - 1 \right| = \left| \frac{a(h_n) - 1 - h_n}{h_n} \right| \stackrel{(E6)}{\leq} \frac{2|h_n|^2}{|h_n|} = 2|h_n| \rightarrow 0,$$

a więc $U_n \rightarrow 1$ dla $n \rightarrow \infty$. Zatem, $a(x)U_n \rightarrow a(x)$ dla $n \rightarrow \infty$, a to właśnie należało udowodnić.

Dowód całego twierdzenia jest teraz zakończony. \square

Definicja 3.3 (liczba e i funkcja \exp). Kładziemy

$$e = a(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2,718281828459045 \dots$$

Dla $x \in \mathbb{R}$ piszemy także $\exp(x) = a(x)$, gdzie $a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$. Funkcja \exp nazywa się *funkcją wykładniczą* (zmiennej rzeczywistej).

Zatem,

$$e = \exp(1).$$

(Warto zauważyć, że wszystkie przytoczone wyżej cyfry rozwinięcia dziesiętnego e znał Leonhard Euler przed 1750 rokiem!)

Wiemy już o funkcji wykładniczej bardzo wiele. Udowodnimy jeszcze jedną jej własność: każda liczba dodatnia jest wartością tej funkcji.

Stwierdzenie 3.4. Dla każdego $y > 0$ istnieje dokładnie jedna liczba $x \in \mathbb{R}$ taka, że $y = \exp(x)$.

Dowód. Wystarczy przeprowadzić dowód dla $y \in (0, 1)$, gdyż $1 = \exp(0)$ i jeśli $z > 1$, to $1/z = y \in (0, 1)$, więc z równości $y = \exp(x)$ i $\exp(x)\exp(-x) = 1$ wynika, że $\exp(-x) = z$.

Niech przeto $y \in (0, 1)$. Połóżmy $A = \{t \in \mathbb{R} : \exp(t) \leq y\}$. Jeśli $t \geq 0$, to dzięki (E3) jest $\exp(t) \geq 1 + t \geq 1 > y$, a więc $t \notin A$, tzn. $A \subset (-\infty, 0)$. Ponadto, dla $n \in \mathbb{N}$ mamy, z własności (E5) użytej dla $x = -n$,

$$\exp(-n) \leq \frac{1}{1+n},$$

a więc $-n \in A$ dla wszystkich n dostatecznie dużych (wystarczy, by $1/(1+n) < \exp(y)$, tzn. aby $n+1 > \exp(-y)$). Zatem zbiór A jest niepusty i ograniczony z góry, a więc istnieje $x = \sup A \in \mathbb{R}$. *A priori*, są trzy możliwości:

$$\exp(x) > y, \quad \exp(x) < y, \quad \exp(x) = y.$$

Wykażemy, że pierwsze dwie prowadzą do sprzeczności. Przypuśćmy więc, że $\exp(x) < y$. Z własności (E7) wynika, że dla $n \rightarrow \infty$ ciąg $\exp(x + \frac{1}{n}) \rightarrow \exp(x) < y$, a więc, dzięki Stwierdzeniu 2.13, $\exp(x + \frac{1}{n}) < y$ dla wszystkich dostatecznie dużych n . Innymi słowy, $\sup A = x < x + \frac{1}{n} \in A$, to zaś jest sprzeczność. Nie może więc być $\exp(x) < y$.

Gdyby $\exp(x) > y$, to, podobnie jak przed chwilą, mielibyśmy $\exp(x - \frac{1}{n}) \rightarrow \exp(x) > y$, tzn. dla wszystkich dostatecznie dużych n byłoby

$$\exp(x - \frac{1}{n}) > y \geq \exp t \quad \text{dla każdego } t \in A.$$

Z monotoniczności, patrz własność (E4), otrzymalibyśmy $x - \frac{1}{n} > t$ dla każdego $t \in A$, ale $x - \frac{1}{n} < x = \sup A$, więc byłaby to sprzeczność z definicją kresu górnego.

Musi zatem być $\exp(x) = y$. Jednoznaczność wynika z monotoniczności \exp . \square

Definicja 3.5 (logarytm naturalny). Dla liczby $y > 0$ definiujemy: $\ln y = x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ jest jedyną liczbą taką, że $\exp(x) = y$.

Własności funkcji wykładniczej nietrudno przełożyć na odpowiednie własności logarytmu naturalnego.

Twierdzenie 3.6 (własności logarytmu naturalnego). *Logarytm naturalny $\ln y$ jest określony dla wszystkich liczb $y > 0$ i ma następujące własności:*

(L1) Dla wszystkich $x, y > 0$ jest $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; $\ln e = 1$ i $\ln 1 = 0$.

(L2) (Monotoniczność logarytmu) Dla wszystkich $y_1 > y_2 > 0$ mamy $\ln y_1 > \ln y_2$.

(L3) Dla wszystkich $y > 0$ zachodzą nierówności

$$1 - \frac{1}{y} \leq \ln y \leq y - 1.$$

Równoważnie,

$$\frac{t}{t+1} \leq \ln(1+t) \leq t \quad \text{dla wszystkich } t > -1.$$

(L4) Jeśli $t_n > -1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $t_n \rightarrow 0$, to $\ln(1+t_n) \rightarrow 0 = \ln 1$.

(L5) (Ciągłość logarytmu) Jeśli $y_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $y_n \rightarrow y > 0$ dla $n \rightarrow \infty$, to wówczas $\ln y_n \rightarrow \ln y$ dla $n \rightarrow \infty$.

(L6) (Różniczkowalność logarytmu) Jeśli $h_n \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$, a także $y > 0$ i $y + h_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(y + h_n) - \ln y}{h_n} = \frac{1}{y}.$$

Dowód. Udowodnimy (L1). Ponieważ $x, y > 0$, więc istnieją $t, w \in \mathbb{R}$ takie, że $\exp(t) = x$, $\exp w = y$ (czyli: $t = \ln x$, $w = \ln y$). Z własności (E2) funkcji \exp otrzymujemy

$$xy = \exp(t) \exp(w) = \exp(t + w),$$

tzn. wprost z definicji logarytmu $\ln xy = t + w = \ln x + \ln y$. Równości $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$ wynikają stąd, że $\exp(1) = e$, $\exp(0) = 1$.

Nietrudno zauważyć, że logarytm jest monotoniczny: gdyby $x_1 = \ln y_1 \leq \ln y_2 = x_2$ dla pewnych $y_1 > y_2 > 0$, to byłoby, dzięki monotoniczności funkcji wykładniczej, $y_1 = \exp(x_1) \leq \exp(x_2) = y_2$, a to jest sprzeczność.

Teraz sprawdzimy, że zachodzą nierówności podane w punkcie (L3). Niech $x = \ln y$. Mamy $\exp(x) \geq 1 + x$, tzn. $\ln y = x \leq \exp(x) - 1 = y - 1$. Ponieważ $\exp(x) < 1/(1-x)$ dla $x < 1$, a z monotoniczności wynika, że $\ln y < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y < e$, więc przy dodatkowym założeniu $x = \ln y < 1$, $y > 0$, jest

$$y = \exp(x) \leq \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\ln y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} \geq 1 - \ln y \Leftrightarrow \ln y \geq 1 - \frac{1}{y}.$$

Gdy $x = \ln y \geq 1$, to nierówność jest banalna, gdyż $1 - 1/y < 1$ dla $y > 0$. To kończy dowód pierwszej wersji (L3); drugą otrzymujemy, podstawiając $y = 1 + t$ (zauważmy: $y > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t > -1$).

Własność (L4) jest bardzo prosta. Otrzymujemy ją, stosując nierówności z punktu (L3) i twierdzenie o trzech ciągach.

Przejdźmy do dowodu ciągłości, tzn. do własności (L5). Ponieważ logarytm iloczynu jest sumą logarytmów, więc

$$\ln y_n - \ln y = \ln \left(y \cdot \left(1 + \frac{y_n - y}{y} \right) \right) - \ln y = \ln \left(1 + \underbrace{\frac{y_n - y}{y}}_{= (\text{ozn.}) t_n} \right),$$

gdzie $-1 < t_n = (y_n - y)/y = -1 + \frac{y_n}{y} \rightarrow 0$, gdy $y_n \rightarrow y$. Wiemy już jednak, że $\ln(1 + t_n) \rightarrow 0$ dla każdego ciągu $t_n \rightarrow 0$, $t_n > -1$; zatem $\ln y_n \rightarrow \ln y$, gdy $y_n, y > 0$ i $y_n \rightarrow y$ dla $n \rightarrow \infty$. To kończy dowód własności (L4).

Na koniec wykażemy różniczkowalność logarytmu. Zauważmy, że

$$\frac{\ln(y + h_n) - \ln y}{h_n} = \frac{\ln y + \ln \left(1 + \frac{h_n}{y} \right) - \ln y}{h_n} = \frac{\ln(1 + t_n)}{t_n} \cdot \frac{1}{y} \quad \text{dla } t_n = \frac{h_n}{y} \neq 0,$$

Wystarczy więc wykazać, że dla każdego ciągu $t_n \rightarrow 0$, gdzie $t_n \neq 0$ i $t_n > -1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, mamy $\frac{1}{t_n} \ln(1 + t_n) \rightarrow 1$. Oznaczmy $s_n = \ln(1 + t_n)$; wtedy $\exp(s_n) - 1 = t_n$ i $s_n \neq 0$. Zatem

$$\frac{\ln(1 + t_n)}{t_n} = \frac{s_n}{\exp(s_n) - 1}.$$

Sprawdziliśmy przed chwilą, dowodząc własności (L4), że $s_n = \ln(1 + t_n) \rightarrow 0$. Korzystając z różniczkowalności funkcji wykładniczej, patrz własność (E8), wnioskujemy, że $s_n/(\exp(s_n) - 1) \rightarrow 1$ dla $n \rightarrow \infty$. Zatem także $\frac{1}{t_n} \ln(1 + t_n) \rightarrow 1$. \square

Dysponując już funkcją wykładniczą i logarytmem, nietrudno jest zdefiniować potęgę dowolnej liczby dodatniej o dowolnym wykładniku rzeczywistym.

Definicja 3.7. Dla wszystkich $a > 0$ i wszystkich $x \in \mathbb{R}$ przyjmujemy

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

W szczególności, dla liczby e przyjęta definicja daje, zgodnie z naturalnym oczekiwaniem, $e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x)$, gdyż $\ln e = 1$. Zauważmy też od razu, że dla $n \in \mathbb{N}$ jest, dzięki własności (L1) logarytmu,

$$a^n = \exp(n \ln a) = \exp(\underbrace{\ln a + \ln a + \dots + \ln a}_{n \text{ razy}}) = \exp(\ln(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}})),$$

co zgadza się ze zwykłą definicją potęgi o wykładniku naturalnym. Nietrudno podać listę własności potęg, podawaną na ogół w szkole¹

Ćwiczenie 3.8. Niech $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Proszę samodzielnie, korzystając z (E1)–(E8) oraz (L1)–(L5), udowodnić następujące własności potęg:

- (i) $a^{x+y} = a^x a^y$, a ponadto $a^{-x} = 1/a^x$ i $a^0 = 1$.
- (ii) $(a^x)^y = a^{xy}$ i $a^x b^x = (ab)^x$.
- (iii) Jeśli $a > 1$, to $a^x < a^y$ dla wszystkich $x < y$, a jeśli $a \in (0, 1)$, to $a^x > a^y$ dla wszystkich $x < y$.
- (iv) Jeśli ciąg $x_n \rightarrow x$ dla $n \rightarrow \infty$, to wówczas $a^{x_n} \rightarrow a^x$ dla $n \rightarrow \infty$.
- (v) Jeśli $a < b$, to $a^x < b^x$ dla wszystkich $x > 0$ oraz $a^x > b^x$ dla wszystkich $x < 0$.

Możemy także zdefiniować logarytm przy dowolnej podstawie $a > 0$, $a \neq 1$.

Definicja 3.9. Jeśli $a > 0$ i $a \neq 1$, to dla wszystkich $y > 0$ przyjmujemy

$$\log_a y = x \iff a^x = y.$$

Ćwiczenie 3.10. Posługując się udowodnionymi już własnościami funkcji wykładniczej i logarytmu, sprawdzić, że powyższa definicja jest poprawna (tzn. przy podanych założeniach o a i y liczba $\log_a y$ istnieje i jest określona jednoznacznie). Dlaczego przyjmujemy, że $a \neq 1$?

Ćwiczenie 3.11. Posługując się znanymi własnościami potęg i logarytmu naturalnego, wykazać, że logarytm przy dowolnej podstawie $a > 0$, $a \neq 1$ ma następujące własności:

¹Odbywa się to zwykle bez wyjaśnienia, jak należy rozumieć napis a^x , gdy liczba x nie jest wymierna, i dlaczego wtedy odpowiednie równości mają sens – prawda jest taka, że nie da się wtedy uniknąć jakiejś wersji przejść granicznych...

- 1) $\log_a y = (\ln y)/(\ln a)$ dla wszystkich $y > 0$.
- 2) Jeśli $b > 0, b \neq 1$, to $\log_a y = (\log_b y)/(\log_b a)$ dla wszystkich $y > 0$.
- 3) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ dla wszystkich $x, y > 0$.
- 4) $\log_a(y^x) = x \log_a y$ dla wszystkich $y > 0, x \in \mathbb{R}$.

Warunek 2) bywa nazywany *wzorem na zamianę podstawy logarytmu*.

3.2 Charakteryzacja funkcji wykładniczej

Co ciekawe, niewielka część własności funkcji wykładniczej i logarytmu określa każdą z tych funkcji jednoznacznie. Oto odpowiednie twierdzenia.

Twierdzenie 3.12 (charakteryzacja funkcji exp). *Jeśli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia trzy warunki:*

(i) *Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ jest $f(x + y) = f(x)f(y)$,*

(ii) $f(1) = e$,

(iii) *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i każdego ciągu $x_n \rightarrow x$ ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x)$,*

to wówczas

$$f(x) = \exp(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Dowód. Plan dowodu jest bardzo prosty. Korzystając z dwóch pierwszych założeń, dowodzi się, że $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i sprawdza się równość (3.1) dla wszystkich $x \in \mathbb{Q}$ (niezbyt trudna indukcja). Następnie, korzystając z trzeciego założenia i gęstości \mathbb{Q} w \mathbb{R} , dowodzi się (3.1) dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Oto szczegóły:

Krok 1. Z pierwszego założenia otrzymujemy $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x)^2 \geq 0$ i $f(0)^2 = f(0)$. Liczba $f(0)$ jest więc zerem lub jedynką. Nie może być jednak $f(0) = 0$, bo wtedy mielibyśmy $f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = 0$ dla wszystkich x , a wiemy, że $f(1) = e$. Zatem $f(0) = 1$, co oznacza, że $f(x)f(-x) = f(0) = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Innymi słowy, liczba $f(x)$ jest różna od zera i nieujemna.

Stwierdziliśmy więc, że $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $f(-x) = 1/f(x)$.

Krok 2. Wiemy, że $f(1) = e$. Jeśli przyjąć, że $f(m) = e^m$, to $f(m + 1) = f(m)f(1) = e^m e = e^{m+1}$. Przez indukcję wnioskujemy, że $f(m) = e^m$ dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$. Ponadto, dla $m \in \mathbb{N}$ mamy $f(-m)e^m = f(-m)f(m) = 1$, tzn. $f(-m) = e^{-m}$. Zatem

$$f(m) = e^m = \exp(m) \quad \text{dla wszystkich } m \in \mathbb{Z}.$$

Krok 3. Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$f\left(\frac{1}{n}\right)^n = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ razy}}\right) = f(1) = e,$$

stąd zaś $f(1/n) = e^{1/n}$. Przez indukcję, podobnie jak w poprzednim kroku stosując własność $f(x+y) = f(x)f(y)$, dowodzimy teraz, że $f(m/n) = e^{m/n}$. Wreszcie, ponieważ $f(-x) = 1/f(x)$, więc

$$f(x) = e^x = \exp(x) \quad \text{dla wszystkich } x = p/q \in \mathbb{Q}.$$

Krok 4. Niech $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Istnieje wtedy (patrz Twierdzenie 1.18) ciąg liczb wymiernych x_n zbieżny do x . Z założenia (iii) oraz ciągłości funkcji wykładniczej wnioskujemy, że

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = \exp(x).$$

Sprawdziliśmy więc, że $f(x) = \exp(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. \square

Uwaga. Drugie założenie Twierdzenia 3.12 ma charakter *normalizujący*: gdyby przyjąć, że $f(1) = a > 0$, to byłoby $f(x) = a^x$. Zamiast zakładać, że $f(1) = e$, można też przyjąć warunek

(ii)' Dla każdego ciągu różnych od zera liczb $x_n \rightarrow 0$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = 1.$$

Zadanie 3.13 (dla zainteresowanych rozumieniem teorii). Wykazać, że teza Twierdzenia 3.12 zachodzi, gdy założenie (ii) zastąpimy powyższym warunkiem (ii)'. Zastanowić się, czy założenie (iii) można wtedy ominąć.

Wskazówka: co trzeba zmienić w pierwszym kroku dowodu? Jak wykazać, że $f(1) = e$? (Wolno używać wszystkich udowodnionych własności funkcji wykładniczej).

Zadanie 3.14 (łatwiejsze od poprzedniego). Naśladować dowód ostatniego twierdzenia, wykazać, że jeśli funkcja $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

- (a) Dla wszystkich $x, y > 0$ jest $g(xy) = g(x) + g(y)$,
- (b) $g(e) = 1$,
- (c) Dla każdego $x > 0$ i każdego ciągu liczb dodatnich $x_n \rightarrow x$ ciąg $g(x_n)$ jest zbieżny do granicy $g(x)$,

to wówczas

$$g(x) = \ln(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Przekonamy się za pewien czas, że funkcję wykładniczą i logarytm naturalny można określić także dla zespolonych wartości zmiennej. Trzeba to jednak zrobić nieco inaczej (Czytelnik zauważył zapewne, że w dowodach w tym rozdziale wielokrotnie korzystaliśmy z własności ciągów monotonicznych i nierówności Bernoulliego, a tych narzędzi trudno używać w \mathbb{C}). Wygodnie będzie zająć się najpierw *szeregami*.

Rozdział 4

Szeregi. Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej.

Pojęcie szeregu wprowadza się po to, żeby można było ściśle mówić o sumach nieskończenie wielu składników. Z takimi sumami spotkaliśmy się już, mówiąc o ciągach. Np. dla $|q| < 1$ jest

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + \dots + q^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}. \quad (4.1)$$

Pierwszą równość traktujemy jako definicję napisu, występującego z lewej strony; druga równość wynika ze wzoru na różnicę $(n + 1)$ -szych potęg, a trzecia – z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy i stąd, że $q^n \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$, gdy $|q| < 1$.

Nieskończone sumowanie wymaga ostrożności: nie wolno w tym przypadku bezkarnie korzystać z przemienności i łączności dodawania. Gdyby np. suma $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ miała skończoną wartość S i gdyby nieskończone dodawanie było przemienne i łączne, to mielibyśmy

$$\begin{aligned} S &= (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= -1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = -1 + 0 + 0 + \dots \\ &= -1 - \left((-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \right) \end{aligned}$$

tzn. przy, jak się wydaje, naturalnej i sensownej umowie $0 + 0 + 0 + \dots = 0$, byłyby $S = 0 = -1 = -1 - S$, co pokazuje, że S byłaby jednocześnie każdą z liczb $0, -1, -\frac{1}{2}$, tak zaś oczywiście nie może być!

Dlatego zaczniemy od definicji, służących ustaleniu, kiedy można mówić o sumie nieskończenie wielu składników.

Definicja 4.1. Szereg (liczb rzeczywistych) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ to para ciągów, $(a_n) \subset \mathbb{R}$ i $s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg (s_n) nazywamy ciągiem *sum częściowych* szeregu. Liczby a_n to *wyrazy szeregu*.

Definicja 4.2. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny* wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest zbieżny do skończonej granicy. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to

liczbę

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

nazywamy jego sumą i piszemy¹

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Szereg, który nie jest zbieżny, nazywa się rozbieżny.

(Czasem wygodnie jest numerować ciąg wyrazów szeregu za pomocą liczb całkowitych większych od pewnej ustalonej liczby $n_0 \in \mathbb{Z}$; będziemy to robić bez wahania.)

Przykład 4.3 (szereg geometryczny). Jeśli $q \in \mathbb{R}$ i $|q| < 1$, to wtedy szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

jest zbieżny, a jego suma jest równa $1/(1-q)$. To wynika ze wzoru na sumę skończonego postępu geometrycznego i zostało wyjaśnione, gdy podaliśmy wzór (4.1).

Stwierdzenie 4.4 (warunek Cauchy'ego). Szereg liczb rzeczywistych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek Cauchy'ego dla szeregów:

(CS) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $m > k > n_\varepsilon$ jest

$$|a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Dowód. Mamy $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m = s_m - s_k$, więc (CS) to po prostu warunek Cauchy'ego dla ciągu (s_n) , równoważny (jak wiemy) zbieżności (s_n) , czyli – wprost z definicji – zbieżności szeregu. \square

Dla porządku odnotujmy jeszcze jeden prosty fakt. (Jego sens jest jasny: analizując zbieżność szeregu, wolno odrzucić ustaloną liczbę początkowych wyrazów.)

Stwierdzenie 4.5. Jeśli $k_0 \in \mathbb{N}$, to szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=k_0}^{\infty} a_n$$

są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

Dowód. Nietrudno zauważyć, że warunek Cauchy'ego albo jednocześnie zachodzi dla obu szeregów, albo nie zachodzi dla żadnego z nich: dla dużych $m > k > k_0$ wartości sum $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m$ są przecież te same. \square

¹Nadużywamy tu lekko oznaczeń, ale jest to przyjęty i w tym przypadku niegroźny obyczaj; nie będziemy się nadmiernie obawiać pomylenia szeregu z jego sumą.

Stwierdzenie 4.6 (suma szeregów). *Jeśli szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są zbieżne, to szereg $\sum(a_n + b_n)$ jest zbieżny i*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dowód. To wynika natychmiast z twierdzenia o granicy sumy ciągów zbieżnych. \square

Stwierdzenie 4.7 (warunek konieczny zbieżności szeregu). *Jeśli szereg liczb rzeczywistych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Dowód. Jeśli $s_n = a_1 + \dots + a_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$, to $a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. \square

Przykład 4.8. Jeśli $|q| \geq 1$, to szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

jest rozbieżny, gdyż $a_n = q^n \not\rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$, a więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu. \square

Przestroga. Należy pamiętać, że podany wyżej warunek konieczny zbieżności szeregu **nie jest warunkiem dostatecznym**: ze zbieżności $a_n \rightarrow 0$ nie wynika wcale zbieżność szeregu $\sum a_n$. Istotna jest nie sama zbieżność a_n do zera, ale *tempo tej zbieżności*.

Przykład 4.9 (rozbieżność szeregu harmonicznego). Szereg *harmoniczny*, tzn. szereg o wyrazach $a_n = 1/n$, gdzie $n = 1, 2, \dots$, *jest rozbieżny*. Jest to na tyle ważny fakt, że obejrzymy kilka jego dowodów.

Dowód PIERWSZY. Dla szeregu harmonicznego nie jest spełniony warunek Cauchy'ego; sumy dalekich wyrazów nie muszą być małe. Istotnie, biorąc $\varepsilon = 1/2$ i dowolną liczbę n , otrzymujemy

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}| = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ składników}} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Dowód DRUGI. Wiemy już, że dla $t > -1$ zachodzą nierówności $t/(t+1) \leq \ln(1+t) \leq t$. Podstawiając w nich $t = 1/k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{k+1} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

Sumując te nierówności dla $k = 1, 2, \dots, n$, sprawdzamy, że

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Jednak $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left((k+1) \cdot \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$, zatem sumę logarytmów w poprzednim wzorze łatwo jest obliczyć: jest ona równa $\ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$. Otrzymujemy stąd, oznaczając dla krótkości n -tą sumę częściową szeregu harmonicznego przez s_n ,

$$s_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq s_n. \quad (4.2)$$

Ponieważ $\ln(n+1) \rightarrow \infty$ dla $n \rightarrow \infty$, więc s_n nie ma skończonej granicy, gdy $n \rightarrow \infty$.

Przykład 4.10. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. Istotnie, dla każdej liczby $n \geq 2$ mamy

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

a zatem

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Ciąg (s_n) sum częściowych tego szeregu jest rosnący (bo wyrazy szeregu są dodatnie) i ograniczony z góry przez liczbę 2, jest więc zbieżny. \square

4.1 Szeregi o wyrazach dodatnich

Badanie zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich jest łatwiejsze od badania zbieżności szeregów o dowolnych wyrazach rzeczywistych. W podręcznikach Analizy można znaleźć bardzo wiele tzw. *kryteriów zbieżności szeregów*, tzn. twierdzeń, podających warunki dostateczne zbieżności (lub rozbieżności) szeregu. Nie będziemy podawać długiej listy takich twierdzeń²; zadowolimy się skromnym zestawem, który do wielu celów w zupełności wystarcza.

Zacznijmy od banalnej obserwacji.

Stwierdzenie 4.11. *Jeśli $a_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ jest ograniczony z góry.

Dowód. Ciąg (s_n) jest niemalejący, gdyż $a_n > 0$ dla wszystkich n . Dlatego zbieżność s_n do granicy skończonej jest równoważna ograniczoności s_n , patrz Twierdzenie 2.28. Ponieważ $s_n > 0$, więc trzeba (i wystarcza) sprawdzać tylko ograniczoność z góry. \square

Najprostszy zestaw kryteriów zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich w gruncie rzeczy można ograniczyć do dwóch faktów: kryterium porównawczego i kryterium zagęszczeniowego. Każde z nich wykorzystuje jasną, intuicyjną ideę. Sens kryterium porównawczego jest taki, że jeśli można określić sumę pewnego nieskończonego zestawu liczb dodatnich, to można także określić sumę liczb mniejszych (która będzie mniejsza). Kryterium zagęszczeniowe można opisać tak: grupując dodatnie wyrazy, łatwiej jest dostrzec, jak szybko (lub wolno) rosną sumy częściowe szeregu.

²Zainteresowanych odsyłam do podręcznika Fichtenholza i książki Knoppa o szeregach nieskończonych.

Stwierdzenie 4.12 (kryterium porównawcze, wersja I). *Założmy, że $a_n, b_n > 0$ i istnieją takie liczby $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, że $a_n \leq c \cdot b_n$ dla wszystkich $n \geq n_0$. Wtedy*

(a) *Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;*

(b) *Z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Dowód. Jeśli $n_1 \geq n_0$, to dla wszystkich $m > k > n_1$ jest, dzięki dodatniości wyrazów obu szeregów,

$$|a_k + a_{k+1} + \dots + a_m| \leq c|b_k + b_{k+1} + \dots + b_m|$$

(moduły można po prostu pominąć). Jeśli więc warunek Cauchy'ego dla szeregów jest spełniony dla szeregu o wyrazach b_n , to jest spełniony także dla szeregu o wyrazach a_n . Trzeba po prostu ustalić $\varepsilon > 0$, wziąć dla szeregu o wyrazach b_n liczbę dodatnią $\varepsilon' = \varepsilon/c$, dobrać do niej $n_{\varepsilon'}$ (nie mniejsze od n_0) i zobaczyć, że dla $m > k > n_{\varepsilon'}$ będzie wtedy $|a_k + a_{k+1} + \dots + a_m| < c\varepsilon' = \varepsilon$.

Tak samo sprawdzamy, że jeśli warunek Cauchy'ego nie zachodzi dla szeregu o wyrazach a_n , to nie zachodzi także dla szeregu o wyrazach b_n . \square

Uwaga. Jeśli komuś nie podoba się rozumowanie, w którym w sposób jawny korzysta się z warunku Cauchy'ego, może postępować w dowodzie tak: skorzystać ze Stwierdzenia 4.5, odrzucić wyrazy o numerach mniejszych od n_0 i stwierdzić, że liczba $M > 0$ jest ograniczeniem górnym zbioru wszystkich sum częściowych szeregu $\sum_{n \geq n_0} a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy M/c jest ograniczeniem górnym zbioru sum częściowych szeregu $\sum_{n \geq n_0} b_n$. To wynika z nierówności $a_n \leq c \cdot b_n$ i dodatniości wyrazów a_n, b_n . Zastosowanie Stwierdzenia 4.11 pozwala zakończyć inny, alternatywny dowód kryterium porównawczego.

Stwierdzenie 4.13 (kryterium porównawcze, wersja II). *Jeśli $a_n, b_n > 0$ dla wszystkich $n \geq n_0$ i istnieje skończona, dodatnia granica $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$, to wówczas szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.*

Dowód. Można bez zmniejszenia ogólności założyć, że $n_0 = 1$. Wybierzmy liczbę $C > 0$ tak, aby

$$\frac{1}{C} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < C.$$

Na mocy Stwierdzenia 2.13 (o szacowaniu granic) istnieje wtedy $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$a_n < Cb_n \quad \text{i} \quad b_n < Ca_n \quad \text{dla wszystkich } n > n_1.$$

Teza wynika teraz z poprzedniej wersji kryterium porównawczego. \square

Stwierdzenie 4.14 (kryterium porównawcze, wersja ilorazowa). *Założmy, że dla $n \geq n_0$ jest $a_n, b_n > 0$ oraz*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}. \quad (4.3)$$

Wtedy

(a) Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

(b) Z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dowód. Można bez zmniejszenia ogólności założyć, że $n_0 = 1$. Mnożąc nierówności (4.3) stronami dla $n = 1, 2, \dots, N - 1$ otrzymujemy

$$\frac{a_N}{a_1} = \frac{a_N}{a_{N-1}} \cdots \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_N}{b_{N-1}} \cdots \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_{N+1}}{b_1},$$

a więc $a_N \leq c \cdot b_N$, gdzie $c = a_1/b_1$. Są to założenia pierwszej wersji kryterium porównawczego; stosując je, kończymy dowód. \square

Przykład 4.15. Jeśli $q \in (0, 1)$, to szereg o wyrazach $a_n = nq^n$ jest zbieżny. Istotnie, weźmy dowolne $s \in (q, 1)$. Ponieważ $(n+1)/n \rightarrow 1$, więc dla wszystkich dostatecznie dużych n jest

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} q < s = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \text{gdzie } b_n = s^n.$$

Ponieważ dla każdego $s \in (0, 1)$ szereg geometryczny $\sum s^n$ jest zbieżny, więc szereg $\sum nq^n$ jest zbieżny. To wynika z punktu (a) ostatniego kryterium. \square

Przykład 4.16. Postępując praktycznie tak samo, jak w poprzednim przykładzie, można stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$, gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną i $q \in (0, 1)$, jest zbieżny. \square

Przykład 4.17. Obliczymy sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$, posługując się wzorem na sumę postępu geometrycznego. Otóż, zauważając, że kq^k jest sumą k składników równych q^k , i grupując wyrazy, otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_n := q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n &= q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n && \text{(w każdym wierszu} \\ &+ q^2 + q^3 + \cdots + q^n && \text{trójkątnej 'tabelki' obok} \\ &+ q^3 + \cdots + q^n && \text{widać postęp geometryczny!)} \\ &+ \cdots + \\ &+ q^n \\ &= \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^2 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^3 - q^{n+1}}{1 - q} + \cdots + \frac{q^n - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1}{1 - q} (q + q^2 + \cdots + q^n - nq^{n+1}) \\ &= \frac{q - q^{n+1} - nq^{n+1}(1 - q)}{(1 - q)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{q}{(1 - q)^2}, \end{aligned}$$

gdyż $q^n \rightarrow 0$ i $nq^n \rightarrow 0$ (można stwierdzić to na wiele sposobów – my w tej chwili możemy już powiedzieć, że wynika to np. ze zbieżności szeregu $\sum nq^n$, udowodnionej we wcześniejszym przykładzie!). Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1 - q)^2} \quad \text{dla } q \in (0, 1). \quad (4.4)$$

Czytelnik może sam sprawdzić, że taki sam wzór ma miejsce dla $q \in (-1, 0]$.

Stwierdzenie 4.18 (kryterium zagęszczeniowe). *Jeśli (a_n) jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, to szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \text{gdzie} \quad b_n = 2^n a_{2^n},$$

są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

Dowód. Niech $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Zauważmy, że dzięki monotoniczności ciągu (a_k) i równości $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ jest

$$\begin{aligned} \underbrace{a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \dots + a_{2^{n+1}}}_{2^n \text{ składników; każdy jest } \leq a_{2^n}} &\leq 2^n a_{2^n} = b_n \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} a_{2^n} \leq 2 \cdot \left(\underbrace{a_{2^{n-1+1}} + a_{2^{n-1+2}} + \dots + a_{2^n}}_{2^{n-1} \text{ składników; każdy jest } \geq a_{2^n}} \right). \end{aligned}$$

Sumując te nierówności dla $n = 1, 2, \dots, N$, otrzymujemy

$$s_{2^{N+1}} - a_1 - a_2 \leq t_N = \sum_{n=1}^N b_n \leq 2s_{2^N}$$

(proszę zauważyć, że zaczynamy od $a_3 + a_4 \leq b_1 = 2a_2$, stąd kosmetyczny dodatek $-a_1 - a_2$ po lewej stronie wyżej). Zatem, ciągi monotoniczne (t_N) i (s_m) są albo jednocześnie ograniczone, albo jednocześnie nieograniczone. Teza kryterium zagęszczeniowego wynika więc ze Stwierdzenia 4.11. \square

Zaletą tego kryterium jest taka, że (dzięki dodatkowemu założeniu o monotoniczności ciągu a_n) szereg o wyrazach b_n zachowuje się – używając przenośni – *tak samo, co szereg o wyrazach a_n , tylko w sposób bardziej oczywisty, łatwiejszy do zauważenia*. Najlepiej zobaczyć to na przykładach.

Przykład 4.19. Oto trzeci dowód rozbieżności szeregu harmonicznego: jeśli $a_n = 1/n$, to

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1,$$

a szereg z samych jedynek jest oczywiście rozbieżny. \square

Przykład 4.20. Szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

jest rozbieżny. Istotnie, dla $a_n = 1/(n \ln n)$ otrzymujemy

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{n \ln 2},$$

więc rozbieżność rozważanego szeregu wynika z rozbieżności szeregu harmonicznego i kryterium zagęszczeniowego. \square

Proszę zauważyć, że dla dużych n liczba $1/(n \ln n)$ jest dużo mniejsza od $1/n$ (iloraz tych liczb dąży do 0 dla $n \rightarrow \infty$), więc sumy częściowe ostatniego szeregu rosną wolniej niż sumy częściowe szeregu harmonicznego. Jednak dzięki zastosowaniu kryterium zagęszczeniowego, tzn. dzięki odpowiedniemu grupowaniu wyrazów, potrafimy łatwo wykazać rozbieżność.

Przykład 4.21. Szereg³

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (4.5)$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $s > 1$. Dla $s \leq 0$ rozbieżność jest oczywista: nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności, gdyż dla takich s mamy $a_n = n^{-s} \rightarrow +\infty$. Niech więc $s > 0$. Wyrazy $a_n = n^{-s}$ maleją do zera; zastosujmy kryterium zagęszczeniowe. Otóż

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^s} = \frac{1}{(2^{s-1})^n} = q^n, \quad \text{gdzie } q = 2^{1-s},$$

a więc zagęszczenie prowadzi do szeregu geometrycznego $\sum b_n = \sum q^n$, który (jak już wiemy) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| = 2^{1-s} < 1 = 2^0$, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy $1 - s < 0$. \square

Przykład 4.22. Jeśli $a_n = 1/(n(\ln n)^s)$, gdzie $s \in \mathbb{R}$, to $\sum a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $s > 1$. Kryterium zagęszczeniowe daje:

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n (\ln(2^n))^s} = c \cdot \frac{1}{n^s}, \quad \text{gdzie } c = 1/(\ln 2)^s.$$

Wystarczy teraz spojrzeć na poprzedni przykład. \square

Dla porządku odnotujmy też nieco ogólniejszą wersję kryterium zagęszczeniowego.

Stwierdzenie 4.23 (kryterium zagęszczeniowe, wariant ogólny). *Jeśli (a_n) jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, a $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, to szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \text{gdzie } b_n = k^n a_{k^n},$$

są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

Dowód. Niezbyt trudne ćwiczenie dla zainteresowanych. \square

Warto zdawać sobie sprawę, że istnieją przykłady, które wymagają nieco subtelniejszej analizy, nie polegającej na szybkim stosowaniu gotowych kryteriów. Popatrzmy na dwa z nich.

Przykład 4.24. Niech p_n oznacza n -tą z kolei liczbę pierwszą, tzn. $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \dots$ Wykażemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \quad (4.6)$$

³Suma tego szeregu odgrywa bardzo ważną rolę w teorii liczb i jest nazywana *funkcją dzeta Riemanna*.

jest rozbieżny. Ustalmy liczbę N . Niech $\mathcal{P}_N = \{p : p \text{ pierwsza}, p \leq N\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{p \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{p}\right) &= \prod_{p \in \mathcal{P}_N} \exp(1/p) \\ &\geq \prod_{p \in \mathcal{P}_N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \quad \text{gdyż } \exp(x) \geq 1 + x \\ &\geq \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \text{ bezkwadr.}}} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

W ostatniej linijce występuje suma odwrotności wszystkich liczb bezkwadratowych⁴ n , $n \leq N$; nietrudno zauważyć, że mnożąc wszystkie nawiasy $(1 + \frac{1}{p})$ szkolną metodą ‘każdy z każdym’, otrzymamy tylko odwrotności liczb bezkwadratowych: wszystkich liczb bezkwadratowych $\leq N$ i niektórych liczb bezkwadratowych $> N$.

Wiemy już, że $2 > \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n^2}$ dla każdego N (patrz Przykład 4.10); mnożąc tę nierówność przez poprzednią, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2 \exp\left(\sum_{p \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{p}\right) &\geq \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \text{ bezkwadr.}}} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n^2}\right) \\ &\geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \stackrel{(4.2)}{\geq} \ln(N+1). \end{aligned}$$

Zatem

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{p} \geq \ln \ln(N+1) - \ln 2,$$

a więc sumy częściowe szeregu (4.6) nie są ograniczone.⁵ \square

Przykład 4.25 (szereg Kempnera). Niech \mathcal{A} będzie zbiorem tych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym w ogóle nie występuje cyfra 9. Wtedy szereg

$$\sum_{n \in \mathcal{A}} \frac{1}{n}$$

jest zbieżny, a jego suma S nie przekracza liczby 80. Aby się o tym przekonać, oznaczmy

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A} \cap [10^{N-1}, 10^N - 1]$$

(jak widać, \mathcal{A}_N to podzbiór \mathcal{A} złożony z liczb N -cyfrowych). Liczba elementów \mathcal{A}_N jest równa

$$\#\mathcal{A}_N = 8 \cdot 9^{N-1},$$

⁴Mówimy, że n jest liczbą bezkwadratową, jeśli n nie dzieli się przez żaden pełny kwadrat różny od 1; równoważnie, n jest liczbą bezkwadratową, gdy jest iloczynem różnych liczb pierwszych.

⁵Rozbieżność szeregu odwrotności liczb pierwszych wykazał L. Euler w 1737 roku, w nieco inny sposób od zaprezentowanego tutaj.

gdyż pierwszą cyfrę różną od dziewiątki, *niezerową*, można wybrać na 8 sposobów, a każdą z $N - 1$ kolejnych na 9 sposobów. Zatem

$$\sum_{n \in \mathcal{A}_N} \frac{1}{n} \leq 8 \cdot 9^{N-1} \cdot \frac{1}{10^{N-1}} = 8 \left(\frac{9}{10} \right)^{N-1}.$$

Sumując te nierówności, nietrudno stwierdzić, że $S \leq 80 = 8 \sum q^j$, gdzie $q = 9/10 \in (0, 1)$, a indeks $j = N - 1$ przybiera wartości $0, 1, 2, \dots$ \square

Podamy, na zakończenie tego podrozdziału, jeszcze jedno bardzo ogólne kryterium zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich.

Stwierdzenie 4.26 (kryterium Kummera). *Załóżmy, że $a_n > 0$ dla wszystkich $n > n_1$. Wówczas szereg $\sum a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $\theta > 0$ oraz liczby nieujemne b_n , że*

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \theta \quad \text{dla wszystkich } n \geq n_0. \quad (4.7)$$

Dowód. Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to przyjmujemy $b_n = (1/a_n) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ dla $n > n_1$. Wtedy

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{1 \cdot a_n}{a_n \cdot a_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k - \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1,$$

więc warunek (4.7) zachodzi dla $\theta = 1$ i $n \geq n_1$. Na odwrót, stosując (4.7) dla $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$, otrzymujemy

$$a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq \theta a_{n+1} > 0 \quad (4.8)$$

więc począwszy od miejsca n_2 ciąg $a_n b_n$ jest malejący i ma wyrazy dodatnie, tzn. ma granicę skończoną. Przekształcając szereg o wyrazach $\theta^{-1}(a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$ jest zbieżny: jego sumy częściowe to $s_N = \theta^{-1}(a_1 b_1 - a_N b_N)$. Z kryterium porównawczego i nierówności (4.8) wynika teraz zbieżność szeregu $\sum a_n$. \square

Przykład 4.27. Kładąc w (4.7) $b_n = n$, otrzymujemy łatwo tzw. *kryterium Raabego*.⁶

Jeśli $a_n > 0$ i istnieje taka liczba $s > 1$, że

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq s \quad \text{dla wszystkich } n \geq n_0, \quad (4.9)$$

to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

(Uwaga: Czytelnik może sprawdzić, że wykorzystując warunek (4.9) i własności funkcji wykładniczej, można wykazać, że dla $r \in (1, s)$ i wszystkich dostatecznie dużych n jest $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$, gdzie $b_n = 1/n^r$. Szereg $\sum 1/n^r$ jest zbieżny dla $r > 1$. Zatem, niezależnie od kryterium Kummera, każdy szereg $\sum a_n$ spełniający warunek (4.9) jest zbieżny na mocy ilorazowej wersji kryterium porównawczego, patrz Stw. 4.14.)

Ćwiczenie 4.28. Proszę sprawdzić, jaki wniosek otrzymamy, biorąc w kryterium Kummera $b_n \equiv 1$ dla wszystkich n .

⁶A raczej: tę jego część, która służy do uzasadniania zbieżności szeregów, patrz np. książka Fichtenholza.

Czytelnik, który zetknął się z powyższymi kryteriami i przykładami, a także samodzielnie rozwiązał pewną liczbę zadań, może zadać sobie pytanie: czy istnieje jakiś *idealny, wzorcowy szereg*, którego zawsze można byłoby używać w kryterium porównawczym? Odpowiedź jest negatywna: dla każdego szeregu zbieżnego istnieje szereg, który jest zbieżny wolniej...

Przykład 4.29. Załóżmy, że $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i szereg $\sum b_n$ jest zbieżny. Niech

$$R_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j$$

oznacza różnicę między sumą szeregu $\sum b_n$ i jego n -tą sumą częściową. Wtedy oczywiście R_n maleje do 0, gdy $n \rightarrow \infty$. Przyjmijmy $a_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$ dla $n \geq 2$. Mamy

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sqrt{R_1} - \sqrt{R_n}$$

(suma liczb a_j jest teleskopowa), a więc szereg $\sum_{n \geq 2} a_n$ jest zbieżny i ma sumę równą $\sqrt{R_1}$. Jednak

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}}{R_{n-1} - R_n} = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} \rightarrow +\infty,$$

czyli zbieżności szeregu $\sum a_n$ *nie można* wywnioskować ze zbieżności $\sum b_n$ i kryterium porównawczego!

4.2 Interludium: zbieżność ciągów i szeregów zespolonych

Do tej pory mówiliśmy wyłącznie o ciągach i szeregach w \mathbb{R} . Wiele obserwacji i wniosków, dotyczących takich ciągów i szeregów, można przenieść na ciągi i szeregi liczb zespolonych.⁷ Nam w najbliższym czasie takie ciągi i szeregi przydadzą się do trzech rzeczy:

- określenia $\exp(z)$ dla $z \in \mathbb{C}$,
- ścisłego wprowadzenia funkcji trygonometrycznych,
- wskazania jasnego związku funkcji trygonometrycznych z funkcją wykładniczą.

Zacznijmy ponownie od definicji. Są one prostym uogólnieniem tego, co już znamy. Założymy, że Czytelnik zna (np. z wykładów algebry liniowej) pojęcie liczby zespolonej i jej modułu.

Definicja 4.30. Ciąg $(z_n) \subset \mathbb{C}$ jest zbieżny do granicy $z \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|z_n - z| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > n_0$.

⁷Użycie takich ciągów i szeregów jest rzeczą wygodną, nawet wtedy, gdy koniec końców interesują nas wyłącznie obliczenia mające fizyczny lub praktyczny sens. Podczas studiów matematycznych Czytelnik przekona się wielokrotnie, że liczby zespolone są niezwykle użytecznym narzędziem obliczeniowym; często bywa tak, że najkrótsza droga do nietrywialnego wzoru czy twierdzenia dotyczącego liczb rzeczywistych prowadzi przez dziedzinę zespoloną.

Intuicja związana z tą definicją jest prosta i w gruncie rzeczy taka sama, jak w \mathbb{R} : do każdej, choćby i bardzo małej, liczby dodatniej ε potrafimy dobrać taki moment n_ε , że począwszy od tego momentu wszystkie wyrazy ciągu (z_n) będą oddalone od z mniej niż o ε — tzn. znajdują się wewnątrz dysku $D(z, \varepsilon) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$.

Podobnie określa się zbieżne szeregi liczb zespolonych.

Definicja 4.31. Niech $(z_n) \subset \mathbb{C}$. Szereg $\sum z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych $s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ ma granicę $s \in \mathbb{C}$.

Zauważmy, że jeśli $w = a + ib \in \mathbb{C}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to

$$\max(|a|, |b|) \leq |w| \leq |a| + |b|. \quad (4.10)$$

Interpretacja geometryczna tej nierówności jest oczywista: przeciwprostokątna trójkąta o wierzchołkach $0, a, w = a + ib \in \mathbb{C}$ jest dłuższa, niż każda przyprostokątna z osobna, ale krótsza od sumy przyprostokątnych. Z tej łatwej nierówności otrzymujemy szybko następujące użyteczne wnioski.

Stwierdzenie 4.32. Ciąg liczb $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$, gdzie $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, jest zbieżny do granicy $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Dowód. Zapisujemy (4.10) dla $w = z_n - z$, $a = x_n - x$ i $b = y_n - y$, a następnie korzystamy z definicji granicy i twierdzenia o trzech ciągach. \square

Stwierdzenie 4.33. Szereg $\sum z_n$, gdzie $z_n = x_n + iy_n$ dla pewnych $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są oba szeregi $\sum x_n, \sum y_n$. \square

Stwierdzenie 4.34. Ciąg $(z_n) \subset \mathbb{C}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego:

(C) Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $m, k > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|z_m - z_k| < \varepsilon$.

Dowód. Ze Stwierdzenia 4.32 i Twierdzenia 2.37 wynika, że zbieżność (z_n) jest równoważna koniunkcji warunków Cauchy'ego dla ciągów $(x_n) = (\operatorname{Re} z_n)$ i $(y_n) = (\operatorname{Im} z_n)$. Wobec nierówności (4.10), (x_n) i (y_n) spełniają warunek Cauchy'ego (w \mathbb{R}) wtedy i tylko wtedy, gdy (z_n) spełnia warunek Cauchy'ego. \square

Stwierdzenie 4.35. Szereg liczb zespolonych $\sum z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

(S) Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|z_k + z_{k+1} + \dots + z_m| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } m > k > n_\varepsilon.$$

Dowód. To wynika z definicji szeregu zbieżnego i poprzedniego stwierdzenia. \square

4.3 Szeregi o wyrazach dowolnych

4.3.1 Zbieżność bezwzględna i warunkowa

Definicja 4.36. Szereg $\sum z_n$ jest *bezwzględnie zbieżny* wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum |z_n|$ jest zbieżny.

Szereg, który jest zbieżny, ale nie bezwzględnie, nazywa się *warunkowo zbieżny*. Przykłady takich szeregów zobaczymy później; jednym z nich jest $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ (który nie jest bezwzględnie zbieżny, gdyż $\sum 1/n = \infty$).

Stwierdzenie 4.37. *Jeśli szereg $\sum z_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum z_n$ jest zbieżny.*

Dowód. Jeśli szereg $\sum z_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to, z definicji, szereg liczb nieujemnych $\sum |z_n|$ jest zbieżny, a więc spełnia warunek Cauchy'ego dla szeregów. Mamy jednak

$$|z_k + z_{k+1} + \dots + z_m| \leq |z_k| + |z_{k+1}| + \dots + |z_m|$$

dla wszystkich $m > k$, więc skoro $\sum |z_n|$ spełnia warunek Cauchy'ego, to i $\sum z_n$ spełnia ten warunek. To zaś oznacza, że $\sum z_n$ jest zbieżny. \square

Pojęcie zbieżności bezwzględnej jest ważne z uwagi na następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.38. *Założmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny, a $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest dowolną bijekcją. Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ jest zbieżny, a ponadto*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

Innymi słowy, wyrazy szeregu bezwzględnie zbieżnego można dowolnie przestawiać; nie wpływa to ani na jego zbieżność, ani na wartość jego sumy.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$|z_k| + |z_{k+1}| + \dots + |z_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } m > k \geq n_0$$

(istnienie takiej liczby n_0 wynika z bezwzględnej zbieżności $\sum z_n$ i warunku Cauchy'ego). Biorąc $k = n_0$ i przechodząc do granicy $m \rightarrow \infty$, otrzymujemy

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} |z_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Niech $m_j \in \mathbb{N}$ będzie taką liczbą, że $\sigma(m_j) = j$, gdzie $j = 1, 2, \dots$, tzn. $m_j := \sigma^{-1}(j)$. Dla $n \in \mathbb{N}$ połóżmy $k(n) = n + \max(m_1, m_2, \dots, m_n)$. Wtedy $k(n)$ jest ciągiem rosnącym.

Zauważmy, że dla numerów $l > k(n_0)$ mamy $\sigma(l) > n_0$, gdyż σ jest bijekcją i wartości $1, 2, \dots, n_0$ przyjmuje w liczbach nie większych od $k(n_0)$. Zatem, dla wszystkich $m > k > n_1 = \max(n_0, k(n_0))$ spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned} |z_{\sigma(k)} + z_{\sigma(k+1)} + \dots + z_{\sigma(m)}| &\leq |z_{\sigma(k)}| + |z_{\sigma(k+1)}| + \dots + |z_{\sigma(m)}| \\ &\leq \sum_{j=n_0}^{\infty} |z_j| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ spełnia więc warunek Cauchy'ego, tzn. jest zbieżny.

Ponadto, dla wszystkich $n \geq n_0$ jest

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j - \sum_{j=1}^{k(n)} z_{\sigma(j)} \right| \leq \sum_{j \geq n_0} |z_n| < \varepsilon$$

a więc granica ciągu $s_n = z_1 + \dots + z_n$ i granica wskazanego wyżej podciągu (o numerach $k(n)$) sum częściowych szeregu $\sum z_{\sigma(n)}$ różnią się co najwyżej o ε . Z dowolności ε wynika zatem, że obie wspomniane granice są równe, a więc sumy obu szeregów są równe. To kończy cały dowód. \square

Założenie bezwzględnej zbieżności w ostatnim twierdzeniu jest istotne. Bez niego teza nie zachodzi. Co więcej, ma miejsce następujący zaskakujący fakt.

Twierdzenie 4.39 (Riemann). *Jeśli $(a_n) \subset \mathbb{R}$ i szereg $\sum a_n$ jest warunkowo (ale nie bezwzględnie!) zbieżny, to dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka bijekcja $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$$

Dowód. Opiszemy dowód słowami, gdyż dzięki temu będzie bardziej zrozumiały. Zainteresowany Czytelnik zdoła samodzielnie uzupełnić drobne szczegóły.

Nietrudno zauważyć, że szereg $\sum a_n$ ma nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele wyrazów ujemnych, gdyż w przeciwnym razie wszystkie wyrazy o dostatecznie dużych numerach byłyby tego samego znaku, a więc $\sum a_n$ byłby nie tylko zbieżny, ale i bezwzględnie zbieżny.

Niech $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ będą kolejnymi numerami wyrazów ujemnych, a $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ — kolejnymi numerami wyrazów dodatnich szeregu $\sum a_n$. (Bez zmniejszenia ogólności założmy, że żadna z liczb a_n nie jest zerem.) Zauważmy, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} = -\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} = +\infty.$$

Gdyby tak nie było, to oba powyższe szeregi byłyby zbieżne, a cały szereg $\sum a_n$ byłby zbieżny bezwzględnie.

Bijekcję σ budujemy indukcyjnie. Oto pierwsze dwa kroki konstrukcji.

Wybieramy najmniejszą liczbę m taką, że $a_{k_1} + \dots + a_{k_m} > x$. Kładziemy $\sigma(1) = k_1$, $\sigma(2) = k_2$, \dots , $\sigma(m) = k_m$. Następnie zmniejszamy uzyskaną sumę, korzystając z ujemnych wyrazów szeregu: wybieramy najmniejszą liczbę s taką, że

$$a_{k_1} + \dots + a_{k_m} + a_{n_1} + \dots + a_{n_s} < x$$

Przyjmujemy teraz $\sigma(m+1) = n_1$, $\sigma(m+2) = n_2$, \dots , $\sigma(m+s) = n_s$. Zarówno m , jak i s , są dobrze określone, gdyż szeregi wyrazów dodatnich i wyrazów ujemnych są rozbieżne. Niech $m_1 = m$, $m_2 = m + s$.

Założmy teraz, że wykonaliśmy N podobnych kroków, definiując $\sigma(j)$ dla wszystkich $j \leq m_N$, gdzie $m_N \geq N$. Wyrazy o numerach $\leq m_N$ są już wykorzystane, a wyrazy o numerach $> m_N$ — jeszcze dostępne. Założmy także, że (1) jeśli N jest nieparzyste, to

$$S_{m_N} = \sum_{j \leq m_N} a_{\sigma(j)} > x,$$

a także: (2) jeśli N jest parzyste, to

$$S_{m_N} = \sum_{j \leq m_N} a_{\sigma(j)} < x$$

W kolejnym kroku w przypadku (1) dobieramy kolejne dostępne jeszcze (tzn. niewykorzystane wcześniej) ujemne wyrazy a_{k_j} szeregu, aż do momentu, gdy uzyskamy sumę częściową mniejszą od x . Można to osiągnąć, gdyż szereg wyrazów ujemnych jest rozbieżny. Natomiast w przypadku (2) dobieramy kolejne dostępne jeszcze wyrazy dodatnie, aż do momentu, gdy uzyskamy sumę częściową większą od x . Numery wyrazów, które wybieramy w $(N + 1)$ -szym kroku, to wartości σ w liczbach $m_N + 1, \dots, m_{N+1}$.

Postępując indukcyjnie, definiujemy $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Jest to bijekcja, gdyż każdy wyraz wykorzystujemy tylko raz i każdy wyraz zostaje kiedyś wykorzystany. Łatwo zauważyć, że $\sigma(n) \rightarrow \infty$, gdy $n \rightarrow \infty$. Sumy częściowe S_n szeregu $\sum a_{\sigma(n)}$ oscylują wokół liczby x , gdyż tak były wybierane. W dodatku różnice między tymi sumami i liczbą x są coraz mniejsze, gdyż $a_n \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$ (to jest warunek konieczny zbieżności szeregu $\sum a_n$).

Ścisłej, nie jest trudno sprawdzić, że ciąg S_n spełnia warunek Cauchy'ego. To wynika z konstrukcji σ i zbieżności $a_n \rightarrow 0$. Ponadto, ciąg S_{m_N} jest zbieżny do x . Zatem, cały ciąg S_n też jest zbieżny do x . \square

Uwaga. Nietrudno sprawdzić, że jeśli $\sum a_n$ jest tylko warunkowo zbieżny, to można tak przestawić wyrazy, żeby po przestawieniu ciąg sum częściowych był rozbieżny do $+\infty$ (albo do $-\infty$). Czytelnik, po zapoznaniu się z dowodem twierdzenia Riemanna, bez większego trudu wskaże odpowiednie permutacje wyrazów.

Uwaga. Jeśli szereg liczb zespolonych $\sum z_n$ jest zbieżny warunkowo, ale nie bezwzględnie, to na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} istnieje taka prosta ℓ , że dla każdej liczby $w \in \ell$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = w$$

dla pewnej bijekcji $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

4.3.2 Przekształcenie Abela

W tym podrozdziale zajmiemy się opisem warunków, które pozwalają wnioskować, że szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny. Wygodnie będzie przyjąć następującą konwencję: jeśli wyrazy szeregu oznaczamy jakąś małą literą (np. a, b, \dots), to sumy częściowe tego szeregu oznaczamy odpowiednią wielką literą (A, B, \dots).

Twierdzenie 4.40 (Abel). *Niech $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$. Załóżmy, że istnieje taka liczba $M > 0$, że $|A_n| = |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq M$ dla wszystkich n , a ponadto*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty \quad \text{oraz} \quad b_n \rightarrow 0 \quad \text{dla } n \rightarrow \infty,$$

to wtedy szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

Dowód. Najpierw zapiszmy pomocniczy

Lemat. *Jeśli (α_n) jest ograniczonym ciągiem w \mathbb{C} , a szereg $\sum \beta_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to szereg $\sum \alpha_n \beta_n$ jest bezwzględnie zbieżny.*

(Dla dowodu wystarczy zauważyć, że jeśli $|\alpha_n| \leq M$ dla wszystkich n , to wtedy $|\alpha_n \beta_n| \leq M|\beta_n|$, a więc ze zbieżności szeregu $\sum |\beta_n|$ i kryterium porównawczego wynika zbieżność szeregu $\sum |\alpha_n \beta_n|$).

Teraz wykonujemy *przekształcenie Abela*, tzn. zapisujemy sumy częściowe szeregu $\sum a_n b_n$ w innej postaci, korzystając z równości $a_k = A_k - A_{k-1}$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k = b_1 A_1 + \sum_{k=2}^n b_k (A_k - A_{k-1}) \\ &= \underbrace{A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n)}_{\text{patrz Lemat!}} + A_n b_n. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ostatni składnik, $A_n b_n$, jest zbieżny do zera, gdyż $|A_n| \leq M$ i $b_n \rightarrow 0$. Pozostała, oznaczona kłamrą, część sumy S_n , tzn.

$$A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$$

też ma granicę dla $n \rightarrow \infty$. To wynika z lematu, zastosowanego dla $\alpha_n = A_n$ oraz dla $\beta_n = b_n - b_{n+1}$. \square

Wniosek 4.41 (kryterium Dirichleta). *Jeśli ciąg liczb rzeczywistych b_n maleje do zera, a sumy częściowe A_n szeregu $\sum a_n$ tworzą ciąg ograniczony, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.*

Dowód. Ponieważ $b_n \geq b_{n+1} > 0$ i $b_n \rightarrow 0$, więc

$$\sum_{n=1}^N |b_n - b_{n+1}| = \sum_{n=1}^N (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{N+1} \rightarrow b_1 \quad \text{dla } N \rightarrow \infty.$$

Można więc stosować twierdzenie Abela: spełnione są wszystkie jego założenia. \square

Wniosek 4.42 (kryterium Leibniza). *Jeśli ciąg liczb rzeczywistych b_n maleje do zera, to szereg naprzemienny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

jest zbieżny.

Dowód. Przyjmujemy w kryterium Dirichleta $a_n = (-1)^{n+1}$; wtedy $|A_n| \leq 1$ dla wszystkich n . \square

Przykład 4.43. Szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ jest zbieżny (ale oczywiście nie jest bezwzględnie zbieżny).

Przykład 4.44. Jeśli $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z \neq 1$, to szereg $\sum z^n/n$ jest zbieżny. To wynika z kryterium Dirichleta zastosowanego do $a_n = z^n$ i $b_n = 1/n$. Ciąg $b_n = 1/n$ maleje do zera, natomiast wartości bezwzględne sum częściowych

$$z + z^2 + \cdots + z^n = z \cdot \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

są, niezależnie od n , ograniczone przez liczbę $M = 2/|1 - z|$, gdyż $|1 - z^n| \leq 1 + |z|^n = 2$. Ponieważ $|z^n/n| = 1/n$, więc rozpatrywany szereg *nie jest* bezwzględnie zbieżny.

W tym przykładzie można zamiast $1/n$ użyć dowolnego ciągu b_n malejącego do zera i takiego, że $b_n \geq 1/n$ — żadna konkluzja nie ulegnie zmianie. \square

Zadanie 4.45. Udowodnić kryterium Leibniza bezpośrednio, nie posługując się twierdzeniem Abela. (Wskazówka: zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągów (s_{2k}) i (s_{2k+1}) , gdzie s_n oznacza n -tą sumę częściową rozważanego szeregu.)

Zadanie 4.46. Udowodnić następujące twierdzenie, nazywane czasem kryterium Abela:

Jeśli b_n jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, a szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

Wskazówka. Wykorzystać pierwszą linijkę (4.11) i wykazać, że ciąg S_n sum częściowych szeregu $\sum a_n b_n$ spełnia warunek Cauchy'ego.

4.3.3 Mnożenie szeregów i twierdzenie Mertensa

Ze zdroworozsądkowego punktu widzenia, mnożenie szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ powinno polegać na próbie sprawdzenia, czy zbieżny będzie szereg, który (w jakimś porządku) zawiera wszystkie składniki $a_i b_j$, które uzyskalibyśmy, mnożąc formalnie jedną sumę przez drugą. Czytelnik rozumie już, że zbieżność takiego szeregu może zależeć od tego, jak uporządkujemy liczby $a_i b_j$.

Definicja 4.47. Jeśli $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$, to iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg o wyrazach

$$c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}.$$

Innymi słowy, w iloczynie Cauchy'ego grupujemy $a_i b_j$ tak, aby w każdej grupie suma $i + j$ miała stałą wartość — tzn. postępujemy tak, jak przy mnożeniu wielomianów w szkole, gdzie nauczono nas grupować składniki z tą samą potęgą zmiennej x .

Twierdzenie 4.48 (F. Mertens). *Jeśli szereg $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a szereg $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to ich iloczyn Cauchy'ego, tzn. szereg*

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right)$$

jest zbieżny. Ponadto, jeśli szereg A jest zbieżny bezwzględnie, to i szereg C jest zbieżny bezwzględnie.

Dowód. Niech, dla $n \geq 0$, zgodnie z przyjętą wcześniej konwencją, $C_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n$ oznacza n -tą sumę częściową szeregu C . Wykorzystując definicję c_n , porządkujemy C_N , grupując wyrazy zawierające wspólny czynnik b_j :

$$\begin{aligned} C_N &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_N + a_1 b_{N-1} + \dots + a_N b_0) \\ &= b_0 (a_0 + a_1 + \dots + a_N) + b_1 (a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}) + \dots + b_N a_0 \\ &= \sum_{j=0}^N b_j A_{N-j}, \end{aligned}$$

gdzie $A_k = a_0 + \dots + a_k$ dla $k \geq 0$. Wykażemy, że $\lim C_N = AB$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i liczbę $\eta > 0$, którą dopasujemy do ε później.

Mamy

$$|C_N - AB| = |C_N - AB_r + AB_r - AB| \leq |C_N - AB_r| + |A||B_r - B|. \quad (4.12)$$

Każdy ze składników prawej strony oszacujemy osobno, odpowiednio dobierając r .

Istnieje takie n_1 , że dla wszystkich $r > n_1$ jest $|B_r - B| < \eta$ i $|A||B_r - B| \leq |A|\eta$, bo $\lim_{r \rightarrow \infty} B_r = B$. Ustalmy jedną z takich liczb r , wybierając ją tak, żeby spełniony był również warunek: $|A_n - A| < \eta$ dla wszystkich $n > r$.

Teraz oszacujemy składnik $|C_N - AB_r|$. Niech

$$\beta = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|,$$

i niech $M = \sup_n |A_n|$ ($M < \infty$, bo ciąg A_n jest zbieżny do A , a więc ograniczony). Wobec wykonanych wcześniej obliczeń i równości $B_r = b_0 + \dots + b_r$, dla wszystkich $N > 2r$ mamy

$$\begin{aligned} |C_N - AB_r| &= \left| \sum_{j=0}^N b_j A_{N-j} - A \sum_{j=0}^r b_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^r b_j (A_{N-j} - A) + \sum_{j=r+1}^N b_j A_{N-j} \right| \\ &\leq \sup_{0 \leq j \leq r} |A_{N-j} - A| \cdot \sum_{j=0}^r |b_j| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |A_n| \cdot \left| \sum_{j=r+1}^{\infty} b_j \right| \\ &\leq \eta \cdot \beta + M|B_r - B| \quad \text{bo } N > 2r, \text{ a więc } n = N - j > r \\ &\leq \eta(\beta + M). \end{aligned}$$

Wracając teraz do (4.12) i dodając uzyskane oszacowania obu składników prawej strony, otrzymujemy

$$|C_N - AB| \leq \eta(\beta + M + |A|) < \eta(\beta + M + |A| + 1) \quad \text{dla wszystkich } N > 2r.$$

Wybierając $\eta = \varepsilon(\beta + M + |A| + 1)^{-1}$, kończymy dowód zbieżności C_N do AB .

Aby wykazać ostatnią część twierdzenia, tzn. zbieżność *bezwzględną* szeregu C przy założeniu *bezwzględnej zbieżności obu* szeregów A i B , zauważamy, że

$$|c_n| \leq \sum_{j=0}^n |a_j| \cdot |b_{n-j}|$$

i stosujemy pierwszą część twierdzenia do iloczynu zbieżnych *bezwzględnie* szeregów $\sum |a_n|$, $\sum |b_n|$, otrzymując zbieżność szeregu $\sum |c_n|$ z kryterium porównawczego. \square

Założenie zbieżności *bezwzględnej* jednego z szeregów A, B jest w twierdzeniu Mertensa istotne.

Przykład 4.49. Niech $a_n = b_n = (-1)^n / \sqrt{n+1}$. Szeregi $A = \sum a_n$ i $B = \sum b_n$ są wtedy zbieżne. To wynika z kryterium Leibniza. Jednak

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right| = |(-1)^n| \sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{j+1} \cdot \sqrt{n-j+1}} \\ &\geq \sum_{j=0}^n \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1. \end{aligned}$$

Zatem $c_n \not\rightarrow 0$, więc szereg $C = \sum c_n$ jest rozbieżny. (Aby uzyskać środkową nierówność, zastosowaliśmy nierówność między średnimi: $\sqrt{j+1} \cdot \sqrt{n-j+1} \leq \frac{(j+1)+(n-j+1)}{2} = \frac{n+2}{2}$.)

Na zakończenie tego podrozdziału sformułujemy jeszcze jedno twierdzenie, które uzupełnia twierdzenie Mertensa.

Twierdzenie 4.50 (E. Cesàro). *Jeśli szeregi $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oraz $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to ich iloczyn Cauchy'ego, tzn. szereg*

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right)$$

ma następującą własność:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_N}{N+1} = AB,$$

gdzie

$$C_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}.$$

SZKIC DOWODU. Jak w dowodzie twierdzenia Mertensa, sprawdzamy, że

$$C_k = b_0 A_k + b_1 A_{k-1} + \dots + b_k A_0.$$

Sumując takie równości dla $k = 0, 1, \dots, N$, otrzymujemy

$$C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_N = B_0 A_N + B_1 A_{N-1} + \dots + B_N A_0 = \sum_{j=0}^N B_j A_{N-j}.$$

Dlatego

$$\frac{C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_N}{N+1} - AB = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N (B_j A_{N-j} - AB) \equiv (*).$$

Jeśli zarówno j , jak i $N-j$ są odpowiednio duże, to składnik $B_j A_{N-j} - AB$ jest mały. Trzeba jednak uporać się z oszacowaniem wielu takich składników, oraz uwzględnić inne! Dlatego weźmiemy $N > 3k \gg 1$ i podzielimy ostatnią sumę (*) na trzy części:

- ogon lewy, tzn. k składników o numerach $j = 0, 1, \dots, k-1$;

- *środek*, tzn. $(N + 1) - 2k$ składników takich, gdzie zarówno j , jak i $N - j$ są równe co najmniej k ;
- *ogon prawy*, tzn. k składników o numerach j takich, że $N - j = 0, 1, \dots, k - 1$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i $\eta > 0$. Ciągi A_s, B_s są ograniczone, gdyż są zbieżne. Niech

$$M > 1 + \sup_{s \in \mathbb{N}} |A_s| + \sup_{s \in \mathbb{N}} |B_s| + |A| + |B| > 0.$$

Każdy składnik lewego ogona jest nie większy od $2M^2$ (brutalne użycie nierówności trójkąta pozwala oszacować różnicę iloczynów przez sumę modułów iloczynów), a zatem cały lewy ogon ma sumę równą co najwyżej $2M^2 \cdot k / (N + 1)$. Podobnie, suma prawego ogona nie przekracza $2M^2 \cdot k / (N + 1)$. Ustalmy teraz $k = k(\eta)$ tak, aby

$$\max(|A_j - A|, |B_j - B|) < \eta \quad \text{dla wszystkich } j \geq k.$$

Nietrudno sprawdzić, że przy takim warunku *środek* ma sumę nie większą niż

$$\frac{N + 1 - 2k}{N + 1} \cdot 2M \cdot \eta < 2M\eta$$

(liczba składników środka razy oszacowanie składnika z góry⁸). Dlatego

$$|(*)| \leq |\text{ogon lewy}| + |\text{środek}| + |\text{ogon prawy}| \leq \frac{2M^2k}{N + 1} + 2M\eta + \frac{2M^2k}{N + 1}.$$

Biorąc $\eta = \varepsilon / 4M$ i $N > N_1 = \max(3k, (8M^2k) / \varepsilon)$, otrzymamy powyżej prawą stronę mniejszą od $\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$. \square

Zadanie 4.51. Korzystając z twierdzenia Cesàro, wykazać, że jeśli iloczyn Cauchy'ego szeregów $A = \sum a_n$ i $B = \sum b_n$ jest zbieżny, to jego suma C jest równa AB .

Wskazówka: skorzystać z twierdzenia Stolza i Przykładu A.4.

4.4 Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej

Zacniemy, jak w przypadku zmiennej rzeczywistej, od twierdzenia, które mówi o istnieniu pewnej granicy.

Twierdzenie 4.52. Dla każdej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ ciąg $a_n(z) = (1 + \frac{z}{n})^n$ i ciąg $b_n(z)$ sum częściowych szeregu

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

są zbieżne do tej samej granicy. Szereg $b(z)$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

⁸Bardzo uważny Czytelnik zechce sprawdzić, że można zamiast $2M$ napisać M ; to i tak nie ma szczególnego znaczenia.

Dowód. Krok 1. Ponieważ dla wszystkich $n > 2|z|$ jest

$$\left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \frac{|z|}{n+1} < \frac{1}{2} = \frac{(1/2)^{n+1}}{(1/2)^n},$$

więc z ilorazowej wersji kryterium porównawczego wynika, że szereg $b(z)$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdej liczby $z \in \mathbb{C}$.

Krok 2. Wykażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z) = b(z)$. Mamy

$$|a_n(z) - b(z)| \leq |a_n(z) - b_k(z)| + |b_k(z) - b(z)|.$$

Każdy składnik oszacujemy osobno, dobierając najpierw dużą liczbę k , a potem dostatecznie duże $n > k$. Z dwumianu Newtona otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_n(z) - b_k(z) &= \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{z^j}{n^j} - \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!} \\ &= 1 + z + \sum_{j=2}^n \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{n^j} - \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!} \\ &= \alpha_{k,n}(z) + \beta_{k,n}(z), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_{k,n}(z) &= \sum_{j=2}^k \frac{z^j}{j!} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) - 1 \right] \\ \beta_{k,n}(z) &= \sum_{j=k+1}^n \frac{z^j}{j!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Stąd

$$|a_n(z) - b(z)| \leq |\alpha_{k,n}(z)| + |\beta_{k,n}(z)| + |b_k(z) - b(z)|. \quad (4.13)$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i rozpatrzmy składniki prawej strony (4.13). Po pierwsze,

$$\begin{aligned} |\alpha_{k,n}(z)| &\leq \sum_{j=2}^k \frac{|z|^j}{j!} \cdot \max_{2 \leq j \leq k} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \right] \\ &\leq b(|z|) \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k\right) \quad (\text{i sumę, i maksimum szacujemy osobno}) \\ &\leq b(|z|) \cdot \frac{k^2}{n}. \end{aligned}$$

Aby napisać ostatnią liniijkę, skorzystaliśmy dla liczb k oraz $n > k$ z nierówności Bernoulli'ego $(1 - k/n)^k \geq 1 - k^2/n$.

Po drugie, z nierówności trójkąta,

$$|\beta_{k,n}(z)| \leq \sum_{j=k+1}^n \frac{|z|^j}{j!} = b_n(|z|) - b_k(|z|) = |b_n(|z|) - b_k(|z|)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dla wszystkich $n > k > n_0$, gdyż ciąg $b_n(|z|)$ jest zbieżny jako ciąg sum częściowych zbieżnego szeregu $b(|z|)$, a więc spełnia warunek Cauchy'ego.

Ustalmy teraz jakiegokolwiek konkretne $k > n_0$, tak, aby prócz powyższej nierówności na $|\beta_{k,n}(|z|)|$ mieć także $|b_k(z) - b(z)| < \varepsilon/3$. Jest to możliwe, gdyż $b_k(z) \rightarrow b(z)$ dla $k \rightarrow \infty$.

Na koniec wybierzmy $n_1 > k$, tak, aby dla wszystkich $n > n_1$ mieć

$$|\alpha_{k,n}(z)| \leq b(|z|) \frac{k^2}{n} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Widać, że wystarczy wziąć $n_1 > 3k^2b(|z|)/\varepsilon$. Przy takim doborze n_1 każdy z trzech składników prawej strony nierówności (4.13) będzie mniejszy od $\varepsilon/3$. Zatem, wprost z definicji granicy, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z) = b(z)$. \square

Definicja 4.53. Dla każdej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ kładziemy

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Jak widać, dla rzeczywistych z określamy tę samą funkcję, co w poprzednim rozdziale.

Twierdzenie 4.54 (własności \exp w dziedzinie zespolonej). *Funkcja $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ma następujące własności:*

- (i) $\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w$ dla wszystkich $z, w \in \mathbb{C}$;
- (ii) Dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ jest $\exp z \neq 0$, $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$.
- (iii) Dla $z = iy$, gdzie $y \in \mathbb{R}$, mamy $\overline{\exp(iy)} = \exp(-iy)$ oraz $|\exp(iy)| = 1$.
- (iv) Dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ jest $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$.
- (v) Dla każdego zbieżnego do zera ciągu $(z_n) \subset \mathbb{C}$ ($z_n \neq 0$ dla wszystkich n) i dla każdego $w \in \mathbb{C}$ zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(w + z_n) - \exp(w)}{z_n} = \exp(w). \quad (4.14)$$

Dowód. Własność (i) udowodnimy, posługując się twierdzeniem Mertensa i równością

$$\exp(z) = b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ponieważ szereg $b(z)$ jest zbieżny bezwzględnie dla wszystkich z , więc $b(z)b(w)$ jest, wobec twierdzenia Mertensa, sumą iloczynu Cauchy'ego (szeregu $b(z)$ i szeregu $b(w)$). Inaczej mówiąc, iloczyn $\exp(z)\exp(w)$ to

$$\begin{aligned} b(z)b(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \right) && \text{(z definicji iloczynu Cauchy'ego i tw. Mertensa)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j \cdot w^{n-j} \right) && \text{(dopisujemy } n! \text{ w liczniku i mianowniku)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n && \text{(korzystamy z dwumianu Newtona)} \\ &= b(z + w) = \exp(z + w). \end{aligned}$$

Własność (ii) wynika z równości $\exp(0) = 1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \dots = 1$ i własności (i), gdyż $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z + (-z)) = \exp(0) = 1$.

Aby sprawdzić (iii), korzystamy z równości $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{z_k} = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} z_k}$, która łatwo wynika ze Stwierdzenia 4.32. Piszemy

$$\overline{\exp(iy)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\left(1 + \frac{iy}{k}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{iy}{k}\right)^k = \exp(-iy).$$

Stąd

$$|\exp(iy)|^2 = \exp(iy) \cdot \overline{\exp(iy)} = \exp(iy)\exp(-iy) = \exp(iy + (-iy)) = 1.$$

Własność (iv) jest prostą konsekwencją (iii) oraz (i). Jeśli $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$|\exp(z)| = |\exp(x)| \cdot |\exp(iy)| = |\exp(x)| \cdot 1 = \exp(x).$$

Ostatnią równość piszemy bez wahania, gdyż dla $x \in \mathbb{R}$ jest $\exp(x) = (\exp(x/2))^2 > 0$.

Została nam do udowodnienia własność (v). Podobnie jak w przypadku funkcji wykładniczej zmiennej rzeczywistej, nietrudno zauważyć, że wystarczy wykazać, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(z_n) - 1}{z_n} = 1 \quad (4.15)$$

dla każdego ciągu $(z_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z_n \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$. Dla wszystkich liczb z takich, że $|z| \leq 1$, mamy⁹

$$\begin{aligned} |\exp(z) - 1 - z| &= \left| \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right| \\ &\leq \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^4}{4!} + \dots \\ &\leq |z|^2 \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \right) \quad (\text{bo } 1 \geq |z|^2 \geq |z|^3 \geq |z|^4 \geq \dots) \\ &= |z|^2(e - 2). \end{aligned}$$

Zatem, jeśli $z_n \rightarrow 0$, $z_n \neq 0$, to dla wszystkich dostatecznie dużych n jest

$$0 \leq \left| \frac{\exp(z_n) - 1}{z_n} - 1 \right| = \left| \frac{\exp(z_n) - 1 - z_n}{z_n} \right| \leq |z_n|(e - 2).$$

Równość (4.15) wynika teraz z twierdzenia o trzech ciągach. \square

Wniosek 4.55 (ciągłość funkcji \exp na \mathbb{C}). Jeśli $(\xi_n) \subset \mathbb{C}$ i $\xi_n \rightarrow \xi$ dla $n \rightarrow \infty$, to wówczas $\exp(\xi_n) \rightarrow \exp(\xi)$ dla $n \rightarrow \infty$.

Dowód. Niech najpierw $\xi_n \rightarrow 0$. Wtedy, wobec własności (v) z poprzedniego twierdzenia oraz arytmetycznych własności granicy,

$$\exp(\xi_n) = \xi_n \cdot \underbrace{\frac{\exp(\xi_n) - 1}{\xi_n}}_{\rightarrow 1, \text{ własność (v)}} + 1 \rightarrow 0 \cdot 1 + 1 = 1 = \exp(0).$$

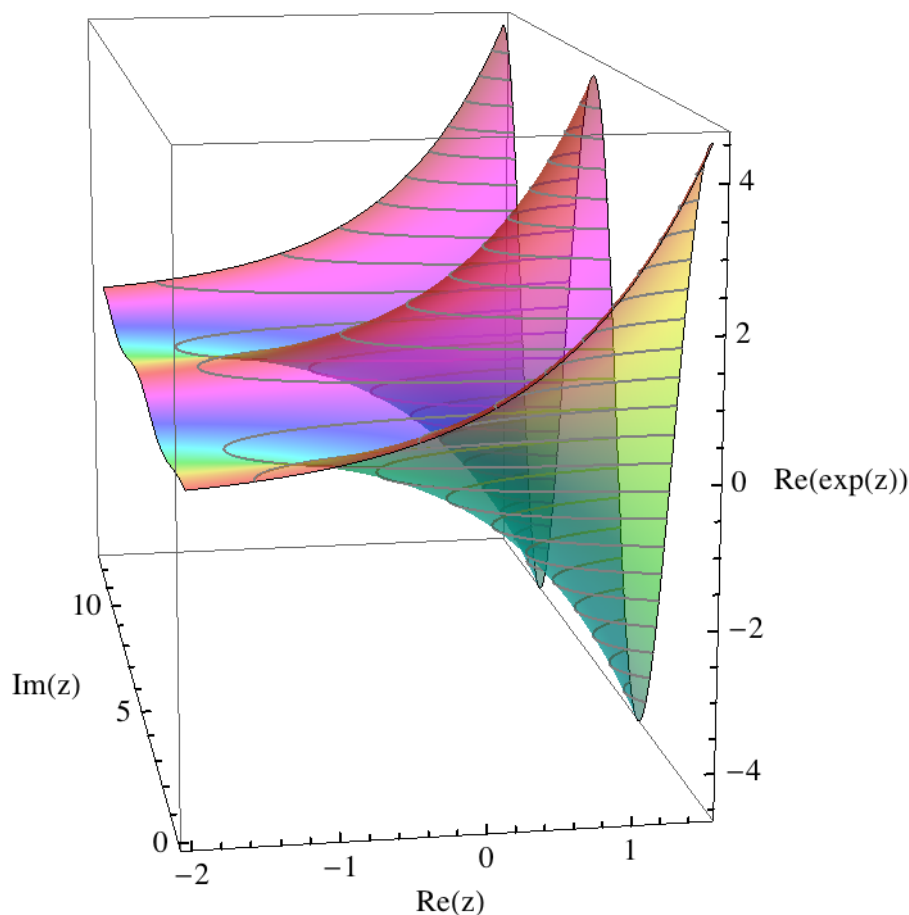
⁹Uwaga: formalnie biorąc, zaprezentowany tu rachunek jest oczywisty. Korzystamy w nim jednak z ciągłości modułu: jeśli $w_k \rightarrow w$, to $|w_k| \rightarrow |w|$ dla $k \rightarrow \infty$.

Korzystając z tej równości i z własności grupowej $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$, w przypadku ogólnym piszemy

$$\exp(\xi_n) = \exp(\xi_n - \xi) \cdot \exp(\xi) \rightarrow 1 \cdot \exp(\xi) = \exp(\xi),$$

gdyż $\xi_n - \xi \rightarrow 0$. Dowód jest zakończony. \square

Uwaga. Czytelnik zechce zauważyć, że schemat dowodu jest w gruncie rzeczy taki sam, jak w przypadku rzeczywistym: dowodzimy *najpierw* różniczkowalności \exp , a potem ciągłości \exp . Kluczem do obu własności jest oszacowanie modułu różnicy $\exp(z) - 1 - z$ dla małych z . W przypadku rzeczywistym *najpierw* dowodziliśmy oszacowania (E6) w Twierdzeniu 3.2, a z niego wynikała i różniczkowalność, i ciągłość funkcji wykładniczej.



Portret \exp , I. Wykres funkcji $f(x, y) = \operatorname{Re}(\exp(x + iy))$ nad prostokątem $-2 \leq x \leq 1.5, 0 \leq y \leq 12.56$; innymi słowy, wysokość punktu powierzchni nad dolnym dnem pudełka jest równa $\operatorname{Re}(\exp(x + iy))$. Szare linie to poziomice (jak na mapie: wysokość na poziomicy ma jedną, ustaloną wartość). Kolory powierzchni zależą liniowo od części urojonej liczby $\exp(x + iy)$. Przednia krawędź powierzchni odpowiada wartości $y = \operatorname{Im} z = 0$: widzimy wykres \exp na \mathbb{R} .

Na zakończenie tego podrozdziału wykazemy, że funkcja wykładnicza jest *jednoznacznie wyznaczona* przez dwie swoje własności.

Twierdzenie 4.56 (charakteryzacja \exp). Załóżmy, że funkcja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spełnia dwa warunki:

- (i) Dla wszystkich $z, w \in \mathbb{C}$ jest $f(z+w) = f(z)f(w)$;
- (ii) Dla każdego zbieżnego do zera ciągu liczb zespolonych z_n ($z_n \neq 0$ dla wszystkich n) zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - 1}{z_n} = 1.$$

Wówczas $f(z) = \exp(z)$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

Zanim podamy dowód tego twierdzenia, sformułujemy zespolony odpowiednik lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1.

Lemat 4.57. Jeśli ε_n jest ciągiem liczb zespolonych takim, że $n\varepsilon_n \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$, to wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon_n)^n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n\right)^n = \exp z$$

dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

Dowód Lematu 4.57. Najpierw udowodnimy pierwszą równość. Z nierówności trójkąta, zastosowanej do sumy, którą otrzymujemy, rozpisując $(1 + \varepsilon_n)^n - 1$ z użyciem dwumianu Newtona, wynika, że

$$0 \leq |(1 + \varepsilon_n)^n - 1| \leq (1 + |\varepsilon_n|)^n - 1$$

Jednak z Lematu 3.1 wynika, że ciąg $(1 + |\varepsilon_n|)^n - 1$ jest zbieżny do 0, więc na mocy twierdzenia o trzech ciągach $(1 + \varepsilon_n)^n \rightarrow 1$.

Druga podana w lemacie równość wynika łatwo z twierdzenia o granicy iloczynu ciągów i definicji funkcji wykładniczej, gdyż

$$\left(1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n\right)^n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \cdot (1 + \varepsilon'_n)^n$$

dla $\varepsilon'_n = \varepsilon_n / (1 + \frac{z}{n})$. Oczywiście $n\varepsilon'_n \rightarrow 0$, więc z pierwszej części lematu $(1 + \varepsilon'_n)^n \rightarrow 1$, a zatem każda ze stron powyższej równości ma dla $n \rightarrow \infty$ granicę równą $\exp(z)$. \square

Dowód Twierdzenia 4.56. Ustalmy dowolny punkt $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Oznaczmy

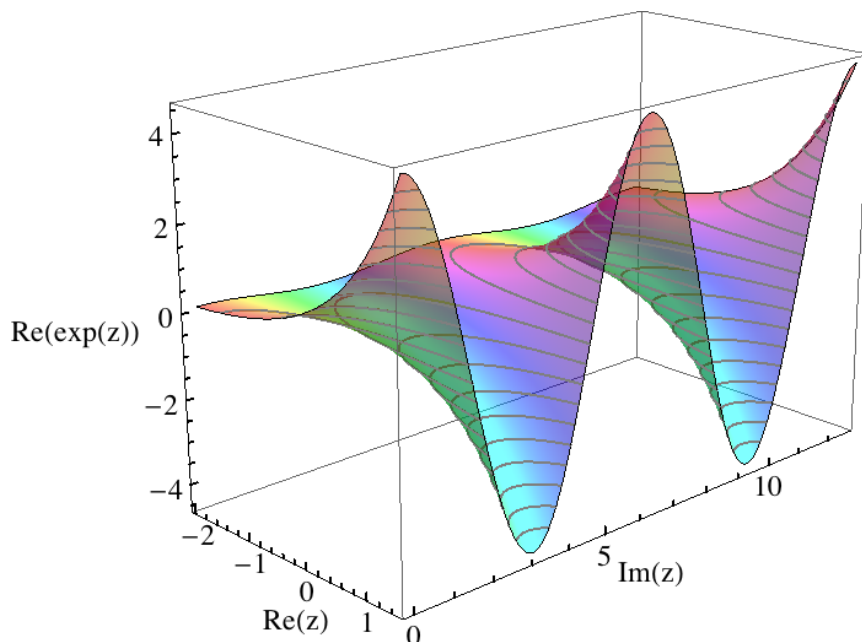
$$\delta_n = \frac{f(z/n) - 1}{z/n} - 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Z założenia (ii) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 1 - 1 = 0$. Używając wzoru definiującego δ_n do wyznaczenia wartości $f(z/n)$, otrzymujemy

$$f\left(\frac{z}{n}\right) = 1 + \frac{z + z\delta_n}{n} = 1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n,$$

gdzie $\varepsilon_n = z\delta_n/n$ jest ciągiem liczb zespolonych takim, że $n\varepsilon_n \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$. Z Lematu 4.57 otrzymujemy i założenia (i) otrzymujemy teraz

$$f(z) = f\left(\frac{z}{n} + \dots + \frac{z}{n}\right) = f\left(\frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n\right)^n \rightarrow \exp(z) \quad \text{dla } n \rightarrow \infty.$$



Portret exp, II. Wykres funkcji $f(x, y) = \operatorname{Re}(\exp(x + iy))$ nad prostokątem $-2 \leq x \leq 1.5$, $0 \leq y \leq 12.56$. Widok z innej strony. Przednia krawędź nie bez powodu wygląda tak, jak sinusoida. Związek funkcji wykładniczej z trygonometrycznymi poznamy w następnym podrozdziale. Tu widać, że zarówno wysokości, jak i kolory powtarzają się w kierunku osi urojonej. Wykażemy później, że funkcja wykładnicza *jest okresowa* — w kierunku osi urojonej!

Lewa strona nie zależy w ogóle od n , więc mamy po prostu $f(z) = \exp(z)$. Teza wynika z dowolności z ; wprowadziliśmy w rozważaniach $z = 0$, ale $f(0) = f(0 + 0) = f(0)^2$, tzn. $f(0) = 0$ lub 1 — pierwszą możliwość odrzucamy, gdyż prowadziłaby do $f \equiv 0$, co jest sprzeczne z założeniem (ii). \square

Dla zainteresowanych przytoczymy jeszcze kilkanaście linijek kodu, które posłużyły do narysowania powyższych wykresów w programie Mathematica (jest on dostępny w laboratorium komputerowym MIM). Różne widoki powierzchni można było uzyskać, obracając gotowy rysunek myszką na ekranie.

```
Plot3D[Re[Exp[x + I*y]], {x, -2, 1.5}, {y, 0, 4*Pi},
  PlotPoints -> {100, 100},
  BoxRatios -> {1, 2, 1.3}, PlotRange -> All,
  TicksStyle -> Directive[Black, Thick, 24],
  PlotStyle -> Directive[Opacity[0.5]],
  ColorFunction -> (Hue[(Arg[Exp[#1 + I*#2]])/(2*Pi)] &),
  ColorFunctionScaling -> False,
  MeshFunctions -> (#3 &),
  MeshStyle -> {Gray, Thick},
  Mesh -> 20, ImageSize -> 700,
  PerformanceGoal -> "Quality",
  AxesLabel
  -> (Style[#, 24] & /@ {"Re(z)", "Im(z)", "Re(exp(z))"})
]
```


4.5 Funkcje trygonometryczne

Istnieje wiele równoważnych sposobów ścisłego definiowania funkcji trygonometrycznych. Jeden z nich polega na wykorzystaniu ich związku z funkcją wykładniczą zmiennej zespolonej.

Definicja 4.58. Dla każdej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ przyjmujemy

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

Wzory użyte w tej definicji będziemy nazywać *wzorami Eulera*.

Twierdzenie 4.59 (własności funkcji trygonometrycznych). Dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzą równości:

(T1) $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1.$

(T2) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$, a ponadto

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots, \quad (4.16)$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad (4.17)$$

(i oba szeregi są bezwzględnie zbieżne).

Wreszcie,

(T3) dla każdego ciągu $(z_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, który jest zbieżny do zera, zachodzą równości

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin z_n}{z_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos z_n - 1}{z_n} = 0.$$

Dowód. Wprost z definicji funkcji trygonometrycznych i równości

$$\exp(z) \exp(w) = \exp(z + w)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\cos z)^2 + (\sin z)^2 &= \left(\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \right)^2 + \left(\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{\exp(2iz) + 2 + \exp(-2iz)}{4} + \frac{\exp(2iz) - 2 + \exp(-2iz)}{-4} \\ &= \frac{4}{4} = 1, \end{aligned}$$

tzn. własność (T1). Mamy także

$$\cos z + i \sin z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} + i \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \exp(iz).$$

Z definicji cosinusa,

$$2 \cos z = \exp(iz) + \exp(-iz) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{i^k z^k}{k!} + \frac{(-i)^k z^k}{k!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} (i^k + (-i)^k).$$

Ponieważ

$$i^k + (-i)^k = (1 + (-1)^k) i^k = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k \text{ jest nieparzyste,} \\ 2, & \text{gdy } k \text{ jest podzielne przez } 4, \\ -2, & \text{gdy } k = 4l - 2 \text{ dla pewnego } l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

więc łatwo wynika stąd wzór (4.16) (zostają tylko składniki o parzystych numerach, ze znakami na przemian). Zbieżność bezwzględna szeregu (4.16), tzn. zbieżność szeregu

$$1 + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^4}{4!} + \frac{|z|^6}{6!} + \dots$$

wynika stąd, że j -ta suma częściowa nie przekracza $(2j-1)$ -szej sumy częściowej szeregu

$$1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^4}{4!} + \frac{|z|^5}{5!} + \dots = \exp(|z|).$$

Podobnie dowodzimy wzoru (4.17) i bezwzględnej zbieżności występującego w nim szeregu. To kończy dowód własności (T2).

Dla dowodu (T3) ustalmy ciąg $z_n \rightarrow 0$ ($z_n \neq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$) i napiszmy

$$\frac{\sin z_n}{z_n} = \frac{\exp(iz_n) - \exp(-iz_n)}{2iz_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{\exp(iz_n) - 1}{iz_n} + \frac{\exp(-iz_n) - 1}{-iz_n} \right).$$

Z własności (v) zespolonej funkcji wykładniczej wynika, że każdy ze składników w nawiasie ma dla $n \rightarrow \infty$ granicę równą 1, więc z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic otrzymujemy $(\sin z_n)/z_n \rightarrow 1$. Podobnie radzimy sobie z cosinusem, pisząc

$$\frac{\cos z_n - 1}{z_n} = \frac{\exp(iz_n) + \exp(-iz_n) - 2}{2z_n} = \frac{i}{2} \left(\frac{\exp(iz_n) - 1}{iz_n} + \frac{\exp(-iz_n) - 1}{iz_n} \right).$$

Tym razem dla $n \rightarrow \infty$ pierwszy składnik w nawiasie ma granicę równą 1, a drugi granicę równą -1 . Dlatego ich suma ma granicę 0. \square

Ze wzorów (4.16), (4.17) otrzymujemy natychmiast

Wniosek 4.60. Dla każdego $z \in \mathbb{C}$ jest $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$. \square

Wniosek 4.61. Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $\sin x, \cos x \in \mathbb{R} \cap [-1, 1]$. Ponadto, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

Dowód. Sumy szeregów (4.16) i (4.17) są, rzecz jasna, liczbami rzeczywistymi, gdy $z = x \in \mathbb{R}$. To, że $\sin x$ oraz $\cos x$ należą do przedziału $[-1, 1]$, wynika z własności (T1). Wartości sinusa i cosinusa w zerze obliczamy, wstawiając $z = 0$ we wzorach (4.17) i (4.16). \square

Wniosek 4.62 (ciągłość funkcji trygonometrycznych). Dla każdego ciągu $(z_n) \subset \mathbb{C}$ takiego, że $\lim z_n = z \in \mathbb{C}$, mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin z_n = \sin z, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos z_n = \cos z.$$

Dowód. To wynika ze wzorów Eulera i Wniosku 4.55 (ciągłości funkcji wykładniczej). \square

Stwierdzenie 4.63. Dla dowolnych liczb zespolonych $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzą równości

$$\begin{aligned}\cos z - \cos w &= -2 \sin \frac{z-w}{2} \sin \frac{z+w}{2}, \\ \sin z - \sin w &= 2 \sin \frac{z-w}{2} \cos \frac{z+w}{2}.\end{aligned}$$

Dowód. Oba wzory uzyskujemy z czysto szkolnych rachunków, stosując definicję sinusa i cosinusa oraz własność $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$. Sprawdźmy dla przykładu wzór na różnicę cosinusów. Jego prawa strona to

$$\begin{aligned}-2 \sin \frac{z-w}{2} \sin \frac{z+w}{2} &= \frac{-2}{2i \cdot 2i} \left(e^{i(z-w)/2} - e^{-i(z-w)/2} \right) \left(e^{i(z+w)/2} - e^{-i(z+w)/2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{iz} - e^{iw} - e^{-iw} + e^{iz}) \\ &= \cos z - \cos w.\end{aligned}$$

Wzór na różnicę sinusów uzyskujemy podobnie. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi. \square

4.6 Liczba π

Czytelnik, który zna funkcje trygonometryczne ze szkoły, zauważył zapewne, że dotychczas nie dysponujemy formalnym opisem miejsc zerowych tych funkcji. Aby ten opis uzyskać i przy okazji zdefiniować liczbę π , udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.64. W przedziale $(0, 2)$ funkcja \cos ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

Dowód tego twierdzenia poprzedzimy serią nieskomplikowanych lematów, które komuś, kto myśli: *przecież widziałem już kiedyś wykresy sinusa i cosinusa, a ponadto wiem, że jedyne miejsce zerowe cosinusa w przedziale $(0, 2)$ to $\pi/2 = 1,57\dots$, mogą się wydawać oczywiste, ale pamiętajmy: funkcje trygonometryczne to dla nas obiekty zdefiniowane wzorami Eulera! Chcemy sprawdzić ich własności, odwołując się wyłącznie do definicji i do tego, co już wykazaliśmy w sposób ścisły.*

Lemat 4.65. Dla każdego $y \in (0, 2]$ zachodzą nierówności $y > \sin y > 0$.

Dowód. Dzięki (4.17) mamy

$$\sin y = y - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(y),$$

gdzie

$$s_n(y) = \left(\frac{y^3}{3!} - \frac{y^5}{5!} \right) + \left(\frac{y^7}{7!} - \frac{y^9}{9!} \right) + \dots + \left(\frac{y^{4n-1}}{(4n-1)!} - \frac{y^{4n+1}}{(4n+1)!} \right).$$

Każdy z nawiasów jest dodatni dla $y \in (0, 2]$, gdyż dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $4n+1 > 3$ i $4n > 2$, a więc

$$1 > \frac{2^2}{2 \cdot 3} \geq \frac{y^2}{4n(4n+1)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^{4n-1}}{(4n-1)!} > \frac{y^{4n+1}}{(4n+1)!}.$$

Zatem $s_n(y)$ rośnie i ma wyrazy dodatnie. Dlatego $\lim s_n(y) > 0$ i $\sin y < y$ dla $y \in (0, 2]$. Podobnie sprawdzamy, że $\sin y > 0$ dla $y \in (0, 2]$: to wynika stąd, że każdy składnik po prawej stronie równości

$$\sin z = \left(y - \frac{y^3}{3!}\right) + \left(\frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!}\right) + \dots$$

jest dodatni, gdy $y \in (0, 2]$. \square

Lemat 4.66. *Cosinus jest malejący na przedziale $[0, 2]$, tzn.*

$$x_1, x_2 \in [0, 2], \quad x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad \cos x_2 < \cos x_1. \quad (4.18)$$

Ponadto, dla wszystkich $x_1, x_2 \in [0, 2]$ jest

$$|\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1|.$$

Dowód. Korzystając ze wzoru na różnicę cosinusów (patrz Stwierdzenie 4.63), piszemy dla $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [0, 2]$

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \quad \text{dla } x_1 < x_2, \quad x_1, x_2 \in [0, 2].$$

Jednak $y = \frac{x_2 - x_1}{2} \in (0, 1]$, więc zgodnie z poprzednim Lematem jest $\sin y > 0$. Podobnie, $\sin \frac{x_2 + x_1}{2} > 0$, gdyż $(x_1 + x_2)/2 \in (0, 2]$. Oba sinusy w powyższej równości są więc dodatnie, a stąd $\cos x_2 - \cos x_1 < 0$.

Ponadto, przy założeniu $2 \geq x_2 > x_1 \geq 0$ jest

$$|\cos x_2 - \cos x_1| = 2 \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \leq x_2 - x_1.$$

W ostatniej nierówności skorzystaliśmy z tego, że $\sin y \leq y$ na $(0, 2]$. \square

Lemat 4.67. *Dla każdej liczby $x \in [0, 1]$ jest $\cos x > 0$, a dla każdej liczby $y \in [\frac{40}{23}, 2]$ jest $\cos y < 0$.*

Dowód. Po pierwsze, dla każdej liczby $x \in [0, 1]$ mamy wobec nierówności z poprzedniego Lematu: $|1 - \cos x| = |\cos 0 - \cos x| \leq |0 - x| = x < 1$, a więc $\cos x > 0$. Oszacujemy teraz liczbę $\cos 2$. Mamy

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \left(\frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!}\right) + \left(\frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!}\right) + \dots \\ &= -1 + \left(\frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!}\right) + \left(\frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!}\right) + \dots \\ &\leq -1 + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^8}{8!} + \dots \quad (\text{opuszczamy ujemne składniki w nawiasach}) \\ &< -1 + \frac{2^4}{4!} \left(1 + \frac{2^4}{5^4} + \frac{2^8}{5^8} + \dots\right) \\ &= -1 + \frac{16}{24} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4} < -1 + \frac{16}{24} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{24}} = -\frac{7}{23}, \quad \text{gdź } \left(\frac{2}{5}\right)^4 < \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Jeśli $y \in [\frac{40}{23}, 2]$, to $|y - 2| \leq \frac{6}{23}$, a więc, dzięki nierówności $|\cos 2 - \cos y| \leq |2 - y| \leq \frac{6}{23}$ (z poprzedniego Lematu) i powyższemu oszacowaniu liczby $\cos 2$, z pewnością jest

$$\cos y \leq -\frac{7}{23} + \frac{6}{23} = -\frac{1}{23} < 0.$$

Dowód Lematu 4.67 jest zakończony. \square

Dowód Twierdzenia 4.64. Ponieważ $\cos x$ maleje na $[0, 2]$, więc ma w tym przedziale co najwyżej jedno miejsce zerowe. Niech

$$A = \{x \in [0, 2]: \cos x > 0\}.$$

Z monotoniczności cosinusa wynika, że ten zbiór jest przedziałem. Z ostatniego lematu wynika ponadto, że

$$[0, 1) \subset A, \quad A \subset [0, 40/23],$$

a więc kres górny x_0 przedziału A jest pewną liczbą z przedziału $[1, 40/23] \subset [1, 7/4)$.

Ponadto, $\cos x_0 = 0$. Istotnie, liczba x_0 jest granicą ciągu $x_n = x_0(1 - \frac{1}{n}) \in A$ i dlatego z ciągłości cosinusa $\cos x_0 = \lim \cos x_n \geq 0$. Gdyby $\cos x_0 > 0$, to wobec równości

$$0 < \cos x_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \cos(x_0 + m^{-1})$$

byłoby $\cos(x_0 + \frac{1}{m}) > 0$ dla wszystkich dostatecznie dużych m , tzn.

$$x_0 + \frac{1}{m} \in A, \quad x_0 + \frac{1}{m} > x_0 = \sup A,$$

to zaś jest sprzeczność. \square

Definicja 4.68 (liczba π). Liczba π to liczba rzeczywista równa $2x_0$, gdzie $x_0 \in (0, 2)$ jest jedyną w przedziale $(0, 2)$ liczbą taką, że $\cos x_0 = 0$.

Twierdzenie 4.69. Zachodzą wzory

$$e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Dowód. Wiemy już, że $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Zatem, z równości

$$\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

wynika, że $\sin \frac{\pi}{2} = \pm 1 = 1$, bo wiemy już, że $\sin x > 0$ na $(0, 2)$. Zatem $\exp(i\frac{\pi}{2}) = 0 + 1 \cdot i = i$. Stąd wynika, że

$$e^{\pi i} = \left(e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}\right)^2 = i^2 = -1.$$

To kończy dowód. \square

Definicja 4.70. Liczba $T \neq 0$ jest okresem funkcji $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (odpowiednio: funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $f(z + T) = f(z)$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$ (odpowiednio: dla każdego $z \in \mathbb{R}$).

Twierdzenie 4.71 (okresowość \exp na \mathbb{C}). Dla każdej liczby $z \in \mathbb{C}$ i każdego $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ zachodzi równość

$$\exp(2\pi ik + z) = \exp(z),$$

tzn. $2\pi ik$ jest okresem funkcji wykładniczej. Ponadto, jeśli liczba T jest okresem funkcji wykładniczej, to $T = 2\pi ik$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Dowód. Jeśli $T = 2\pi ik$, gdzie k jest całkowite, to wtedy dla każdej liczby zespolonej z mamy

$$\exp(z + T) = \exp(z) \exp(T) = \exp(z) \exp(2\pi i)^k = \exp(z),$$

gdyż $\exp(2\pi i) = \exp(\pi i)^2 = (-1)^2 = 1$. Dlatego każda liczba $T = 2\pi ik$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest okresem funkcji wykładniczej.

Pozostaje wykazać, że innych okresów nie ma. Jeśli $\exp(z+T) = \exp(z)$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$, to z pewnością $\exp T = 1$. Niech $T = t + is$, gdzie $t, s \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$1 = |\exp T| = |\exp(t + is)| = \exp t,$$

a zatem $t = 0$ i $T = is$ dla pewnego $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Przypuśćmy, że s nie jest całkowitą wielokrotnością 2π . Ponieważ suma okresów funkcji jest okresem tej funkcji, więc z pierwszej części dowodu wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ liczba $i(s + 2\pi k)$ też jest okresem \exp . Dobierzmy $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $s' = (s + 2k\pi) \in (0, 2\pi)$. Oczywiście,

$$\exp(is') = \cos s' + i \sin s' = 1.$$

Stąd

$$\cos(s'/4) + i \sin(s'/4) = \exp(is'/4) \in \{1, -1, i, -i\},$$

gdyż innych pierwiastków czwartego stopnia z jedynki nie ma. Ponieważ jednak $0 < s'/4 < \frac{\pi}{2} < 2$, więc $1 > \cos(s'/4) > 0$ i $\sin(s'/4) > 0$. To jest sprzeczność, bo w $\{1, -1, i, -i\}$ nie ma żadnej liczby, która spełniałaby naraz obie nierówności $\operatorname{Re} z > 0$ i $\operatorname{Im} z > 0$.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że s musi być całkowitą wielokrotnością 2π . To kończy dowód całego twierdzenia. \square

Zauważmy, że dowodząc ostatniego twierdzenia, wykazaliśmy także następujący fakt.

Wniosek 4.72. Równość

$$\exp(i\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{C}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi = 2\pi k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. \square

Wniosek 4.73 (okresowość funkcji trygonometrycznych). Jeśli $T = 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, to T jest okresem obu funkcji

$$\sin, \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ponadto, jeśli T jest okresem cosinusa (lub sinusa), to T jest całkowitą wielokrotnością 2π .

Dowód. To, że każda liczba $T = 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, jest okresem zarówno sinusa, jak i cosinusa, wynika z poprzedniego twierdzenia i wzorów Eulera.

Wykażemy drugą część twierdzenia. Niech T będzie okresem cosinusa (lub, odpowiednio, sinusa). Ponieważ $\exp(\pm i\pi/2) = \pm i$, więc ze wzorów Eulera otrzymujemy

$$\cos(z + \pi/2) = \frac{e^{i(z+\pi/2)} + e^{-i(z+\pi/2)}}{2} = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\sin z \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}. \quad (4.19)$$

Podobnie sprawdzamy, że

$$\sin(z + \pi/2) = \cos z \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}. \quad (4.20)$$

Z obu tych wzorów¹⁰ wynika, że T jest także okresem sinusa (lub, odpowiednio, cosinusa). Zatem dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ jest

$$\exp(i(z + T)) = \cos(z + T) + i \sin(z + T) = \cos z + i \sin z = \exp(iz),$$

tzn. liczba iT jest okresem $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Na mocy poprzedniego twierdzenia, iT jest całkowitą wielokrotnością $2\pi i$, tzn. $T = 2\pi k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. \square

Wniosek 4.74. (i) Jedynymi zespolonymi rozwiązaniami równania $\sin z = 0$ są liczby $z = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Jedynymi zespolonymi rozwiązaniami równania $\cos z = 0$ są liczby $z = (k + \frac{1}{2})\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Dowód. Jeśli $\sin z = 0$, to $\cos z = \pm 1$, więc $\exp(iz) = \pm 1 + i \cdot 0 = \pm 1$, a stąd $\exp(2iz) = 1$. Na mocy Wniosku 4.72 otrzymujemy

$$2z = 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem tylko liczby $z = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, mogą być rozwiązaniami równania $\sin z = 0$. Na odwrót, jeśli $z = k\pi$ i $k \in \mathbb{Z}$ jest dowolne, to

$$\exp(ik\pi) = (\exp(i\pi))^k = (-1)^k = (-1)^k + 0 \cdot i = \cos k\pi + i \sin k\pi,$$

więc $\sin z = 0$. To kończy dowód pierwszej części wniosku. Druga część wynika z pierwszej i z tożsamości $\cos(z + \pi/2) = -\sin z$. \square

4.7 Wzór de Moivre'a

Odnotujmy prostą konsekwencję związków między funkcją wykładniczą i funkcjami trygonometrycznymi.

Stwierdzenie 4.75 (wzór de Moivre'a). Jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$, to wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$$

Dowód. Z własności \exp i wzorów Eulera wynika, że lewa strona to, inaczej, $\exp(in\alpha) = \exp(i\alpha)^n = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$. \square

¹⁰Wzory (4.19), (4.20) bywają nazywane wzorami redukcyjnymi.

Wniosek 4.76. Jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, to

$$\cos n\alpha = \operatorname{Re} (e^{i\alpha})^n, \quad \sin n\alpha = \operatorname{Im} (e^{i\alpha})^n.$$

Znając wzór de Moivre'a (i dwumian Newtona) można bez trudu wyrażać $\cos n\alpha$ oraz $\sin n\alpha$ przez $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$. Ciekawsze, i ważniejsze jest zastosowanie do wyznaczania sum sinusów oraz cosinusów kolejnych wielokrotności α — aby takie sumy obliczać, wystarczy umieć sumować postęp geometryczny, bowiem

$$\sum_{n=k_1}^{k_2} \cos n\alpha = \sum_{n=k_1}^{k_2} \operatorname{Re} (e^{i\alpha})^n = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=k_1}^{k_2} (e^{i\alpha})^n \right).$$

(Dla sum sinusów trzeba użyć części urojonej.)

Zadanie 4.77. Sprawdzić, że jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $\exp(ix) \neq 1$, to

$$\sum_{n=0}^N \sin nx = \frac{\sin(Nx/2) \sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

Znaleźć analogiczny wzór na sumę cosinusów. Jak zmieniają się oba wzory, gdy przestaniemy zakładać, że $\exp(ix) \neq 1$?

Na tym zakończymy pierwsze spotkanie z szeregami. Chciałbym, żeby Czytelnik tego tekstu nie tylko uważał szeregi za pewne obiekty matematyczne, które (być może) warto poznawać i badać same w sobie, ale widział w nich *przede wszystkim* narzędzie, służące m.in. do definiowania różnych funkcji, systematycznego badania ich własności, oraz obliczania ich wartości. To ma szczególne znaczenie praktyczne wtedy, gdy – mówiąc nieprecyzyjnie – szeregi są zbieżne *szybko*. Tak właśnie jest w przypadku szeregów \exp , \sin i \cos , z uwagi na błyskawiczne tempo wzrostu silni. Dopóki obliczamy np. wartości e^x dla niezbyt dużych x , możemy w praktyce traktować funkcję \exp jako wielomian, złożony z pewnej liczby składników szeregu $\sum(x^n/n!)$; np. e^3 różni się od $\sum_{n=0}^{50} 3^n/n!$ naprawdę niewiele: około 10^{-42} .

```
In[1] := N[Exp[3], 44]
```

```
Out[1] = 20.085536923187667740928529654581717896987908
```

```
In[2] := N[Sum[3^n/n!, {n, 0, 50}], 44]
```

```
Out[2] = 20.085536923187667740928529654581717896987906
```

Gdybyśmy chcieli z taką dokładnością określić odległość Ziemi od Słońca, nanometry byłyby zdecydowanie za dużymi jednostkami. Jeśli ktoś woli myśleć o wielkościach związanych z ekonomią, a nie z astronomią czy fizyką, może sprawdzić, jakie jest zadłużenie budżetu USA. Strona

http://www.brillig.com/debt_clock/

podaje je z dokładnością do 1 centa, aktualizując wartości co parę sekund. Taka precyzja z praktycznego punktu widzenia graniczy z absurdem, ale dokładność przybliżenia

$$\sum_{n=0}^{50} \frac{3^n}{n!} \approx e^3$$

jest i tak o 25 rzędów wielkości lepsza.

Takie uwagi mogą kogoś zaniepokoić, jednak – aby lepiej rozumieć, co się naprawdę za nimi kryje – musimy w miarę systematycznie poznać takie pojęcia, jak *ciągłość*, *różniczkowalność* i *zbieżność jednostajna*. Ich ścisłe definicje oraz własności poznamy w kolejnych rozdziałach.

Rozdział 5

Funkcje ciągłe

Jak wspomnieliśmy na samym początku wykładu, do najważniejszych zastosowań analizy należy badanie własności różnych funkcji, określonych na podzbiorach przestrzeni liniowych — w najprostszym przypadku, na podzbiorach \mathbb{R} . Jedną z najważniejszych własności funkcji zmiennej rzeczywistej jest *ciągłość*. Intuicyjnie biorąc, jeśli funkcja określona na pewnym przedziale w \mathbb{R} jest ciągła, to *małym zmianom argumentu odpowiadają małe zmiany wartości funkcji*; inaczej, z geometrycznego punktu widzenia, *wykres funkcji można narysować bez odrywania ołówka od papieru*. Te określenia są jednak szalenie nieprecyzyjne. Zaczniemy od sformułowania odpowiednich definicji.

Założymy w tym rozdziale, że Czytelnik zna definicję funkcji z wykładów *Wstępu do matematyki* i rozumie takie terminy, jak *dziedzina funkcji*, *obraz* i *przeciwwobraz*. Ich znaczenie będziemy przypominać w razie potrzeby.

Podkreślimy jedno: w analizie matematycznej mamy często do czynienia z funkcjami, które są określone konkretnymi wzorami, np. $g(x) = \ln(17 + \exp(x^2 + \cos x))$ dla $x \in \mathbb{R}$. Otóż należy pamiętać, że z formalnego punktu widzenia *sam wzór* jeszcze funkcji nie określa: *trzeba powiedzieć, dla jakich argumentów funkcja ma być określona* (a jeśli chcemy posługiwać się wzorem, należy sprawdzić, że ma on dla odpowiednich argumentów sens). Proszę zauważyć, że definiując pierwiastki n -tego stopnia, funkcję wykładniczą, logarytm naturalny i funkcje trygonometryczne, postępowaliśmy właśnie w taki sposób.

5.1 Punkty skupienia. Granica funkcji.

W analizie używa się dwóch definicji granicy funkcji: jednej podanej przez Heinego i drugiej, równoważnej, podanej przez Cauchy'ego. Pierwszą z nich będzie nam łatwiej sformułować, korzystając z wcześniej omówionych pojęć. Drugą zajmijmy się później.

Mówiąc o granicy funkcji, będziemy posługiwać się zbiorem $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, aby opisywać zarówno niewłaściwe wartości granic (tzn. to, że wartości funkcji eksplodują w pobliżu pewnej wartości argumentu), jak i zachowanie funkcji dla bardzo dużych argumentów. Najpierw powiemy, *w jakich punktach będziemy znajdować granice funkcji*.

Definicja 5.1 (punkt skupienia). Niech $A \subset \mathbb{R}$. Powiemy, że punkt $p \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(a_n) \subset A \setminus \{p\}$ taki, że $\lim a_n = p$.

Gdy $p = \pm\infty$, to w definicji punktu skupienia chodzi oczywiście o granicę niewłaściwą.

Przykład 5.2. Niech A będzie zbiorem skończonym, $A = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}$. Wtedy A nie ma w ogóle punktów skupienia: żaden ciąg utworzony z elementów zbioru A z pewnością nie dąży do $\pm\infty$, tzn. $p_{1,2} = \pm\infty$ nie są punktami skupienia. Jeśli zaś $p \in \mathbb{R}$ i weźmiemy

$$0 < \varepsilon_0 < \min_{x \in A, x \neq p} |x - p|,$$

to w przedziale $(p - \varepsilon_0, p + \varepsilon_0)$ nie ma żadnych elementów zbioru $A \setminus \{p\}$, więc żaden ciąg $(a_n) \subset A \setminus \{p\}$ nie jest zbieżny do p . \square

Przykład 5.3. Niech $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Liczba 0 jest punktem skupienia A . Jeśli $x \in \overline{\mathbb{R}}$, ale $x \neq 0$, to x nie jest punktem skupienia A . Sprawdzamy to łatwo, posługując się definicją granicy podobnie, jak w poprzednim przykładzie. \square

Zatem: punkt skupienia zbioru A *nie musi* należeć do A .

Przykład 5.4. Jedynym punktem skupienia zbioru \mathbb{N} jest $p = +\infty$. Istotnie, ciąg o wyrazach $a_n = n$ ma granicę $p = +\infty$, a jego wyrazy oczywiście są różne od p .

Ponadto, ciąg (a_n) liczb naturalnych ma granicę $p \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy od pewnego miejsca jest stały. Wtedy jednak p nie może być różne od wszystkich wyrazów ciągu (a_n) , gdyż $p = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a_n$ dla wszystkich n dostatecznie dużych.

Podobnie stwierdzamy, że jedynymi punktami skupienia \mathbb{Z} są $\pm\infty$. \square

Przykład 5.5. Zbiór punktów skupienia przedziału $A = (0, 1)$ składa się z wszystkich punktów przedziału domkniętego $[0, 1]$. Czytelnik zechce to sprawdzić samodzielnie. \square

Definicja 5.6 (definicja Heinego granicy funkcji). Załóżmy, że $f: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ i $p \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A . Mówimy, że f ma w punkcie p granicę $g \in \overline{\mathbb{R}}$, i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n) \subset A \setminus \{p\}$ takiego, że $\lim x_n = p$, granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

istnieje i jest równa g .

Uwaga: gdy g lub $p \notin \mathbb{R}$, to w odpowiednich miejscach chodzi, rzecz jasna, o granice niewłaściwe odpowiednich ciągów.

Poniższe twierdzenie jest natychmiastową konsekwencją Twierdzenia 2.10 (i własności granic niewłaściwych). Odnotujmy je dla porządku, zanim przejdziemy do przykładów.

Twierdzenie 5.7 (arytmetyczne własności granicy funkcji). Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}$ i $p \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A . Niech

$$f, g: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = b$$

dla pewnych $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Wówczas:

1. Jeśli wynik działania $a + b$ jest określony w $\overline{\mathbb{R}}$, to $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x)) = a + b$.

2. Jeśli wynik działania $a \cdot b$ jest określony w $\overline{\mathbb{R}}$, to $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$.

3. Jeśli wynik działania $a - b$ jest określony w $\overline{\mathbb{R}}$, to $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - g(x)) = a - b$.

4. Jeśli wynik działania $\frac{a}{b}$ jest określony w $\overline{\mathbb{R}}$ i $g(x) \neq 0$ dla $x \in A$, to $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Zanim przejdziemy do prostych przykładów, podkreślmy dwie rzeczy: Po pierwsze, o granicy f w p można mówić także wtedy, gdy f nie jest w ogóle określona w punkcie p ; p ma być punktem skupienia dziedziny funkcji f , nie musi do tej dziedziny należeć. Po drugie, nawet gdy f jest określona w punkcie p , to liczby

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) \quad \text{oraz} \quad f(p)$$

nie muszą mieć ze sobą nic wspólnego. Ilustruje to banalny przykład: niech $p = 0$, a $f(x) = 0$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 2010 + \pi + e$. Dla każdego ciągu (x_n) liczb różnych od 0 ciąg $f(x_n)$ składa się z samych zer, więc ma granicę równą zero. Dlatego $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Wartością f w zerze możemy manipulować dowolnie, nie zmieniając granicy f w 0.

Przykład 5.8. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie ustaloną liczbą i niech

$$g(x) = \frac{1}{x^k}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dla dowolnego ciągu $x_n \rightarrow +\infty$ mamy $1/(x_n)^k \rightarrow 0$, więc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Przykład 5.9. Wprost z Twierdzenia 3.2 – patrz punkt (E8) – wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

(Warunek podany w tym twierdzeniu jest powtórzeniem warunku z definicji Heinego dla funkcji określonej wzorem $f(x) = (e^x - 1)/x$ na $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

Przykład 5.10. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N}$, tzn.

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie a_i są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $p \in \mathbb{R}$, to z twierdzenia o granicy sumy i iloczynu ciągów wnioskujemy, że dla każdego ciągu $x_n \rightarrow p$ jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a_0 + a_1p + \cdots + a_np^n = f(p),$$

nawet bez konieczności zakładania, że $x_n \neq p$. Zatem, z definicji,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

Obliczmy teraz granice f w punktach $\pm\infty$. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $a_n > 0$. Niech $g(x) = f(x)/x^n$ dla $x \neq 0$. Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} \right) + a_n = a_n > 0,$$

więc na mocy twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_n \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty.$$

Mamy także $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = (-1)^n \cdot +\infty$, więc przy założeniu $a_n > 0$ jest

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ +\infty & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

(Dla $a_n < 0$ znaki w odpowiedzi trzeba zamienić).

Przykład 5.11. Wprost z Twierdzenia 4.59 wynika, że

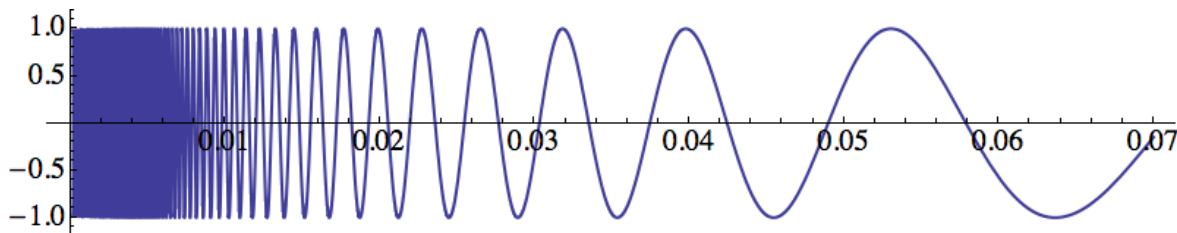
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

To, że w obu przypadkach zachodzi warunek, podany w definicji Heinego, jest treścią ostatniej, trzeciej części Twierdzenia 4.59.

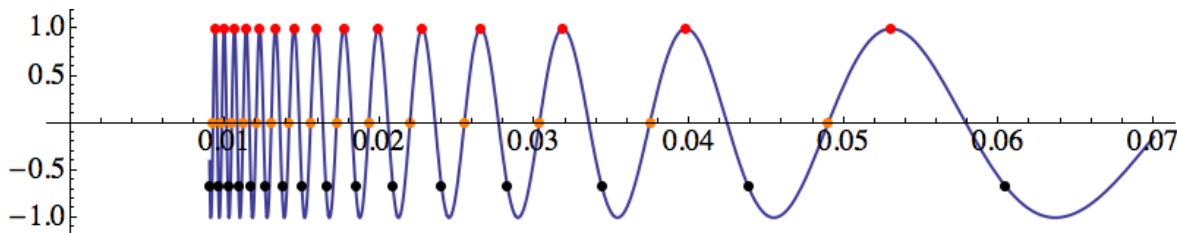
Przykład 5.12. Granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{1}{x} \right)$$

nie istnieje: dla ciągu $x_k = 1/2k\pi$, $k = 1, 2, \dots$ mamy $x_k \rightarrow 0$ i $\cos(1/x_k) = \cos 2k\pi = 1$, a dla ciągu $z_k = 1/(2k\pi + \pi/2)$, także zbieżnego do zera, jest $\cos z_k = \cos(2k\pi + \pi/2) = 0$. Zatem dla $x_k \rightarrow 0$ ciąg $\cos(1/x_k)$ może mieć różne granice (a także może być rozbieżny).



Funkcja $f(x) = \cos(1/x)$ w otoczeniu zera. Oscylacje wykresu są coraz gęstsze, gdyż funkcja $x \mapsto 1/x$ przekształca $(0, 1)$ na całą półoś $(1, \infty)$. Dlatego w każdym przedziale $(0, \varepsilon)$ funkcja f przyjmuje każdą z wartości $y \in [-1, 1]$ nieskończenie wiele razy.



Funkcja $f(x) = \cos(1/x)$ w otoczeniu zera, II. Można wykazać (zainteresowany Czytelnik zechce to zrobić samodzielnie), że dla każdego $y \in [-1, 1]$ istnieje taki ciąg $x_n \rightarrow 0$, że $f(x_n) \rightarrow y$. Na rysunku zaznaczono punkty $(x_n, f(x_n))$ dla trzech różnych takich ciągów; przedstawiono tylko wartości $0,009 \leq x \leq 0,07$.

Przykład 5.13. Niech $A = (-1, \infty) \setminus \{0\}$, $p = 0$. Zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

To łatwo wynika ze znanych nam już własności funkcji wykładniczej i logarytmu naturalnego. Istotnie, z definicji potęgi o dowolnej podstawie i wykładniku,

$$f(x) := (1+x)^{1/x} = \exp\left(\ln\left((1+x)^{1/x}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right).$$

Niech $(x_n) \subset A$ będzie ciągiem zbieżnym do zera. Połóżmy $y_n = (x_n)^{-1} \cdot \ln(1+x_n)$. Stosując punkt (L6) Twierdzenia 3.6, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1.$$

Ponieważ $f(x_n) = \exp y_n$, więc na mocy Twierdzenia 3.2, punkt (E7),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(y_n) = \exp(1) = e.$$

Przykład 5.14. Granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

nie istnieje. Dla ciągu $x_n = 1/n \rightarrow 0$ mamy bowiem $1/x_n = n \rightarrow +\infty$, natomiast dla innego ciągu, $-x_n = -1/n$, także zbieżnego do zera, jest $f(x_n) \rightarrow -\infty$. Nie ma więc *wspólnej* granicy wszystkich ciągów $1/x_n$, gdzie $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$.

Z intuicyjnego punktu widzenia jest jasne, że nieistnienie granicy w Przykładzie 5.12 to zjawisko innego rodzaju niż nieistnienie granicy $1/x$ w zerze. Dla rozróżnienia takich sytuacji wprowadza się pojęcie granicy jednostronnej.

Definicja 5.15 (granica lewostronna). Niech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ i niech p będzie punktem skupienia zbioru A takim, że $p = \lim a_n$ dla pewnego ciągu $(a_n) \subset A \setminus \{p\}$, $a_n < p$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

dla każdego ciągu $(x_n) \subset A \setminus \{p\}$ takiego, że $x_n < p$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $x_n \rightarrow p$ dla $n \rightarrow \infty$, to mówimy, że f ma w p granicę *lewostronną* równą a , i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = a.$$

Podobnie (zmieniając obie nierówności w powyższej definicji na przeciwne) definiujemy granicę *prawostronną*

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x).$$

Jest rzeczą jasną, że w przykładzie 5.14 istnieją obie granice jednostronne:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Stwierdzenie 5.16. *Załóżmy, że p jest punktem skupienia zbioru $A \subset \mathbb{R}$ i istnieją ciągi $(x_n), (y_n) \subset A$, $x_n, y_n \rightarrow p$, $x_n < p < y_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Następujące warunki są równoważne:*

- (i) f ma w p granicę równą a ;
- (ii) f ma w p obie granice jednostronne i każda z nich jest równa a .

Prosty dowód, polegający na sprawdzeniu warunków z definicji granicy (granicy jednostronnej) i wykorzystaniu Stwierdzenia 2.36, wiążącego zbieżność ciągu ze zbieżnością jego podciągów do wspólnej granicy, pozostawiamy Czytelnikowi.

Podamy teraz drugą definicję granicy, sformułowaną przez Cauchy'ego. Zamiast używać pojęcia granicy ciągu, operuje się w niej odpowiednio sprecyzowanym pojęciem *bliskości* punktów. Wyróżnimy w tej definicji wiele przypadków.

Definicja 5.17 (definicja Cauchy'ego granicy funkcji). Niech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ i niech $p \in \overline{\mathbb{R}}$ będzie punktem skupienia zbioru A oraz $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Mówimy, że funkcja f ma w p granicę równą a , symbolicznie:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. (Przypadek $a, p \in \mathbb{R}$): dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że gdy $0 < |x - p| < \delta$ i $x \in A$, to $|f(x) - a| < \varepsilon$.
2. (Przypadek $p \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$, granica niewłaściwa w pewnym punkcie prostej): dla każdej liczby $M > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że gdy $0 < |x - p| < \delta$ i $x \in A$, to $\pm f(x) > M$.
3. (Przypadek $p = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$, tzn. granica właściwa w nieskończoności):] dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $T > 0$ takie, że gdy $\pm x > T$ i $x \in A$, to $|f(x) - a| < \varepsilon$.
4. (Przypadek $p = \pm\infty$, $a = \pm\infty$, tzn. granica niewłaściwa w $\pm\infty$): dla każdej liczby $M > 0$ istnieje $T > 0$ takie, że gdy $\pm x > T$ i $x \in A$, to $\pm f(x) > M$.

Proszę zauważyć, że punkty 2 i 3 kryją w sobie po dwa podprzypadki, a punkt 4 — aż cztery podprzypadki (bo są wtedy 4 możliwości dokonania konkretnego wyboru znaków \pm). O wszystkich warunkach, sformułowanych w tej definicji dla różnych na pozór sytuacji, należy myśleć tak: *jeśli argument przyjmuje wartości odpowiednio bliskie p , to funkcja przyjmuje wartości bliskie a* . To, jak należy precyzyjnie pojmować termin *bliskie*, zależy od tego, czy $a, p = \pm\infty$, czy nie.

Twierdzenie 5.18 (równoważność obu definicji granicy). *Załóżmy, że $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ i $p \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A . Jeśli f ma w p granicę $a \in \mathbb{R}$ według definicji Heinego, to f ma w p granicę $a \in \mathbb{R}$ według definicji Cauchy'ego, i na odwrót.*

Dowód. Zajmiemy się tylko jednym przypadkiem w definicji granicy według Cauchy'ego. Czytelnik zainteresowany dogłębnym rozumieniem treści całego wykładu zechce samodzielnie uzupełnić szczegóły pozostałych przypadków. (Schemat dowodu jest identyczny).

Niech $a, p \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a \quad \text{wg. definicji Heinego.}$$

Pokażemy metodą sprowadzenia do niedorzeczności, że f ma w p granicę a także wg. definicji Cauchy'ego. W tym celu założmy, że nie zachodzi warunek z definicji Cauchy'ego. Skoro tak, to zachodzi jego zaprzeczenie:

Istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że dla każdego $\delta > 0$ istnieje punkt $x \in A$, który spełnia nierówności $0 < |x - p| < \delta$, ale $|f(x) - a| \geq \varepsilon_0 > 0$.

Wykorzystując ten warunek dla $\delta_k = 1/k$, gdzie $k = 1, 2, \dots$, znajdziemy ciąg punktów

$$(x_k) \subset A \setminus \{p\}, \quad 0 < |x_k - p| < \frac{1}{k} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, \quad (5.1)$$

taki, że $|f(x_k) - a| \geq \varepsilon_0$. Z (5.1) wynika, że $A \ni x_k \rightarrow p$ dla $k \rightarrow \infty$ i $x_k \neq p$, więc zgodnie z definicją Heinego powinno być $f(x_k) \rightarrow a$. Mamy jednak $|f(x_k) - a| > \varepsilon_0$ dla wszystkich k , więc granica ciągu $f(x_k)$ nie może być równa a , tzn. nie zachodzi warunek podany w definicji Heinego. Uzyskana sprzeczność kończy pierwszą część dowodu.

Teraz założmy, że

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a \quad \text{wg. definicji Cauchy'ego.}$$

Niech $(x_k) \subset A \setminus \{p\}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $x_k \rightarrow p$ dla $k \rightarrow \infty$. Wykażemy, posługując się definicją granicy ciągu, że $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = a$, tzn. sprawdzimy, że istotnie zachodzi warunek podany w definicji Heinego.

Ustalmy w tym celu $\varepsilon > 0$. Dobierzmy doń $\delta > 0$, posługując się definicją Cauchy'ego granicy. Ponieważ $x_k \rightarrow p$ i $x_k \neq p$, więc istnieje takie $k_1 = k_1(\delta)$, że

$$0 < |x_k - p| < \delta \quad \text{dla wszystkich } k > k_1.$$

Wtedy jednak, wobec definicji Cauchy'ego granicy funkcji, mamy

$$|f(x_k) - a| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } k > k_1.$$

Zatem, ciąg $(f(x_k))$ ma granicę równą a . To wynika wprost z definicji granicy ciągu. \square

Zanim wprowadzimy formalną definicję ciągłości, odnotujmy kilka twierdzeń o granicach funkcji, które natychmiast wynikają z tego, co już wiemy o zbieżności ciągów.

Twierdzenie 5.19 (o trzech funkcjach). *Jeśli*

$$f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{dla } x \in A,$$

a p jest takim punktem skupienia zbioru A, że

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x),$$

(tzn. obie powyższe granice istnieją i są równe), to granica $\lim_{x \rightarrow p} h(x)$ też istnieje i zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x).$$

Dowód. Teza wynika wprost z definicji Heinego i twierdzenia o trzech ciągach. \square

Twierdzenie 5.20 (warunek Cauchy’ego istnienia granicy). Załóżmy, że $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia zbioru A . Wówczas f ma w p granicę równą $a \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek Cauchy’ego:

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla wszystkich $t, s \in A \setminus \{p\}$ z nierówności $|t - p| < \delta$, $|s - p| < \delta$ wynika, że $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$.

Dowód. Ćwiczenie dla zainteresowanych. \square

Czytelnik zechce samodzielnie sformułować warunek Cauchy’ego istnienia granicy funkcji w punkcie $p = \pm\infty$. To łatwe zadanie: trzeba posłużyć się intuicyjnym rozumieniem warunku Cauchy’ego: jeśli argumenty s, t są odpowiednio bliskie p , to wartości funkcji w punktach s, t są bliskie – i dokonać przekładu na ścisły język.

Twierdzenie 5.21. Załóżmy, że $A, B \subset \mathbb{R}$,

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: B \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(A) \subset B,$$

a jest punktem skupienia zbioru A , b jest punktem skupienia zbioru B , a ponadto

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c, \quad f(x) \neq b \quad \text{dla } x \in A.$$

Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$$

Dość oczywisty dowód, wykorzystujący którąkolwiek z równoważnych definicji granicy, pominiemy. Proszę tylko zauważyć, że obliczając w Przykładzie 5.13 granicę funkcji $f(x) = (1+x)^{1/x}$ w zerze, *de facto* posłużyliśmy się właśnie taką argumentacją, podając uzasadnienie.

5.2 Funkcje monotoniczne

Definicja 5.22. Kresem dolnym (odpowiednio: górnym) funkcji $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy kres górny (odpowiednio: dolny) zbioru $f(A)$ wartości tej funkcji. Piszemy

$$\inf_A f \equiv \inf_{x \in A} f(x) := \inf f(A), \quad \sup_A f \equiv \sup_{x \in A} f(x) := \sup f(A).$$

Gdy zbiór wartości f nie jest ograniczony z góry, piszemy $\sup f = +\infty$. Gdy zbiór wartości f nie jest ograniczony z dołu, piszemy $\inf f = -\infty$.

Definicja 5.23. Funkcja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest:

- (i) *malejąca*, gdy $f(x) > f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$ takich, że $x < y$;
- (ii) *niemalejąca*, gdy $f(x) \leq f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$ takich, że $x < y$;
- (iii) *rosnąca*, gdy $f(x) < f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$ takich, że $x < y$;
- (iv) *nierosnąca*, gdy $f(x) \geq f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$ takich, że $x < y$.

Funkcja, która spełnia któryś z warunków (i)–(iv) tej definicji, jest *monotoniczna*. Funkcje rosnące i malejące nazywamy *ściśle monotonicznymi*.

Twierdzenie 5.24 (granice jednostronne funkcji monotonicznych). *Załóżmy, że $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna i p jest punktem skupienia zbioru A . Wówczas:*

- (i) *Jeśli istnieje ciąg $(x_n) \subset A \cap (-\infty, p)$ zbieżny do p , to f ma w p granicę lewostronną.*
- (ii) *Jeśli istnieje ciąg $(x_n) \subset A \cap (p, +\infty)$ zbieżny do p , to f ma w p granicę prawostronną.*

Dowód. Udowodnimy tylko punkt (i); dowód (ii) jest taki sam. Bez zmniejszenia ogólności przyjmijmy, że f jest niemalejąca; jeśli nie jest, to można rozpatrzyć funkcję $(-f)$.

Niech

$$M = \sup \{f(x) : x \in A, x < p\}.$$

(Uwaga: dopuszczamy możliwość $M = +\infty$; Czytelnik zechce wskazać przykłady takich sytuacji). Pokażemy, że f ma w p granicę lewostronną równą M .

Weźmy jakikolwiek ciąg $(x_n) \subset A \cap (-\infty, p)$ zbieżny do p . Ustalmy dowolne $M' < M$.¹ Z definicji kresu górnego, istnieje $x \in A \cap (-\infty, p)$ taki, że $M' < f(x) \leq M$. Ponieważ $x_n \rightarrow p > x$, więc istnieje takie $n_1 \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n > n_1$ mamy

$$x < x_n < p,$$

stąd zaś, dzięki monotoniczności f ,

$$M' < f(x) \leq f(x_n) \leq M = \sup \{f(x) : x \in A, x < p\} \quad \text{dla wszystkich } n > n_1.$$

Zatem, wprost z definicji granicy ciągu, $\lim f(x_n) = M$. Z dowolności (x_n) i definicji granicy lewostronnej wynika więc, że f ma w p granicę lewostronną M . \square

5.3 Ciągłość funkcji

Zdefiniujemy teraz jedną z najważniejszych klas funkcji, badanych w całej analizie. Z odpowiednikami tej definicji dla funkcji wielu zmiennych rzeczywistych, a także funkcji określonych na tzw. przestrzeniach metrycznych i topologicznych, Czytelnik zetknie się na drugim roku studiów.

Definicja 5.25. Niech $f: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ i niech $p \in A$. Powiemy, że f jest *ciągła w punkcie p* wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z dwóch poniższych warunków:

1. Punkt p nie jest punktem skupienia zbioru A .
2. Punkt p jest punktem skupienia zbioru A i f ma w p granicę równą $f(p)$.

Definicja 5.26. Mówimy, że funkcja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest *ciągła (na zbiorze A)*, jeśli f jest ciągła w każdym punkcie zbioru A .

¹Proszę myśleć o tym następująco: gdy $M \in \mathbb{R}$, to $M' = M - \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$, a gdy $M = +\infty$, to M' jest dowolną liczbą. Taki zapis pozwala uniknąć oddzielnej analizy 2 przypadków; nic innego się w tym nie kryje.

Najczęściej będziemy mówić po prostu “ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła”. Takie zdanie oznacza zawsze ciągłość f we wszystkich punktach A .

Jeśli zbiór A jest przedziałem, to z intuicyjnego punktu widzenia ciągłość funkcji oznacza, że jej wykres można narysować jednym pociągnięciem ołówka, bez odrywania go od papieru.

Stwierdzenie 5.27. *Niech $f: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ i niech $p \in A$. Wówczas f jest ciągła w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla wszystkich $x \in A \cap (p - \delta, p + \delta)$ zachodzi nierówność $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.*

Dowód. Jeśli p nie jest punktem skupienia A , to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $(p - \delta, p + \delta) \cap A = \{p\}$. Wtedy warunek z tezy jest banalny: dla wszystkich $x \in A \cap (p - \delta, p + \delta)$ mamy po prostu $|f(x) - f(p)| = |f(p) - f(p)| = 0 < \varepsilon$.

Jeśli p jest punktem skupienia A , to warunek z tezy twierdzenia jest powtórzeniem, w języku definicji Cauchy’ego granicy funkcji, zdania “ f ma w p granicę równą $f(p)$.” \square

Z poznanych dotychczas twierdzeń o własnościach granicy natychmiast otrzymujemy następujące wnioski.

Twierdzenie 5.28. *Jeśli $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $p \in A$, to $f \pm g$ i $f \cdot g$ są ciągłe w p . Jeśli ponadto $g \neq 0$ we wszystkich punktach zbioru A , to f/g jest określona na A i ciągła w punkcie p . \square*

Uwaga: nietrudno się przekonać, że założenie $g \neq 0$ na A jest potrzebne, żeby o ilorazie f/g można było mówić w punktach zbioru A . Do samej ciągłości f/g w p wystarczy — w obu przypadkach objętych definicją ciągłości — założenie $g(p) \neq 0$.

Wniosek 5.29. *Jeśli funkcja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $p \in A$, a $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie zbiór B zawiera zbiór $f(A)$ wartości funkcji f , jest ciągła w punkcie $f(p)$, to złożenie $g \circ f$ jest ciągłe w punkcie p .*

Omawialiśmy wcześniej funkcję wykładniczą, logarytm naturalny, funkcje trygonometryczne oraz (krótko) potęgi o dowolnym wykładniku i podstawie dodatniej. Dla $f = \exp, \ln, \sin$ i \cos formułowaliśmy twierdzenia: *jeśli (x_n) jest dowolnym ciągiem zbieżnym do x , to ciąg $f(x_n)$ ma granicę $f(x)$* . Ich dowody wymagały przeprowadzenia konkretnych oszacowań i rachunków. Widzimy teraz, poznawszy definicję Heinego granicy i definicję ciągłości, że za każdym razem chodziło po prostu o *ciągłość* odpowiedniej funkcji. Za to teraz możemy łatwo podać serię przykładów.

Przykład 5.30. Następujące funkcje są ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny:

- a) Funkcja stała $f(x) = c$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- b) Funkcja $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. To wynika natychmiast z definicji (i ma tautologiczny charakter).
- c) Dowolny wielomian $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ stopnia n , gdzie $x \in \mathbb{R}$. Ciągłość wielomianów wynika, przez indukcję względem stopnia, z twierdzenia o ciągłości sumy i iloczynu funkcji ciągłych.

- d) Funkcja $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$ jest określona i ciągła w każdym punkcie zbioru $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. To wynika z twierdzenia o ilorazie funkcji ciągłych. Ogólniej, każda funkcja wymierna, tzn. funkcja $f(x) = P(x)/Q(x)$, gdzie P, Q są wielomianami i $x \in Z_Q$, gdzie

$$Z_Q := \mathbb{R} \setminus \{\text{wszystkie pierwiastki wielomianu } Q\},$$

jest ciągła w każdym punkcie zbioru Z_Q .

- e) Funkcja $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła; patrz Twierdzenie 3.2, punkt (E7).
 f) Funkcje $\sin, \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe. Ten fakt był treścią Wniosku 4.62.
 g) Funkcja $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, patrz Twierdzenie 3.6. Ciągłość logarytmu można wywnioskować także z ogólnego twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej, którym zajmujemy się w następnym podrozdziale.

Definicja 5.31 (tangens i cotangens). Kładziemy

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2: k \in \mathbb{Z}\},$$

oraz

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}.$$

Stwierdzenie 5.32. Funkcje

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}: \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2: k \in \mathbb{Z}\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \operatorname{ctg}: \mathbb{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\} &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

są ciągłe. \square

Oczywiście nie wszystkie funkcje są ciągłe.

Przykład 5.33. a) Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

jest nieciągła w zerze i ciągła w pozostałych punktach prostej \mathbb{R} .

b) Tzw. funkcja Dirichleta

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

jest nieciągła w każdym punkcie prostej. To wynika stąd, że każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych i pewnego ciągu liczb niewymiernych.

- c) Ten przykład będzie nieco subtelniejszy. Jego celem jest wskazanie, że punkty ciągłości i nieciągłości funkcji mogą być “dość dokładnie wymieszane”. Otóż, tzw. funkcja Riemanna $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{gdy } x = p/q > 0, \text{ gdzie } p, q \in \mathbb{N} \text{ i ułamek } p/q \text{ jest nieskracalny,} \\ 0 & \text{gdy } x > 0 \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

jest nieciągła we wszystkich punktach wymiernych i ciągła we wszystkich punktach niewymiernych.

Każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb niewymiernych. Dlatego, gdyby f miała być ciągła w $w \in \mathbb{Q}$, musiałaby spełniać warunek $f(w) = 0$. Jednak $f(w) \neq 0$ dla wszystkich $w \in \mathbb{Q}$.

Udowodnimy ciągłość tej funkcji w punktach niewymiernych. Ustalmy liczbę $x > 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oraz $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $q_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $1/q_0 < \varepsilon$. W przedziale $(0, x + 1)$ jest tylko skończenie wiele liczb wymiernych w , które mają w postaci nieskracalnej zapis $w = p/q$ dla pewnego $q \leq q_0$. Innymi słowy, zbiór

$$\{|x - w| : w \in \mathbb{Q}, w = p/q < x + 1, p \in \mathbb{N}, q = 1, \dots, q_0, \text{NWD}(p, q) = 1\}$$

jest skończony i ma tylko elementy dodatnie (tu korzystamy z niewymierności x). Dlatego liczba

$$\delta := \min(x, \inf A)$$

jest dodatnia! Dla każdego $t > 0$ takiego, że $|t - x| < \delta$, mamy $|f(t) - f(x)| < 1/q_0 < \varepsilon$: dla t niewymiernych różnica $f(t) - f(x)$ jest po prostu zerem, a dla t wymiernych $f(t) - f(x) = f(t) = 1/q$ dla pewnego $q > q_0$, bo mniejsze mianowniki wykluczaliśmy, definiując liczbę δ .

Uwaga: Można wykazać, że nie istnieje żadna funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która byłaby ciągła tylko w punktach wymiernych.

Przykład 5.34. W fizyce funkcje nieciągłe spotykamy m.in. w opisie wszelkich zjawisk związanych z pękaniem i rozrywaniem różnych materiałów, a także w opisie przemian fazowych. Z przejściem ustalonej masy wody ze stanu ciekłego w stały (tzn. zamrożeniem) wiąże się skokowy wzrost objętości. Dlatego zamrażający lód potrafi np. rozsadzić zamknięte szklane naczynie.

Przykład 5.35. Jeśli założymy, że czas t ma wartości rzeczywiste dodatnie, a wszelkie kwoty pieniędzy mierzymy w groszach i ich całkowitych wielokrotnościach², to w ekonomii we wszystkich ciekawych przypadkach będziemy, z formalnego punktu widzenia, mieć do czynienia wyłącznie z funkcjami nieciągłymi zmiennej t !

Kluczowe znaczenie mają w analizie dwie własności funkcji ciągłych. Pierwsza z nich orzeka, że funkcja ciągła na przedziale domkniętym przyjmuje swoje kresy.

Twierdzenie 5.36 (Weierstrassa o przyjmowaniu kresów). *Jeśli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją punkty $x_0, x'_0 \in [a, b]$ takie, że*

$$f(x_0) = \sup_{[a,b]} f, \quad f(x'_0) = \inf_{[a,b]} f.$$

²To nawet w praktyce nie jest prawdą: wystarczy spojrzeć na tabele kursów walut, gdzie podawane są ułamki groszy, centów itp.

Zauważmy, że z tego twierdzenia wynika, że $\sup f$ i $\inf f$ są liczbami rzeczywistymi, tzn. są skończone. Zauważmy także, że założenie ciągłości f na przedziale domkniętym jest istotne.

Przykład 5.37. Funkcja $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = x^2$ jest ciągła na $(0, 1)$, ale ani $\sup f = 1$, ani $\inf f = 0$ nie są elementami zbioru $f((0, 1)) = (0, 1)$ wartości funkcji.

Przykład 5.38. Funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, jest ciągła, ale zbiór jej wartości nie jest ograniczony ani z góry, ani z dołu.

Dowód Twierdzenia 5.36. Niech $M = \sup f \in \overline{\mathbb{R}}$. Z definicji kresu górnego wynika, że istnieje ciąg $(x_n) \subset [a, b]$ taki, że $f(x_n) \rightarrow M$ dla $n \rightarrow \infty$.³

Ciąg $(x_n) \subset [a, b]$ jest ograniczony, więc na mocy Twierdzenia Bolzano–Weierstrassa ma podciąg $(x_{n_k})_{k=1,2,\dots}$ zbieżny do pewnej liczby $x_0 \in [a, b]$. Ciąg liczb $f(x_{n_k})$, $k = 1, 2, \dots$, jest zbieżny, gdyż jest podciągami ciągu zbieżnego. Zatem

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0);$$

ostatnia równość zachodzi dlatego że f jest ciągła.

Tak samo dowodzimy, że $m = \inf f$ jest równe $f(x'_0)$ dla pewnego $x'_0 \in [a, b]$. \square

Z drugą ważną własnością funkcji ciągłych, tak zwaną własnością Darboux (przyjmowaniem wartości pośrednich), mieliśmy już *de facto* do czynienia kilkakrotnie, w sposób niejawni: zetknęliśmy się z nią, dowodząc surjektywności $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, definiując liczbę π , a także dowodząc istnienia pierwiastków n -tego stopnia z liczb rzeczywistych.

Twierdzenie 5.39 (własność Darboux). *Jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i dla pewnych liczb $x, y \in [a, b]$, $x < y$, jest*

$$f(x) < c < f(y) \quad \text{albo} \quad f(x) > c > f(y)$$

to istnieje $t \in (x, y)$ takie, że $f(t) = c$.

Dowód. Można ograniczyć rozważania do przypadku $f(x) < c < f(y)$ (jeśli zachodzą nierówności przeciwne, to rozpatrujemy $-f$ zamiast f). Połóżmy

$$Z := \{s \in [x, y] : f(s) < c\}.$$

Ponieważ $x \in Z$, więc $Z \neq \emptyset$. Ponadto, Z jest ograniczony z góry przez y . Zatem, Z ma skończony kres górny. Niech $t = \sup Z$.

Wykażemy, że $f(t) = c$. Z definicji kresu górnego wynika, że istnieje ciąg $(s_n) \subset Z$ taki, że $s_n \rightarrow t$ dla $n \rightarrow \infty$. Z ciągłości f i warunku $f(s_n) < c$ otrzymujemy

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) \leq c.$$

Przypuśćmy na chwilę, że $f(t) < c$. Wtedy $\varepsilon := c - f(t) > 0$. Dobierzmy liczbę $\delta > 0$ tak, żeby mieć $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ dla wszystkich $s \in (t - \delta, t + \delta) \subset (x, y)$ (można w tym celu wykorzystać Stwierdzenie 5.27). Wtedy jednak

$$f(s) < f(t) + \varepsilon = f(t) + c - f(t) = c \quad \text{dla wszystkich } s \in (t, t + \delta),$$

tzn. $(t, t + \delta) \subset Z$ i $t = \sup Z$, a to jest sprzeczność. Zatem musi być $f(t) = c$. \square

³Gdy $M = \infty$, to zbiór $f([a, b])$ jest nieograniczony z góry, tzn. istnieje ciąg (x_n) taki, że $f(x_n) \rightarrow +\infty = M$.

Wniosek 5.40. *Każdy wielomian $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nieparzystego stopnia o współczynnikach rzeczywistych ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.*

Dowód. Mnożąc w razie potrzeby P przez liczbę różną od zera (to nie wpływa na pierwiastki wielomianu P), możemy założyć, że

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \\ &= x^{2n+1} \left(1 + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right) \quad \text{dla } x \neq 0. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right) = 0,$$

więc istnieje taka liczba $M > 0$, że

$$\left(1 + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right) \geq 1 - \left| \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right| > \frac{1}{2} > 0 \quad \text{dla } |x| > M.$$

Dla $x \neq 0$ liczby x^{2n+1} i x mają ten sam znak (zwróćmy uwagę: *tylko tu* korzystamy z nieparzystości stopnia wielomianu P). Zatem, dla każdego $x_0 > M$ jest $P(x_0) > 0 > P(-x_0)$. Stosując własność Darboux do $f = P$, $c = 0$ na przedziale $[-x_0, x_0]$, kończymy dowód. \square

Uwaga. Oczywiście, założenie nieparzystości stopnia jest istotne. Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ wielomian $Q(x) = x^{2k} + 1 = (x^k)^2 + 1$ przyjmuje na prostej tylko wartości dodatnie.

5.4 Ciągłość funkcji odwrotnej

W tym podrozdziale wykażemy, że funkcja odwrotna do funkcji ciągłej i różnowartościowej na pewnym przedziale $I \subset \mathbb{R}$ jest ciągła. Dowód tego twierdzenia poprzedzimy sformułowaniem dwóch faktów pomocniczych.

Lemat 5.41. *Założmy, że $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ — funkcją ciągłą na I . Wówczas f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ściśle monotoniczna.*

Dowód. Oczywiście, ścisła monotoniczność f gwarantuje jej różnowartościowość. Wykażemy drugą implikację. Cały dowód polega na umiejętnym stosowaniu własności Darboux i rozumowaniu przez zaprzeczenie.

Jeśli I jest zbiorem jednopunktowym, to nie ma czego dowodzić. Niech więc $x, y \in I$, $x < y$. Bez zmniejszenia ogólności przyjmiemy $c = f(x) < f(y) = d$; w przeciwnym przypadku rozpatrujemy funkcję $-f$.

Niech $z \in (x, y) \subset I$. Gdyby $f(z) < f(x) = c$, to stosując własność Darboux do f na odcinku $[z, y]$, znaleźlibyśmy $x_1 \in (z, y)$ takie, że $f(x_1) = c = f(x)$, co przeczyłoby różnowartościowości f . Gdyby $f(z) > f(y) = d$, to, podobnie, stosując własność Darboux do f na odcinku $[x, z]$, znaleźlibyśmy $y_1 \in (x, z)$ takie, że $f(y_1) = d = f(y)$. Jak wcześniej, przeczyłoby to różnowartościowości f . Zatem musi być $f(x) < f(z) < f(y)$.

Niech teraz $z \in I$, $z > y$. Gdyby $f(z) < f(y)$, to istniałaby liczba c' taka, że

$$f(x) < c' < f(y) \quad \text{oraz} \quad f(z) < c' < f(y).$$

Stosując własność Darboux do f na każdym z odcinków $[x, y]$, $[y, z]$, znaleźlibyśmy punkty

$$z_1 \in (x, y), \quad z_2 \in (y, z) \quad \text{takie, że} \quad f(z_1) = f(z_2) = c_1.$$

To przeczyłoby różnowartościowości f , zatem musi być $f(z) > f(y)$. Podobnie wykazujemy, że dla $I \ni z < x$ jest $f(z) < f(x)$.

Podsumujemy: wykazaliśmy, że jeśli istnieją dwa punkty $x, y \in I$, $x < y$, takie, że $f(x) < f(y)$, to

$$f(s) < f(x) < f(t) < f(y) < f(r) \quad \text{dla } s \in I \cap (-\infty, x), t \in (x, y) \text{ i } r \in I \cap (y, \infty).$$

To oznacza, że f jest rosnąca. (Gdy $f(x) > f(y)$ dla pewnych $x < y \in I$, to oczywiście f jest malejąca, bo wtedy $-f$ jest rosnąca). \square

Następny lemat wynika natychmiast z definicji funkcji odwrotnej.

Lemat 5.42. *Jeśli $A, B \subset \mathbb{R}$ i $f: A \rightarrow B$ jest ściśle monotoniczną bijekcją, to $f^{-1}: B \rightarrow A$ też jest ściśle monotoniczną bijekcją.* \square

Twierdzenie 5.43. *Założmy, że $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna i ciągła. Wówczas*

$$f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

też jest ściśle monotoniczna i ciągła.

Dowód. Ścisła monotoniczność f^{-1} wynika z poprzedniego Lematu. Dla ustalenia uwagi założmy, że f jest rosnąca; wtedy f^{-1} jest rosnąca. Wykażemy ciągłość f^{-1} .

Niech $(y_n) \subset f(I)$ będzie zbieżny do $y_0 \in f(I)$. Przypuśćmy, że ciąg $x_n = f^{-1}(y_n)$ nie jest zbieżny do $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Wtedy istnieje liczba $\varepsilon_0 > 0$ i podciąg (x'_n) ciągu (x_n) taki, że

$$|x'_n - x_0| \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \text{dla wszystkich } n. \quad (5.2)$$

Ciąg $y'_n = f(x'_n)$ jest podciągiem ciągu (y_n) , więc też jest zbieżny do y_0 . Posługując się lematem Sierpińskiego 2.33, możemy z (y'_n) wybrać podciąg monotoniczny (y''_n) . Oczywiście

$$\lim y''_n = \lim y'_n = \lim y_n = y_0.$$

Ponadto, y''_n jest ograniczony przez y_0 z odpowiedniej strony: z góry, gdy jest niemalejący, a z dołu, gdy jest nierosnący. Ponieważ f^{-1} jest rosnąca, więc $x''_n = f^{-1}(y''_n)$ też jest ciągiem monotonicznym, ograniczonym (z odpowiedniej strony!) przez liczbę $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Dlatego

$$\lim x''_n = x \in I;$$

liczba x należy do I , gdyż należy do odcinka o końcach $f^{-1}(y_0)$ i $f^{-1}(y''_1)$, zawartego w I . Dzięki ciągłości f otrzymujemy

$$f(x) = \lim f(x''_n) = \lim y''_n = y_0,$$

a stąd $x_0 = f^{-1}(y_0) = x$. Z definicji granicy, $|x''_n - x_0| < \varepsilon_0$ dla wszystkich dostatecznie dużych n , co przeczy warunkowi (5.2). \square

Uwaga. Powyższe twierdzenie może komuś, z intuicyjnego punktu widzenia, wydawać się czymś zupełnie oczywistym: skoro ciągłość oznacza możliwość rysowania wykresu bez odrywania ołówka od papieru, a wykres f i wykres f^{-1} to ta sama linia, czegoż jeszcze dowodzić? Podkreślmy jednak, że jest rzeczą istotną, iż rozpatrujemy funkcje na przedziałach, ciągłe w każdym punkcie dziedziny.

Zadanie 5.44. Znaleźć przykład bijekcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $f(0) = 0$ i f jest ciągła w zerze, ale $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieciągła w zerze.

Wskazówka. Zacząć od próby określenia f^{-1} tak, żeby pewien ciąg (y_n) zbieżny do zera przekształcić na ciąg (x_n) , który nie jest zbieżny do zera.

Najważniejsze zastosowanie Twierdzenia 5.43 polega na możliwości wnioskowania o ciągłości funkcji odwrotnych do znanych funkcji ciągłych.

Przykład 5.45. Wiemy już, że logarytm naturalny jest funkcją ciągłą. Teraz możemy stwierdzić, że wynika to (także) stąd, że

$$f \equiv \exp: I = \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) = f(\mathbb{R})$$

jest ciągła, a $\ln = f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

5.4.1 Funkcje cyklometryczne.

Określimy teraz funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych. Ponieważ funkcje trygonometryczne nie są różnowartościowe, więc należy jasno powiedzieć, na jakich zbiorach będziemy rozważać funkcje do nich odwrotne.

Zauważmy, że na przedziale $[0, \pi/2] \subset [0, 2]$ cosinus maleje od 1 do 0 (patrz Lemat 4.66 i definicja liczby π). Ponadto, dzięki wzorom (4.19) i (4.20) oraz parzystości cosinusa mamy

$$\cos(\pi - x) = -\sin(\pi/2 - x) = -\cos(-x) = -\cos x.$$

Stąd, posługując się własnością Darboux, od razu wnioskujemy, że $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ jest malejącą, ciągłą bijekcją z przedziału $[0, \pi]$ na przedział $[-1, 1]$.

Definicja 5.46. Arcus cosinus to funkcja

$$\arccos = (\cos)^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

odwrotna do $\cos|_{[0, \pi]}$.

Ze wskazanych wyżej własności cosinusa i z Twierdzenia 5.43 wynika, że funkcja \arccos jest ciągła i malejąca; $\arccos(-1) = \pi$ i $\arccos 1 = 0$.

Ponieważ $\sin x = -\cos(x + \pi/2)$, więc $\sin: [-\pi/2, \pi/2]$ jest ciągłą funkcją rosnącą, której zbiorem wartości jest $[-1, 1]$.

Definicja 5.47. Arcus sinus to funkcja

$$\arcsin = (\sin)^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2],$$

odwrotna do $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}$.

Podobnie jak przed chwilą, z Twierdzenia 5.43 wynika, że funkcja \arcsin jest ciągła i rosnąca. Mamy $\arcsin(\pm 1) = \pm \pi/2$.

Podobnie definiujemy funkcje *arcus tangens* i *arcus cotangens*. Aby wykazać, że kolejne dwie definicje są poprawne, Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić⁴, że $\text{tg}: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą rosnącą, $\text{ctg}: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ — funkcją ciągłą malejącą, a zbiór wartości każdej z tych funkcji jest równy \mathbb{R} .

Definicja 5.48. Arcus tangens to funkcja

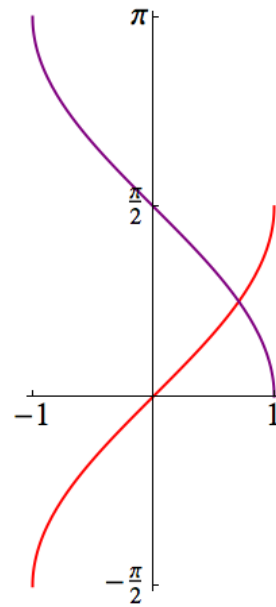
$$\text{arc tg} = (\text{tg})^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2]$$

odwrotna do $\text{tg}|_{(-\pi/2, \pi/2)}$.

Definicja 5.49. Arcus cotangens to funkcja

$$\text{arc ctg} = (\text{ctg})^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

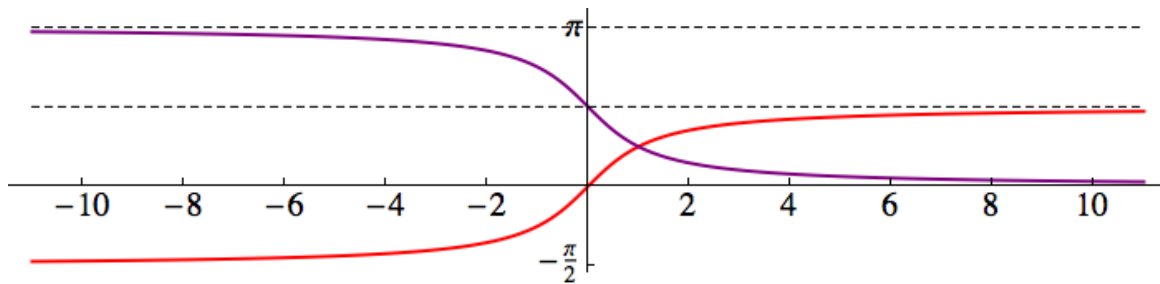
odwrotna do $\text{ctg}|_{(0, \pi)}$.



Arcus tangens rośnie na całej prostej \mathbb{R} , natomiast Arcus sinus i arcus cosinus arcsus cotangens maleje na całej prostej \mathbb{R} . Z Twierdzenia 5.43 wynika, że obie funkcje są ciągłe.

Nietrudno też sprawdzić, że $\text{arc tg } 0 = 0 = \text{arc ctg } 0 - \pi/2$, a ponadto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{arc tg } x = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{arc ctg } x = \frac{\pi}{2}(1 \mp 1) = \begin{cases} \pi, & (x \rightarrow -\infty) \\ 0, & (x \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (5.3)$$



Arcus tangens i arcus cotangens.

Zadanie 5.50. Wykazać, że $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest surjekcją.

5.5 Jednostajna ciągłość

Definicja 5.51. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła (na zbiorze A) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla wszystkich $x, y \in A$ z warunku $|x - y| < \delta$ wynika, że $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

⁴Należy użyć przytoczonych nieco wyżej informacji o monotoniczności sinusa i cosinusa na odpowiednich przedziałach.

Jednostajna ciągłość jest warunkiem mocniejszym od ciągłości. Konkretnie, dość proste przykłady są sformułowane dalej w tym podrozdziale. Podkreślmy jedno – kolejność kwantyfikatorów w definicji ciągłości f na A i w definicji jednostajnej ciągłości f na A jest różna:

Ciągłość f we wszystkich $x \in A$: $\boxed{\forall x \in A} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_{x,\varepsilon} > 0 \quad \forall y \in A \quad \dots$

Jednostajna ciągłość f na A : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \quad \boxed{\forall x \in A} \quad \forall y \in A \quad \dots$

Zatem, badając ciągłość f w każdym punkcie $x \in A$, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, ale robimy to dla każdego punktu $x \in A$ *osobno*. Badając jednostajną ciągłość, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, która jest *wspólna* dla wszystkich punktów $x \in A$. Z intuicyjnego punktu widzenia: chcemy mierzyć wartość funkcji z dokładnością do ε i wiemy, że w *każdym* miejscu dziedziny dopuszczalny błąd pomiaru argumentu wynosi δ . Jest rzeczą dość oczywistą, że taki *wspólny wybór* liczby δ , dobrej dla wszystkich x naraz, może być czymś trudniejszym, niż wybór, którego dokonuje się dla każdego x z osobna.

Stwierdzenie 5.52. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:

- (i) funkcja f jest jednostajnie ciągła na A ;
- (ii) dla każdych dwóch ciągów $(x_n), (y_n) \subset A$ z warunku $\lim(x_n - y_n) = 0$ wynika, że $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Dowód. (i) \Rightarrow (ii). Załóżmy, że $(x_n), (y_n) \subset A$ i $x_n - y_n \rightarrow 0$. Przypuśćmy, wbrew tezie (ii), że ciąg różnic $(f(x_n) - f(y_n))$ nie jest zbieżny do zera. Wtedy istnieje liczba $\varepsilon_0 > 0$ i podciąg $(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}))$ taki, że

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \text{dla wszystkich } n_k. \quad (5.4)$$

Dobierzmy do $\varepsilon_0 > 0$ liczbę $\delta > 0$, korzystając z definicji jednostajnej ciągłości. Dla wszystkich dostatecznie dużych numerów n_k jest wtedy

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \delta,$$

a zatem $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon_0$, co przeczy warunkowi (5.4). Uzyskana sprzeczność kończy dowód implikacji ' \Rightarrow '.

(ii) \Rightarrow (i). Ponownie dowodzimy przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że warunek z definicji jednostajnej ciągłości nie zachodzi. Wtedy istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że dla $\delta_k = \frac{1}{k}$, gdzie $k = 1, 2, \dots$, istnieją punkty $x_k, y_k \in A$ spełniające warunki $|x_k - y_k| < \delta_k = 1/k$ oraz $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon_0$. Wybierzmy dla każdego k taką parę punktów x_k, y_k . Otrzymujemy wtedy

$$0 \leq |x_k - y_k| \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0, \quad \text{ale} \quad |f(x_k) - f(y_k)| \not\rightarrow 0.$$

Zatem, warunek (ii) nie zachodzi, wbrew założeniu — uzyskujemy sprzeczność. \square

Przykład 5.53. Funkcja $f(x) = x^2$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, nie jest jednostajnie ciągła. To wynika z ostatniego stwierdzenia, gdyż warunek (ii) *nie zachodzi*. Biorąc $x_n = n$ i $y_n = n + 1/n$ otrzymujemy $x_n - y_n = -1/n \rightarrow 0$, ale

$$f(y_n) - f(x_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Definicja 5.54 (warunek Lipschitza). Mówimy, że funkcja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza (ze stałą L) wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in A$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Stwierdzenie 5.55. *Jeśli $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia na A warunek Lipschitza, to f jest jednostajnie ciągła.*

Dowód. Jeśli f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L , to dla dowolnego $\varepsilon > 0$, biorąc $\delta = \varepsilon/L$, otrzymujemy:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = L \cdot (\varepsilon/L) = \varepsilon, \quad \text{gdy } |x - y| < \delta \text{ i } x, y \in A.$$

Warunek z Definicji 5.51 jest więc spełniony. \square

Przykład 5.56. Funkcja $\exp: A = [-M, M] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L = \exp M$. Istotnie, dla $x, y \in A$, $x > y$, mamy

$$|e^x - e^y| = e^x - e^y = e^x(1 - e^{y-x}) \leq e^x \cdot (x - y) \leq e^M |x - y|.$$

Pierwsza nierówność wynika stąd, że $1 + t \leq e^t$ dla $t = y - x$, tzn. $1 - e^t \leq -t$ dla $t = y - x$.

Natomiast funkcja $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nie spełnia warunku Lipschitza z żadną stałą $L > 0$. Gdyby bowiem taki warunek spełniała, to mielibyśmy

$$|\exp(x + 1) - \exp(x)| \leq L|(x + 1) - x| = L$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, ale przecież

$$|\exp(x + 1) - \exp(x)| = \exp(x)(e - 1) \geq \exp(x) > L$$

dla wszystkich $x > \ln L$. Intuicja wiążąca się z tym przykładem jest prosta: na ograniczonych przedziałach wykres funkcji wykładniczej nie jest nadmiernie stromy, ale na całej prostej może być dowolnie stromy. To stanie się jaśniejsze, gdy zaczniemy mówić o pochodnej i różniczkowości.

Twierdzenie 5.57 (Cantora o jednostajnej ciągłości, wersja I). *Każda funkcja ciągła $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[a, b]$.*

Dowód. Rozumujemy przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że f jest ciągła, ale nie jest jednostajnie ciągła na $[a, b]$. Wtedy nie zachodzi warunek (ii) ze Stwierdzenia 5.52. Znajdziemy zatem dwa ciągi $(x_k), (y_k) \subset [a, b]$ takie, że $x_k - y_k \rightarrow 0$, ale $f(x_k) - f(y_k) \not\rightarrow 0$. Wybierając w razie potrzeby odpowiedni podciąg, możemy bez zmniejszenia ogólności założyć, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ jest

$$|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon > 0 \quad \text{dla wszystkich } k \in \mathbb{N}. \quad (5.5)$$

Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wynika, że ciąg (y_k) ma podciąg zbieżny (y_{k_l}) , $\lim y_{k_l} = y \in [a, b]$. Mamy także

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_{k_l} = \lim_{l \rightarrow \infty} y_{k_l} + \lim_{l \rightarrow \infty} (x_{k_l} - y_{k_l}) = y + 0 = y.$$

Zatem, z ciągłości f ,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (f(x_{k_l}) - f(y_{k_l})) = \lim_{l \rightarrow \infty} f(x_{k_l}) - \lim_{l \rightarrow \infty} f(y_{k_l}) = f(y) - f(y) = 0.$$

wbrew warunkowi (5.5). \square

Założenie, że f rozapstrujemy na przedziale domkniętym, ma w twierdzeniu Cantora fundamentalne znaczenie.

Przykład 5.58. Funkcja $f(x) = \cos(1/x)$, gdzie $x \in I = (0, 1]$, jest ciągła na przedziale I , ale nie jest na nim jednostajnie ciągła. Jeśli np. $x_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$, $y_n = 1/2n\pi$, to

$$x_n - y_n \rightarrow 0, \quad \text{ale} \quad f(x_n) - f(y_n) = \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = -1 \neq 0.$$

Zatem, nie zachodzi jeden z równoważnych warunków Stwierdzenia 5.52.

Przykład 5.59. Niech $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1]$. Dla ciągów $x_n = 1/n$ i $y_n = x_{n+1}$ mamy oczywiście $x_n - y_n \rightarrow 0$, ale $f(y_n) - f(x_n) = n + 1 - n = 1 \neq 0$.

5.6 Zbiory zwarte

Czytelnik dostrzegł może, że w twierdzeniach Weierstrassa o przyjmowaniu kresów i Cantora o jednostajnej ciągłości zakładaliśmy, że mamy do czynienia z funkcjami ciągłymi na przedziałach domkniętych. Przykłady wskazują, że w żadnym z tych twierdzeń nie można zastąpić przedziału domkniętego np. przedziałem otwartym. Istotne jest jednak nie to, że dziedzina funkcji jest akurat przedziałem, tylko to, że w obu dowodach można stosować twierdzenie Bolzano–Weierstrassa, tzn. można z ciągów punktów dziedziny funkcji wybierać podciągi zbieżne, których granice też należą do dziedziny.

W różnych działach analizy rozpatruje się ważną klasę zbiorów, którym przysługuje taka własność.

Definicja 5.60 (zbiór zwarty). Powiemy, że zbiór $K \subset \mathbb{R}$ jest zwarty, jeśli z każdego ciągu $(x_n) \subset K$ można wybrać taki podciąg zbieżny (x_{n_k}) , że $x = \lim x_{n_k} \in K$.

Stwierdzenie 5.61. Jeśli $K \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym, a $(x_n) \subset K$ jest ciągiem zbieżnym, to $x = \lim x_n \in K$.

Dowód. Z definicji zbioru zwartego wynika, że (x_n) ma podciąg (x_{n_k}) zbieżny do elementu $x' \in K$. Ponieważ (x_n) jest zbieżny, więc wszystkie jego podciągi są zbieżne do tej samej granicy, co cały ciąg, tzn. $x' = \lim x_{n_k} = \lim x_n = x$. Zatem $x = x' \in K$. \square

Należy zdawać sobie sprawę z tego, że klasa wszystkich zbiorów zwartych $K \subset \mathbb{R}$ jest znacznie bogatsza niż klasa przedziałów domkniętych.

Przykład 5.62. a) Każdy przedział domknięty $[a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest zbiorem zwartym. To wynika z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa i stąd, że granica ciągu liczb z przedziału $[a, b]$ też należy do $[a, b]$.

- b) Suma skończonej rodziny zbiorów zwartych jest zbiorem zwartym. Istotnie, jeśli $K_1, \dots, K_N \subset \mathbb{R}$ są zwarte i $K = K_1 \cup \dots \cup K_N$, to każdy ciąg $(x_n) \subset K$ ma nieskończony podciąg zawarty w pewnym K_i , a ten podciąg ma, dzięki zwartości K_i , podciąg zbieżny do pewnego $x \in K_i \subset K$. Zatem np. suma skończonej rodziny przedziałów domkniętych jest zbiorem zwartym.
- c) Zbiór $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\}$ jest zwarty. Czytelnik zechce to sprawdzić samodzielnie.
- d) Jeśli $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest dowolną rodziną niepustych, zwartych podzbiorów prostej \mathbb{R} , takich, że $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$, to

$$K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \subset \mathbb{R}$$

też jest niepustym zbiorem zwartym. Istotnie, weźmy ciąg $(x_n) \subset K$. Korzystając ze zwartości zbioru K_1 , wybierzmy podciąg zbieżny $(x_{n_k}), x_{n_k} \rightarrow x \in K_1$.

Wykażemy, że x należy do każdego ze zbiorów K_j . Ustalmy $j \in \mathbb{N}$. Ponieważ $(x_{n_k}) \subset K \subset K_j$, a zbiór K_j jest zwarty, więc $x = \lim x_{n_k} \in K_j$ na mocy Stwierdzenia 5.61. Zatem $x \in K_j$ dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$, czyli $x \in K = \bigcap K_j$.

Udowodnijmy jeszcze, że $K \neq \emptyset$. Weźmy w tym celu dowolne $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2, x_3 \in K_3, \dots$. Ponieważ $K_n \subset K_1$ dla każdego n , więc ciąg $(x_n) \subset K_1$. Wybierzmy podciąg zbieżny $x_{n_k} \rightarrow x \in K_1$. Ustalmy teraz dowolne j ; począwszy od pewnego numeru n_{k_0} wszystkie punkty x_{n_k} należą do K_j , więc w istocie $x = \lim x_{n_k} \in K_j$ na mocy Stwierdzenia 5.61. Z dowolności j wynika, że $x \in \bigcap K_j$. Zatem $K = \bigcap K_j \neq \emptyset$.

- e) **(Zbiór Cantora)**. Spójrzmy na jeden ze szczególnych przypadków sytuacji, opisanej w poprzednim podpunkcie. Niech

$$K_1 = [0, 1], \quad K_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \quad K_3 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \quad \dots$$

Ogólnie, niech K_{j+1} powstaje z K_j przez usunięcie środkowej części z każdego spośród 2^{j-1} odcinków, tworzących K_j (usuwamy odcinki otwarte i zostawiamy domknięte). Nietrudno udowodnić przez indukcję, że K_j jest sumą 2^{j-1} odcinków domkniętych $I_{jm}, m = 1, \dots, 2^{j-1}$. Zatem K_j jest zwarty. Zbiór Cantora to

$$K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Z poprzedniego podpunktu wynika, że K jest niepustym zbiorem zwartym. Zauważmy, że suma długości odcinków otwartych, które usuwamy w kolejnych krokach konstrukcji zbioru Cantora, jest równa

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots + 2^{j-1} \cdot \frac{1}{3^j} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Intuicyjnie, można byłoby więc uznać, że stopniowo usuwamy z odcinka $[0, 1]$ “całą jego długość”. Jednak, co ciekawe, zbiór K jest nieprzeliczalny! Nie będziemy tego szczegółowo uzasadniać, ale zainteresowany Czytelnik zdoła bez większego trudu

stwierdzić, że każdy punkt $x \in K$ można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z nieskończonym ciągiem liter L i P , stanowiącym ‘adres’ punktu x w zbiorze K ; na j -tym miejscu tego ciągu zapisujemy, czy w j -tym kroku konstrukcji wybieramy lewy, czy prawy z odcinków, na które dzielimy ten spośród odcinków I_{jm} , który zawiera punkt x .

Inny (równoważny) sposób opisu zbioru Cantora jest następujący:

$$K = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}, \text{ gdzie } a_j \in \{0, 2\} \right\}.$$

Sprawdzenie, że określamy ten sam zbiór, co wcześniej, pozostawimy Czytelnikowi. (Wskazówka: należy posłużyć się rozwinięciami trójkowymi liczb rzeczywistych i zbadać, jakie liczby są usuwane w j -tym kroku konstrukcji K , gdy usuwamy środkowe części odcinków.)

Teraz możemy sformułować dwa twierdzenia: ogólne wersje twierdzeń Weierstrassa i Cantora dla zbiorów zwartych.

Twierdzenie 5.63 (Weierstrassa o przyjmowaniu kresów, wersja ogólna). *Jeśli*

$$f: K \rightarrow \mathbb{R}$$

jest ciągła, a $K \subset \mathbb{R}$ jest zwarty, to istnieją punkty $x_0, x'_0 \in K$ takie, że

$$f(x_0) = \sup_K f, \quad f(x'_0) = \inf_K f.$$

Twierdzenie 5.64 (Cantora o jednostajnej ciągłości, wersja ogólna). *Jeśli $K \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym, to każda funkcja ciągła $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na K .*

Dowody obu twierdzeń są, praktycznie biorąc, takie same, jak w przypadku $K = [a, b]$, tylko zamiast twierdzenia Bolzano–Weierstrassa trzeba w odpowiednim miejscu skorzystać z definicji zwartości.

Uwaga 5.65. Zarówno definicją zbioru zwartego, jak i twierdzeniami Weierstrassa i Cantora, można posługiwać się także dla podzbiorów $K \subset \mathbb{C}$. Żadne istotne szczegóły w przytoczonych dowodach nie ulegają wtedy zmianie. Przykładem zbioru zwartego w \mathbb{C} jest np. każdy kwadrat z brzegiem, a także koło domnięte o środku $z_0 \in \mathbb{C}$ i promieniu $R > 0$, tzn. $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$.

5.7 Funkcje wypukłe, I

Na zakończenie rozdziału o ciągłości powiemy, co to jest funkcja wypukła. Poznamy sens geometryczny tego pojęcia. Aby mówić o funkcjach wypukłych, potrzebne jest pojęcie *zbioru wypukłego*. Zbiór jest wypukły, jeśli dowolne dwa jego punkty można połączyć odcinkiem, zawartym w tym zbiorze. Zbiorami wypukłymi na prostej są wszystkie przedziały. Zbiorami wypukłymi na płaszczyźnie są np.: każdy kwadrat, każde koło, każda półpłaszczyzna. Nie jest zbiorem wypukłym np. pięciokąt gwiaździsty.

Definicja 5.66. Niech P będzie zbiorem wypukłym. Funkcja $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ nazywa się wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in P$ i dowolnej liczby $t \in (0, 1)$ zachodzi nierówność

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \quad (5.6)$$

Warunek (5.6) nazywamy nierównością Jensena. Gdy powyższa nierówność jest ostra dla każdego $t \in (0, 1)$ i każdej pary różnych punktów $x \neq y \in P$, to f nazywa się *ściśle wypukłą*.

Zastępując (5.6) nierównością przeciwną,

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y), \quad (5.7)$$

otrzymujemy definicję funkcji wklęsłej.

Ponieważ nierówności wolno dodawać stronami, zachodzi następujący oczywisty fakt.

Stwierdzenie 5.67. *Jeśli zbiór P jest wypukły i $f_1, \dots, f_N: P \rightarrow \mathbb{R}$ są wypukłe, to $f = f_1 + \dots + f_N$ jest wypukła. Jeśli co najmniej jedna z funkcji f_i ($i = 1, 2, \dots, N$) jest ściśle wypukła, to także f jest ściśle wypukła.* \square

(Rzecz jasna, analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe także dla funkcji wklęsłych.)

Interpretacja geometryczna wypukłości. Warunek podany w definicji funkcji wypukłej ma bardzo prosty sens geometryczny: *każdy odcinek, który łączy dwa punkty wykresu funkcji wypukłej, leży nad wykresem tej funkcji* (być może go dotyka).

Sprawdźmy, że w istocie tak jest. Niech $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem) i niech $a \neq b \in I$. Prosta, która przechodzi przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, ma równanie

$$y = l_{a,b}(x) = Ax + B,$$

gdzie

$$A = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \quad B = f(b) - Ab.$$

Ponieważ $l_{a,b}(tx + (1-t)y) = tl_{a,b}(x) + (1-t)l_{a,b}(y)$ dla wszystkich t, x, y , a ponadto

$$\begin{aligned} tl_{a,b}(a) + (1-t)l_{a,b}(b) &= tAa + (1-t)Ab + B \\ &= tAa + (1-t)Ab + f(b) - Ab \\ &= tA(a-b) + f(b) = tf(a) + (1-t)f(b), \end{aligned}$$

więc warunek $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ oznacza tyle samo, co $f(tx + (1-t)y) \leq l_{a,b}(tx + (1-t)y)$. Innymi słowy, w dowolnym punkcie $tx + (1-t)y$, gdzie $t \in (0, 1)$, f ma mniejszą wartość niż funkcja liniowa $l_{a,b}$. Trzeba jeszcze zauważyć, że jeśli $a < b$, to $tx + (1-t)y \in (a, b)$ dla każdego $t \in (0, 1)$ i każdy punkt przedziału (a, b) można przedstawić w takiej postaci dla pewnego $t \in (0, 1)$.

Podamy teraz proste przykłady funkcji wypukłych.

Przykład 5.68. a) Funkcja $f(x) = x^2$ jest ściśle wypukła na \mathbb{R} . Mamy bowiem

$$\begin{aligned} tf(x) + (1-t)f(y) &= tx^2 + (1-t)y^2, \\ f(tx + (1-t)y) &= t^2x^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)^2y^2; \end{aligned}$$

odejmując te równości stronami i zauważając, że $t - t^2 = (1 - t) - (1 - t)^2 = t(1 - t)$, otrzymujemy

$$tf(x) + (1 - t)f(y) - f(tx + (1 - t)y) = t(1 - t)(x - y)^2 \geq 0.$$

Dla $t \in (0, 1)$ i wszystkich $x \neq y$ ostatnia nierówność jest ostra, więc istotnie $f(x) = x^2$ jest ściśle wypukła na całej prostej. \square

- b) Funkcja $g(x) = |x|$ jest wypukła na \mathbb{R} , ale nie jest ściśle wypukła. Wypukłość g wynika natychmiast z nierówności trójkąta dla modułu: dla dowolnych $t \in (0, 1)$ oraz $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$g(tx + (1 - t)y) = |tx + (1 - t)y| \leq |tx| + |(1 - t)y| = tg(x) + (1 - t)g(y).$$

Nietrudno zauważyć, że powyższa nierówność staje się równością np. dla $t = \frac{1}{2}$ i dla wszystkich $x, y > 0$, więc g nie jest ściśle wypukła. \square

- c) Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ funkcja $g(x) = |x - a|$, $x \in \mathbb{R}$, jest wypukła. Ze Stwierdzenia 5.67 wynika więc, że dla dowolnego doboru stałych $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ funkcja

$$h(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_N|, \quad x \in \mathbb{R},$$

jest wypukła.

Oczywiście, badanie za każdym razem wypukłości wprost z definicji byłoby rzeczą kłopotliwą. Niedługo nauczymy się, jak (w pewnych przypadkach) badać wypukłość za pomocą pochodnych. Teraz podamy proste twierdzenie.

Twierdzenie 5.69 (kryterium wypukłości funkcji ciągłych). *Jeśli $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i funkcja ciągła $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek*

$$f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) \leq \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} \quad \text{dla wszystkich } x, y \in P, \quad (5.8)$$

to f jest wypukła. Ponadto, jeśli nierówność (5.8) jest ostra dla wszystkich $x \neq y \in P$, to f jest ściśle wypukła.

Dowód. Krok 1. Wykażemy przez indukcję względem n następujący fakt: *jeśli $t = k/2^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n$, to*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in P. \quad (5.9)$$

(Intuicja jest prosta: wiemy, że wartość f w środku odcinka nie przekracza średniej wartości f na końcach odcinka; stosujemy ten fakt wielokrotnie, znajdując kolejne punkty wykresu położone poniżej odcinka siecznej. Proszę pomyśleć o geometrycznej interpretacji tego warunku.)

Dla $n = 1$ podany warunek to po prostu założenie twierdzenia (uzupełnione tautologiami dla $k = 0, 2$). To jest baza indukcji. Załóżmy, że podany fakt zachodzi dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}$. Niech $t = k/2^{n+1}$, gdzie $k = 1, \dots, 2^{n+1} - 1$. Wtedy $1 - t = l/2^{n+1}$ dla

$l = 2^{n+1} - k$. Jedną z liczb k, l jest nie większa niż $\frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} = 2^n$. Z uwagi na symetrię oznaczeń, możemy założyć, że $k \leq 2^n$. Zatem,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \frac{l}{2^{n+1}}y\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n - k}{2^n}y\right) + \frac{l - 2^n + k}{2^{n+1}}y\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n - k}{2^n}y\right) + \frac{1}{2}y\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n - k}{2^n}y\right) + \frac{1}{2}f(y) \quad \text{z założenia} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}f(x) + \frac{2^n - k}{2^n}f(y)\right) + \frac{1}{2}f(y) \quad \text{dzięki (5.9) dla liczby } n \\ &= tf(x) + (1 - t)f(y). \end{aligned}$$

To kończy dowód indukcyjny. Zauważmy jeszcze, że jeśli f jest ściśle wypukła, to w (5.9) otrzymujemy ostrą nierówność dla $x \neq y$ i $t = k/2^n$, gdzie $0 < k < 2^n$.

Krok 2. Jeśli $t \in (0, 1)$, to $t = \lim t_n$ dla pewnego ciągu ułamków $t_n = k_n/2^n$, gdzie $n = 1, 2, \dots$ i $0 < k_n < 2^n$. Korzystając z pierwszego kroku dowodu i przechodząc do granicy $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy, dzięki ciągłości f ,

$$f(tx + (1 - t)y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n x + (1 - t_n)y) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(t_n f(x) + (1 - t_n)f(y)\right) = tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Zatem f jest wypukła.

Krok 3. Trzeba jeszcze sprawdzić, że jeśli nierówność (5.8) jest ostra dla $x \neq y$, to f jest ściśle wypukła. Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Wtedy dla pewnego $t \in (0, 1)$ i pewnych punktów $x < y \in P$ jest

$$f(tx + (1 - t)y) = tf(x) + (1 - t)f(y). \quad (5.10)$$

Niech r będzie dowolną liczbą taką, że $0 < r < t$. Oznaczmy

$$z = tx + (1 - t)y, \quad w = rx + (1 - r)y.$$

Wtedy $x < z < w < y$ (proszę sprawdzić środkową nierówność samodzielnie!) i dla pewnego $\lambda \in (0, 1)$ jest $z = \lambda x + (1 - \lambda)w$. Liczba λ spełnia warunek

$$\lambda + (1 - \lambda)r = t.$$

Korzystając z (5.10) i dwukrotnie stosując definicję wypukłości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} tf(x) + (1 - t)f(y) = f(z) &= f(\lambda x + (1 - \lambda)w) \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(w) \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)\left(rf(x) + (1 - r)f(y)\right) \\ &= tf(x) + (1 - t)f(y). \end{aligned}$$

Zatem, wszystkie nierówności w powyższym ciągu napisów są równościami, a stąd

$$f(w) = f(rx + (1 - r)y) = rf(x) + (1 - r)f(y) \quad \text{dla każdego } r \in (0, t).$$

Jednak w pierwszym kroku dowodu stwierdziliśmy, że jeśli f spełnia ostrą wersję założenia (5.8), to dla każdego $r = k/2^n$, gdzie $0 < k < 2^n$, takie nierówności powinny być ostre. Dobierając $r = k/2^n \in (0, t)$, uzyskujemy sprzeczność, która kończy cały dowód. \square

Podkreślmy: ścisły zapis całego dowodu jest dość długi, jednak wiążąca się z powyższym twierdzeniem intuicja jest bardzo prosta. W końcu dowodu sprawdzaliśmy w istocie następujący fakt geometryczny: jeśli odcinek I ma oba końce na wykresie funkcji wypukłej f , a ponadto trzeci, różny od końców, punkt I też należy do wykresu f , to cały odcinek I jest zawarty w wykresie f .

Spójrzmy na zastosowania tego twierdzenia.

Przykład 5.70. a) Funkcja $f(x) = \exp x$ jest ściśle wypukła na \mathbb{R} . Istotnie, ostra nierówność

$$L = \exp((x+y)/2) < \frac{\exp x + \exp y}{2} = P$$

zachodzi dla $x \neq y$. Aby się o tym przekonać, kładziemy $t = \exp(x/2)$ i $s = \exp(y/2)$. Wtedy $t \neq s$, gdy $x \neq y$, i nietrudno zauważyć, że $L = ts$, a $P = (t^2 + s^2)/2$, zatem nierówność $L < P$ jest równoważna innej, $(t-s)^2/2 > 0$ dla $t \neq s$. \square

b) Funkcja $g(x) = \ln x$ jest ściśle wklęsła na $(0, \infty)$. Istotnie, dla $x \neq y > 0$ mamy $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$, a stąd, dzięki monotoniczności logarytmu naturalnego,

$$\ln \frac{x+y}{2} > \ln \sqrt{xy} = \frac{1}{2} \ln xy = \frac{\ln x + \ln y}{2}.$$

Dzięki wiedzy o wypukłości rozmaitych funkcji można wykazać szereg konkretnych nierówności. Podamy tu dwie z nich.

Lemat 5.71 (Nierówność Younga). *Jeśli $p, q > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to dla wszystkich $x, y \geq 0$ jest*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Dowód. Jeśli $xy = 0$, to nierówność jest oczywista. Niech więc $x, y > 0$. Skorzystamy z wklęsłości logarytmu naturalnego. Oznaczmy $t = 1/p \in (0, 1)$; wtedy $1-t = 1/q$. Połóżmy $x^p = z$, $y^q = w$. Przy tych oznaczeniach, mamy

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) &= \ln(tz + (1-t)w) \\ &\geq t \ln(z) + (1-t) \ln w \\ &= pt \ln x + (1-t)q \ln y = \ln x + \ln y = \ln(xy). \end{aligned}$$

Logarytm naturalny jest funkcją rosnącą, więc wynika stąd teza lematu. \square

Twierdzenie 5.72 (nierówność Höldera). *Jeśli $p, q > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to dla dowolnych liczb nieujemnych x_1, \dots, x_n oraz y_1, \dots, y_n jest*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}. \quad (5.11)$$

Uwaga: dla $p = q = 2$ nierówność Höldera nazywa się nierównością Schwarz'a i wyraża następujący fakt geometryczny: iloczyn skalarny wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$ nie przekracza iloczynu długości tych wektorów.

Dowód. Niech

$$S_x := \sum_{i=1}^n x_i^p, \quad S_y := \sum_{i=1}^n y_i^q.$$

Krok 1. Załóżmy na początek, że $S_x = S_y = 1$. Z nierówności Younga, $x_i y_i \leq \frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q$. Sumując takie nierówności dla $i = 1, 2, \dots, n$, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{p} S_x + \frac{1}{q} S_y = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = (S_x)^{1/p} (S_y)^{1/q},$$

czyli nierówność Höldera w przypadku $S_x = S_y = 1$.

Krok 2. Jeśli $S_x = 0$ lub $S_y = 0$, to wszystkie x_i lub wszystkie y_i znikają, zaś nierówność Höldera przybiera banalną postać $0 \leq 0$.

Krok 3 (przypadek ogólny). Niech $S_x > 0$, $S_y > 0$. Połóżmy

$$a_i = \frac{x_i}{(S_x)^{1/p}}, \quad b_i = \frac{y_i}{(S_y)^{1/q}}.$$

Wtedy

$$S_a := \sum_{i=1}^n a_i^p = 1, \quad S_b := \sum_{i=1}^n b_i^q = 1.$$

Stosując nierówność uzyskaną w pierwszym kroku dowodu do liczb a_i, b_i , otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1,$$

a po pomnożeniu obu stron przez iloczyn $(S_x)^{1/p} \cdot (S_y)^{1/q}$ — tezę twierdzenia. \square

Stwierdzenie 5.73 (nierówność Jensena). Załóżmy, że P jest zbiorem wypukłym i $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in P$, a $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ i $\sum t_i = 1$, to wówczas

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

Dowód. Indukcja względem n . Dla $n = 2$ nierówność podana w tezie wynika wprost z definicji wypukłości. Załóżmy, że nierówność Jensena zachodzi dla liczby n i dowolnych punktów $x_1, \dots, x_n \in P$ oraz wag t_1, t_2, \dots, t_n o sumie równej 1. Niech $y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \in P$ i niech $s_i \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n+1$, $s_1 + s_2 + \dots + s_{n+1} = 1$. Bez zmniejszenia ogólności załóżmy, że $s_{n+1} > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} & f(s_1 y_1 + \dots + s_n y_n + s_{n+1} y_{n+1}) \\ &= f\left(s_1 y_1 + \dots + s_{n-1} y_{n-1} + (s_n + s_{n+1}) \left(\frac{s_n}{s_n + s_{n+1}} y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}} y_{n+1}\right)\right) \\ &\leq s_1 f(y_1) + \dots + s_{n-1} f(y_{n-1}) + (s_n + s_{n+1}) f\left(\frac{s_n}{s_n + s_{n+1}} y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}} y_{n+1}\right), \end{aligned}$$

na mocy założenia indukcyjnego zastosowanego do $t_i = s_i$, $x_i = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) oraz $t_n = s_n + s_{n+1}$ i $x_n = \frac{s_n}{s_n + s_{n+1}}y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}}y_{n+1}$ (proszę sprawdzić, że $\sum t_i = 1$). Szacując teraz ostatni składnik wprost z definicji wypukłości,

$$f\left(\frac{s_n}{s_n + s_{n+1}}y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}}y_{n+1}\right) \leq \frac{s_n}{s_n + s_{n+1}}f(y_n) + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}}f(y_{n+1}),$$

kończymy dowód. \square

Uwaga terminologiczna. Liczby nieujemne t_i o sumie równej 1 będziemy nazywać *wagami*. Sumę

$$\sum_{i=1}^n t_i x_i$$

nazywamy średnią ważoną (albo inaczej: kombinacją wypukłą) x_i , z wagami t_i .

Przykład 5.74. Wypisując nierówność Jensena dla funkcji wypukłej $f(x) = -\ln x$ z równymi wagami $t_i = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) dla dodatnich x_i , otrzymujemy nierówność między średnimi arytmetyczną i geometryczną:

$$-\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-\ln x_i) = -\ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Funkcja $(-\ln)$ jest malejąca, a zatem

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Podamy teraz charakteryzację funkcji wypukłych w języku tzw. ilorazów różnicowych. Posłużymy się nią w Rozdziale 6, podając różne dostateczne warunki wypukłości.

Twierdzenie 5.75. Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem i niech $f: P \rightarrow \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:

(i) f jest wypukła;

(ii) dla wszystkich $x < y < z$ należących do P zachodzą nierówności

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x};$$

(iii) dla wszystkich $x < y < z$ należących do P zachodzą nierówności

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y};$$

(iv) dla wszystkich $x < y < z$ należących do P zachodzą nierówności

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Jeśli f jest ściśle wypukła, to w każdym z punktów twierdzenia nierówności są ostre, i na odwrót.

Czytelnik zechce wykonać rysunek i zinterpretować twierdzenie w języku geometrii.

Szkic dowodu. Wykażemy równoważność dwóch pierwszych warunków; dowody (i) \Leftrightarrow (iii) oraz (i) \Leftrightarrow (iv) są identyczne i nie będziemy ich wypisywać.

Ustalmy $x, z \in P$. Wtedy każdy punkt $y \in (x, z)$ można zapisać jako

$$y = \frac{z-y}{z-x} \cdot x + \frac{y-x}{z-x} \cdot z = tx + (1-t)z, \quad \text{gdzie } t := \frac{z-y}{z-x} \in (0, 1).$$

(Na odwrót, dla każdej liczby $t \in (0, 1)$ prawa strona powyższego wzoru wyznacza pewien punkt $y \in (x, z)$.) Dodając do obu stron nierówności (ii) $f(x)/(y-x)$ i mnożąc obie strony przez $y-x$, otrzymujemy równoważną nierówność

$$f(tx + (1-t)z) = f(y) \leq \left(1 - \frac{y-x}{z-x}\right) \cdot f(x) + \frac{y-x}{z-x} \cdot f(z) = tf(x) + (1-t)f(z).$$

Zatem, warunek (ii) jest równoważny wypukłości f . \square

Twierdzenie 5.76. Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym. Wtedy każda funkcja wypukła $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła.

Szkic dowodu. Wykażemy, że

$$\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) = f(x) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y). \quad (5.12)$$

Udowodnimy tylko pierwszą z tych równości. Dowód drugiej jest w pełni analogiczny.

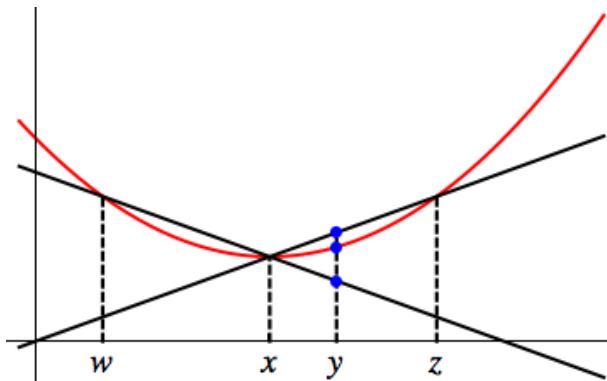
Ustalmy $x \in P$ oraz dwa inne⁵ punkty $z, w \in P$ takie, że $w < x < z$. Niech $y \in (x, z)$. Wtedy

$$y = tx + (1-t)z, \quad x = sw + (1-s)y,$$

gdzie $t = t(y) = (z-y)/(z-x)$ i $s = s(y) = (y-x)/(w-x)$. Wyznaczając z nierówności

$$f(x) \leq sf(w) + (1-s)f(y)$$

wartość $f(y)$, otrzymujemy (patrz też rysunek) z wypukłości f dwie nierówności,



Ciągłość funkcji wypukłej. Nierówność (5.13) wyraża fakt, że fragment wykresu f na przedziale $[x, z]$ zawiera się między dwiema siecznymi. Dlatego granica prawostronna f w punkcie x istnieje. Tak samo dowodzimy istnienia granicy lewostronnej.

$$\frac{f(x) - s(y)f(w)}{1-s(y)} \leq f(y) \quad (5.13)$$

$$\leq t(y) \cdot f(x) + (1-t(y))f(z).$$

Przechodząc do granicy $y \rightarrow x^+$ i stosując twierdzenie o trzech funkcjach, otrzymujemy tezę, tzn. lewą z równości (5.12), gdyż $t(y) \rightarrow 1$ i $s(y) \rightarrow 0$ dla $y \rightarrow x$. \square

Uwaga 5.77. Założenie otwartości przedziału P jest istotne. Nietrudno sprawdzić, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1) \\ 2011, & x = 1 \end{cases}$$

jest wypukła i nieciągła w punkcie $x = 1$.

⁵Uwaga: z otwartości przedziału P korzystamy właśnie tu!

Rozdział 6

Rachunek różniczkowy

Bardzo ważnym działem Analizy Matematycznej jest rachunek różniczkowy. Poznając go, opanujemy narzędzia, umożliwiające systematyczne badanie zachowania odpowiednio regularnych funkcji jednej zmiennej. Nauczymy się, jak określać tempo wzrostu funkcji i jak znajdować przedziały, na których funkcja rośnie (lub maleje), jest wypukła (lub wklęsła). Poznamy także dodatkowe wygodne narzędzia, służące do przybliżania funkcji za pomocą wielomianów i obliczania granic.

6.1 Pojęcie pochodnej

Pojęcie pochodnej, obok pojęcia granicy, jest jednym z najważniejszych pojęć całej analizy.

Definicja 6.1. Niech $A \subset \mathbb{R}$ i niech $a \in A$ będzie punktem skupienia zbioru A . Powiemy, że funkcja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest *różniczkowalna w punkcie a* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \quad (6.1)$$

Liczbę $f'(a)$ nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie a . Stosunek $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ nazywamy *ilorazem różnicowym* funkcji f .

W różnych źródłach można także spotkać oznaczenia

$$f'(a) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}, \quad f'(a) = \frac{df}{dx}(a),$$

którymi będziemy się posługiwać rzadko.

Uwaga 6.2. Wzoru (6.1) można użyć, by zdefiniować (w taki sam sposób):

- Pochodną funkcji zespolonej $f: \mathbb{C} \supset A \rightarrow \mathbb{C}$ w punkcie skupienia $a \in A$ zbioru A ; $f'(a)$ (o ile istnieje) jest wtedy liczbą zespoloną.
- Pochodną funkcji wektorowej $f: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{K}^N$ w punkcie skupienia $a \in A$ zbioru A , gdzie \mathbb{K} jest ciałem \mathbb{R} liczb rzeczywistych lub ciałem \mathbb{C} liczb zespolonych; $f'(a)$ (o ile istnieje) jest wtedy pewnym wektorem z przestrzeni \mathbb{K}^N .

W obu powyższych przypadkach ma sens dzielenie przez $x - a$, czyli mnożenie przez $(x - a)^{-1}$. Czytelnik powinien jednak rozumieć, że takie postępowanie straciłoby sens, gdybyśmy rozpatrywali funkcje wielu zmiennych rzeczywistych (lub zespolonych). Wtedy pojęcie pochodnej trzeba definiować inaczej. Wrócimy do tej sprawy na początku drugiego roku studiów.

6.1.1 Związek różniczkowalności z ciągłością

Różniczkowalność, zarówno w dziedzinie rzeczywistej, jak i zespolonej, jest warunkiem silniejszym od ciągłości.

Stwierdzenie 6.3. *Jeśli funkcja $f: \mathbb{K} \supset A \rightarrow \mathbb{K}$ (gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) jest różniczkowalna w punkcie $a \in A$, to jest ciągła w punkcie a .*

Dowód. Piszemy

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

i przechodzimy do granicy przy $x \rightarrow a$, korzystając z twierdzenia o granicy iloczynu. Ponieważ f jest różniczkowalna w a , otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = f'(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Zatem f jest ciągła w punkcie a . \square

Nie wszystkie funkcje ciągłe są jednak różniczkowalne.

Przykład 6.4. Funkcja $f(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$ nie jest różniczkowalna w punkcie $a = 0$. Istotnie, granica we wzorze (6.1) nie istnieje dla $a = 0$, gdyż różne są wtedy granice jednostronne ilorazów różnicowych:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Zadanie 6.5. Niech $f(z) = \bar{z}$ dla $z \in \mathbb{C}$. Wykazać, że jeśli pochodną zespoloną definiujemy tak, jak w Uwadze 6.2 (a), to f nie ma pochodnej zespolonej w żadnym punkcie $a \in \mathbb{C}$.

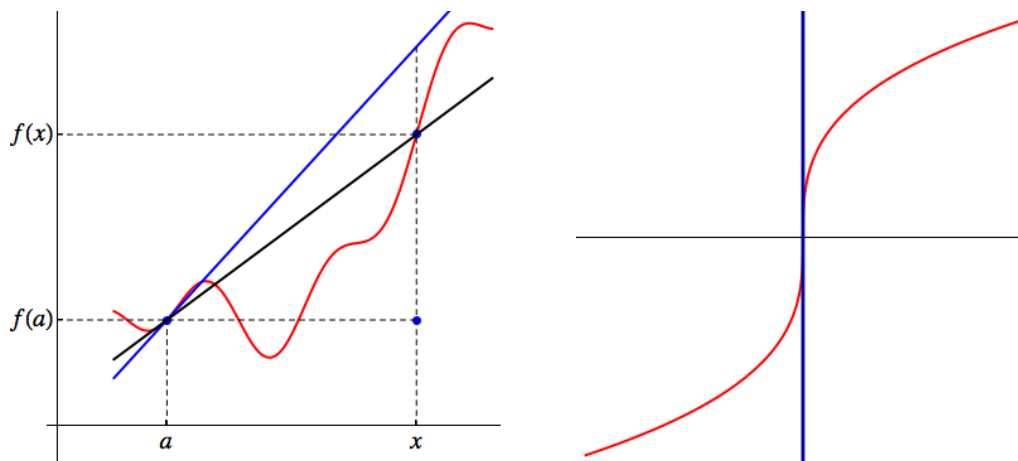
Wskazówka. Zbadać ilorazy różnicowe f dla ciągu przyrostów $h_n = i^n/n$, gdzie $i^2 = -1$.

Istnieją także funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które nie mają pochodnej w żadnym punkcie. Konstrukcja przykładów takich funkcji jest jednak trudniejsza i wymaga albo bardziej zaawansowanej wiedzy matematycznej (np. z zakresu topologii), albo subtelnej analizy funkcji, określonych za pomocą szeregow. Tą sprawą zajmiemy się przy okazji omawiania tzw. zbieżności jednostajnej w następnym rozdziale.

6.1.2 Interpretacja pochodnej funkcji zmiennej rzeczywistej

Interpretacja geometryczna pochodnej. Niech $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w punkcie $a \in I$ i niech I będzie przedziałem. Rozważmy wykres f , tzn. zbiór punktów

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = f(x)\}.$$



Po lewej: styczna do wykresu funkcji. Po prawej: przypadek, gdy granica ilorazów różnicowych jest nieskończona. Nie mówimy wtedy, że funkcja jest różniczkowalna, ale styczna do wykresu istnieje i jest prostą pionową.

Iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ jest tangensem kąta nachylenia siecznej, przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ i $(x, f(x))$, do osi x -ów. Intuicja podpowiada, że gdy funkcja f jest odpowiednio “porządna”, to dla x bliskich a taka sieczna powinna być przybliżeniem stycznej do wykresu funkcji. Istnienie pochodnej w punkcie a , a więc granicy ilorazów różnicowych, oznacza *istnienie stycznej do wykresu f w punkcie $(a, f(a))$* . Liczba $f'(a)$ jest współczynnikiem kierunkowym tej stycznej. Styczna to prosta, opisana równaniem

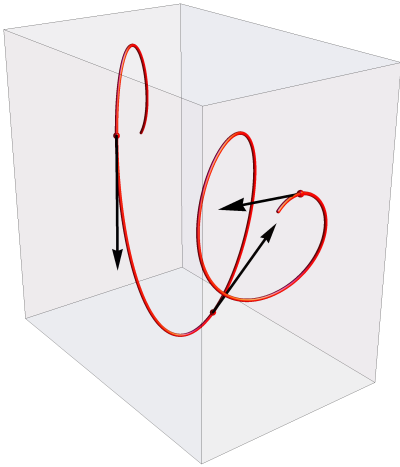
$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Uwaga 6.6 (pochodne nieskończone). Definiując pochodną, wpisaliśmy w definicję warunek skończoności granicy ilorazów różnicowych. Może się zdarzyć, że ilorazy różnicowe mają w jakimś punkcie granicę nieskończoną. Jest tak np. dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, w punkcie $x = 0$, gdyż

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

Zgodnie z naszą definicją, funkcja f nie jest różniczkowalna w zerze, bo nie ma tam *skończonej* granicy ilorazów różnicowych. Mówi się czasem w takich przypadkach, że f ma pochodną nieskończoną (dla odróżnienia tej sytuacji od takiej, gdy granica ilorazów różnicowych w ogóle nie istnieje). Geometryczna interpretacja tego, że granica ilorazów różnicowych jest w jakimś punkcie dziedziny funkcji nieskończona, jest nietrudna: styczna do wykresu f istnieje i *jest pionowa*.

Interpretacja kinematyczna pochodnej. Załóżmy, że pewien punkt porusza się w sposób ciągły, tzn. dla każdej chwili czasu $t \geq 0$ określona jest droga $s(t) \in [0, \infty)$, przebyta od chwili początkowej $t_0 = 0$ do chwili t , i $s(t)$ jest ciągłą funkcją t . Różniczkowalność funkcji s w punkcie t_1 , tzn. istnienie granicy ilorazów różnicowych $(s(t_2) - s(t_1))/(t_2 - t_1)$ dla $t_2 \rightarrow t_1$, oznacza, że w tym ruchu można określić *prędkość chwilową*, tzn. granicę stosunku przebytej drogi do czasu, w jakim została przebyta, gdy ów czas dąży do zera.



Mówiąc nieco dokładniej, gdy funkcja

$$s: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

jest torem ruchu punktu materialnego w przestrzeni (patrz rysunek obok), to wektor

$$s'(t) = (s'_1(t), s'_2(t), s'_3(t)) \in \mathbb{R}^3$$

jest *wektorem prędkości chwilowej w chwili t* . Zwrot tego wektora jest wyznaczony przez chwilowy kierunek ruchu, a długość jest równa *szybkości chwilowej*. Z taką interpretacją można spotkać się zarówno w mechanice, jak i w geometrii.

6.1.3 Arytmetyczne własności pochodnej

Stwierdzenie 6.7 (pochodna sumy). *Jeśli $f, g: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie skupienia $a \in A$ zbioru A , to istnieje pochodna $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

Dowód. Obliczymy pochodną sumy wprost z definicji. Piszemy

$$\frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

i przechodzimy do granicy przy $x \rightarrow a$. Prawa strona ma granicę $f'(a) + g'(a)$, więc pochodna $(f + g)'(a)$ istnieje i jest równa właśnie $f'(a) + g'(a)$. \square

Stwierdzenie 6.8 (pochodna iloczynu). *Jeśli $f, g: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie skupienia $a \in A$ zbioru A , to istnieje pochodna*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Dowód. Obliczymy pochodną sumy wprost z definicji. Postępujemy podobnie, jak w rozdziale 2, w dowodzie twierdzenia o granicy iloczynu ciągłów. Piszemy

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} &= \frac{(f(x)g(x) - f(a)g(x)) + (f(a)g(x) - f(a)g(a))}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \end{aligned}$$

i przechodzimy do granicy przy $x \rightarrow a$. Ze Stwierdzenia 6.3 wynika ciągłość g w a . Zatem, z twierdzenia o granicy sumy i iloczynu, prawa strona ostatniej równości ma granicę równą

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Dowód został zakończony. \square

Stwierdzenie 6.9. *Jeśli $g: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie skupienia $a \in A$ zbioru A oraz $g(x) \neq 0$ dla $x \in A$, to istnieje pochodna*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Dowód. Ponownie, spójrzmy na iloraz różnicowy

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \frac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x) \cdot (x - a)}.$$

Jak w poprzednim dowodzie, możemy skorzystać ze Stwierdzenia 6.3 i stwierdzić, że ponieważ g jest ciągła w punkcie a , to na mocy twierdzenia o iloczynie granic, prawa strona ostatniej równości ma dla $x \rightarrow a$ granicę równą

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x) \cdot (x - a)} = \frac{1}{g(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{x - a} = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}.$$

Zatem, funkcja $(1/g)$ jest różniczkowalna w a i zachodzi równość podana w tezie tego stwierdzenia. \square

Wniosek 6.10 (pochodna ilorazu). *Jeśli $f, g: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie skupienia $a \in A$ zbioru A i $g(x) \neq 0$ dla $x \in A$, to istnieje pochodna*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Dowód. Korzystamy z równości $f/g = f \cdot (1/g)$ i poprzednich stwierdzeń. Czytelnik zechce sam sprawdzić rachunki. \square

Uwaga 6.11. Wzory na pochodną sumy, iloczynu i ilorazu można stosować, gdy f, g są funkcjami różniczkowalnymi zmiennej zespolonej o wartościach zespolonych, gdyż w dowodach nie korzystamy nigdzie w sposób istotny z tego, że wartości i argumenty funkcji są rzeczywiste, a nie zespolone. Ponadto, wzór na pochodną sumy zachodzi dla funkcji wektorowych $f, g: R \supset A \rightarrow \mathbb{R}^N$, a wzór na pochodną iloczynu – dla funkcji wektorowej $f: R \supset A \rightarrow \mathbb{R}^N$ i funkcji $g: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$, której wartości są skalarami, tzn. liczbami rzeczywistymi (trzeba tylko odpowiednio rozumieć prawą i lewą stronę – mamy wtedy do czynienia z mnożeniem wektorów przez liczby).

6.1.4 Pochodna złożenia i funkcji odwrotnej

Aby wyprowadzić znany wzór na pochodną złożenia dwóch funkcji różniczkowalnych, podamy najpierw ważną charakteryzację pochodnej. Można się nią posługiwać zarówno dla funkcji zmiennej rzeczywistej, jak i zmiennej zespolonej, więc wszystkie fakty tego podrozdziału sformułujemy ogólnie (każdy z nich ma dwie wersje: jedną dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, drugą dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Lemat 6.12. Niech $A \subset \mathbb{K}$ i niech $a \in A$ będzie punktem skupienia zbioru A . Funkcja $f: A \rightarrow \mathbb{K}$ jest różniczkowalna w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k \in \mathbb{K}$ oraz funkcja $r_a: A \rightarrow \mathbb{K}$ taka, że

$$f(x) = f(a) + k \cdot (x - a) + r_a(x) \cdot (x - a) \quad \text{dla } x \in A, \quad \lim_{x \rightarrow a} r_a(x) = 0.$$

Mamy wtedy $k = f'(a)$.

Sens tego lematu jest następujący: różniczkowalność funkcji f w punkcie a oznacza tyle, że funkcję f można przybliżać funkcją liniową $l(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, a błąd $b(x) = r_a(x)(x - a)$ tego przybliżenia spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{b(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} r_a(x) = 0.$$

Innymi słowy, dla x bliskich a błąd $b(x)$ jest *mniejszego rzędu*, niż różnica $x - a$. Istnienie pochodnej $f'(a)$ jest równoważne istnieniu *najlepszego przybliżenia liniowego funkcji* w pobliżu punktu a .

Dowód. Jeśli $f'(a)$ istnieje, to funkcja

$$r_a(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$$

spełnia oba warunki podane w tezie lematu, gdy weźmiemy $k = f'(a)$. Na odwrót, jeśli odpowiednia funkcja r_a istnieje, to istnieje także

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (k + r_a(x)) = k.$$

To spostrzeżenie kończy dowód lematu. \square

Uwaga. Lemat 6.12 wygląda na fakt niepozorny i dość oczywisty, jednak zdecydowanie warto go zapamiętać: ukryty jest w nim pomysł, dzięki któremu można zdefiniować pochodną funkcji wielu zmiennych.

Stwierdzenie 6.13. Niech $g: \mathbb{K} \supset A \rightarrow \mathbb{K}$ i $f: \mathbb{K} \supset B \rightarrow \mathbb{K}$, gdzie $B \supset g(A)$. Załóżmy, że $a \in K$ jest punktem skupienia zbioru A i $b = g(a)$ jest punktem skupienia zbioru K . Jeśli g jest różniczkowalna w punkcie a i f jest różniczkowalna w $b = g(a)$, to wtedy złożenie $f \circ g$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie a i ma pochodną

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Dowód. Niech $y = g(x)$, $b = g(a)$. Z poprzedniego lematu wynika, że

$$f(y) = f(b) + f'(b) \cdot (y - b) + r_b(y) \cdot (y - b)$$

dla pewnej funkcji $r_b: B \rightarrow \mathbb{K}$, która ma granicę równą zero, gdy $y \rightarrow b$. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} &= \frac{f(y) - f(b)}{x - a} \\ &= \frac{f'(b) \cdot (y - b) + r_b(y) \cdot (y - b)}{x - a} \\ &= f'(b) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + r_b(y) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Na mocy Stwierdzenia 6.3 funkcja g jest ciągła w a , tzn. $y = g(x) \rightarrow g(a) = b$, gdy $x \rightarrow a$. Dlatego $\lim_{x \rightarrow a} r_b(g(x)) = 0$. Zatem, przechodząc w równości (6.2) do granicy przy $x \rightarrow a$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} &= f'(b) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} r_b(g(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a), \end{aligned}$$

co dowodzi różniczkowalności $f \circ g$ w punkcie a i równości, podanej w tezie. \square

Uwaga. Czytelnik zechce się zastanowić, dlaczego właściwie posłużyliśmy się w tym dowodzie poprzednim lematem, zamiast operować tylko ilorazami różnicowymi funkcji f i funkcji g , jak w dowodach wzorów na pochodną sumy czy iloczynu funkcji różniczkowalnych.

Stwierdzenie 6.14. Niech $f: \mathbb{K} \supset A \rightarrow B = f(A) \subset \mathbb{K}$ będzie funkcją różnowartościową, różniczkowalną w punkcie $a \in A$ skupienia zbioru A . Jeśli $f'(a) \neq 0$ i funkcja $g = f^{-1}$ odwrotna do f jest ciągła w punkcie $b = f(a)$, to g jest różniczkowalna w $b \in B$ i zachodzi wzór

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Dowód. Niech $(y_n) \subset B \setminus \{b\}$, $b = f(a)$. Ponieważ f jest bijekcją z A na B , więc znajdziemy punkty $x_n \in A$, $x_n \neq a$, takie, że $y_n = f(x_n)$, tzn. $x_n = g(y_n)$. Z ciągłości g w b wynika, że $x_n \rightarrow g(b) = f^{-1}(b) = a$. Zatem

$$\frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \frac{1}{\frac{y_n - b}{g(y_n) - g(b)}} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}$$

(wszystkie ułamki mają sens, gdyż funkcje f i $g = f^{-1}$ są różnowartościowe). Biorąc $n \rightarrow \infty$ i posługując się definicją Heinego granicy funkcji, otrzymujemy równość

$$g'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

To kończy dowód. \square

Uwaga 6.15. Założenia ostatniego twierdzenia mają skomplikowaną postać, gdyż z ciągłości i różniczkowalności f w jednym punkcie nie wynika ciągłość funkcji odwrotnej do f . (Czytelnik może się zastanowić nad odpowiednim przykładem – to nie jest szczególnie łatwe, gdyż przykład nie jest naturalny). Gdyby mówić tylko o funkcjach f różniczkowalnych w każdym punkcie przedziału A , to założenie ciągłości g można byłoby oczywiście pominąć, patrz Twierdzenie 5.43 o ciągłości funkcji odwrotnej.

Czytelnik może się zastanowić nad (nietrudną) interpretacją geometryczną ostatniego stwierdzenia dla funkcji zmiennej rzeczywistej.

6.2 Pochodne funkcji elementarnych

Poświęcimy teraz nieco miejsca, aby wyprowadzić konkretne wzory na pochodne funkcji elementarnych.

Stwierdzenie 6.16. *Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub \mathbb{C} i $f: \mathbb{K} \supset A \rightarrow \mathbb{K}$ jest funkcją stałą, to $f'(a) = 0$ w każdym punkcie skupienia zbioru A .*

Dowód. Wszystkie ilorazy różnicowe funkcji stałej są równe zero. \square

Stwierdzenie 6.17. *Jeśli $f(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $f'(a) = 1$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Wszystkie ilorazy różnicowe funkcji $f(x) = x$ są równe 1. \square

Stwierdzenie 6.18. *Jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $f(x) = x^n$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $f'(x) = nx^{n-1}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Można postąpić na dwa sposoby: udowodnić ten fakt przez indukcję, korzystając z poprzedniego stwierdzenia i wzoru na pochodną iloczynu, albo obliczyć pochodną funkcji f wprost z definicji, stosując wzór (1.3) na różnicę n -tych potęg w celu uproszczenia ilorazów różnicowych. Czytelnik zechce samodzielnie uzupełnić szczegóły jednego z tych dowodów. \square

Wniosek 6.19. *Jeśli $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ jest wielomianem, to*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

(wzór zachodzi zarówno dla wielomianów zmiennej rzeczywistej, jak i dla wielomianów zmiennej zespolonej.)

Dowód. Dla każdego k jest $(a_kx^k)' = ka_kx^{k-1}$, zatem teza wynika z twierdzenia o pochodnej sumy funkcji. \square

Uwaga 6.20. Stwierdzenie 6.17 zachodzi nie tylko w dziedzinie rzeczywistej, ale także dla funkcji identycznościowej na \mathbb{C} : jej pochodna istnieje w każdym punkcie płaszczyzny i jest równa 1. Dlatego Wniosek 6.19 zachodzi zarówno w dziedzinie rzeczywistej, jak i w dziedzinie zespolonej.

Stwierdzenie 6.21. *Dla każdej liczby $w \in \mathbb{C}$ zachodzi wzór*

$$\frac{d}{dz}(\exp z)_{z=w} = \exp w$$

Dowód. To wynika wprost ze wzoru (4.14), który udowodniliśmy, opisując w Twierdzeniu 4.54 własności funkcji wykładniczej. \square

Stwierdzenie 6.22. *Dla każdej liczby $w \in \mathbb{C}$ zachodzą wzory*

$$\frac{d}{dz}(\sin z)_{z=w} = \cos w, \quad \frac{d}{dz}(\cos z)_{z=w} = -\sin w,$$

Dowód. Skorzystamy ze wzorów Eulera i wzoru na pochodną funkcji wykładniczej, oraz wzoru na pochodną złożenia. Mamy

$$\frac{d}{dz}(\exp(\pm iz))_{z=w} = \pm i \cdot \exp(\pm iw)$$

na mocy Stwierdzenia 6.13. Zatem, dzięki wzorowi na pochodną sumy i iloczynu,

$$\frac{d}{dz}(\sin z)_{z=w} = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)_{z=w} = \frac{ie^{iw} - (-i)e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \cos w.$$

Tak samo dowodzimy wzoru na pochodną cosinusa:

$$\frac{d}{dz}(\cos z)_{z=w} = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)_{z=w} = \frac{ie^{iw} + (-i)e^{-iw}}{2} = -\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = -\sin w$$

(pisząc przedostatnią równość, skorzystaliśmy z tego, że $i = -1/i$). \square

Uwaga. Znając pochodną sinusa, wzór na pochodną cosinusa można wyprowadzić ze wzorów redukcyjnych. Można także obliczyć obie pochodne wprost, korzystając z definicji, ze wzorów na różnicę sinusów i różnicę cosinusów (patrz Stwierdzenie 4.63), istnienia granicy

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

oraz ciągłości sinusa i cosinusa.

Stwierdzenie 6.23. Funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$ ma pochodną w każdym punkcie $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Zachodzi wzór

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dowód. Korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu oraz znanych już wzorów na pochodne sinusa i cosinusa, otrzymujemy we wszystkich punktach dziedziny tangensa równość

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Oczywiście, $1/\cos^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ na mocy 'jedynki trygonometrycznej'. \square

Zadanie 6.24. Udowodnić, że funkcja cotangens jest różniczkowalna we wszystkich punktach swojej dziedziny i ma pochodną równą $-1 - \operatorname{ctg}^2 x$.

Stwierdzenie 6.25. Funkcja $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $y \in (0, \infty)$ i zachodzi wzór

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{y}, \quad y > 0.$$

Dowód. Granicę ilorazów różnicowych logarytmu naturalnego obliczyliśmy już wcześniej, opisując w Twierdzeniu 3.6 własności logarytmu naturalnego. \square

Uwaga. Można także posłużyć się wzorem na pochodną funkcji odwrotnej: jeśli $y \in (0, \infty)$ jest ustalonym punktem i $\ln y = x$, tzn. $e^x = y$, to wobec Stwierdzenia 6.14 zachodzą równości

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Stwierdzenie 6.26. Niech $a > 0$ i $a^z := \exp(z \ln a)$. Wtedy

$$\frac{d}{dz}(a^z)_{z=w} = \ln a \cdot a^w, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Dowód. Mamy $a^z = \exp(z \cdot \ln a)$. Wystarczy posłużyć się wzorem na pochodną funkcji wykładniczej i pochodną złożenia. \square

Zadanie 6.27. Posługując się definicją logarytmu o dowolnej podstawie i wzorem na zmianę podstawy logarytmu, udowodnić, że

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0$$

dla każdej podstawy $a > 0$, $a \neq 1$.

Stwierdzenie 6.28. Funkcja potęgowa $g(x) = x^\omega$, gdzie $x > 0$, a $\omega \in \mathbb{R}$ jest ustaloną liczbą, ma w każdym punkcie $x \in (0, \infty)$ pochodną

$$g'(x) = \omega x^{\omega-1}.$$

Dowód. Piszemy $x^\omega = \exp(\omega \ln x)$ i stosując wzór na pochodną złożenia, otrzymujemy

$$(x^\omega)' = (\exp(\omega \ln x))' = \exp(\omega \ln x) \cdot \omega \cdot (\ln x)' = x^\omega \cdot \omega \cdot \frac{1}{x} = \omega x^{\omega-1}.$$

\square

Wniosek 6.29. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x > 0.$$

Dowód. Stosujemy poprzednie stwierdzenie dla $\omega = 1/n$. \square

Uwaga 6.30. Czytelnik sprawdzi samodzielnie, że gdy n jest liczbą nieparzystą (i można definiować pierwiastek stopnia n z dowolnej liczby rzeczywistej), to wzór podany w ostatnim wniosku zachodzi w istocie dla wszystkich $x \neq 0$. To wynika np. z nieparzystości funkcji $f(x) = \sqrt[n]{x}$ dla nieparzystych stopni pierwiastka n .

Stwierdzenie 6.31. Funkcje $F(y) = \arcsin y$ i $G(y) = \arccos y$ są różniczkowalne w każdym punkcie przedziału $(-1, 1)$; zachodzą wzory

$$F'(y_0) = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}, \quad G'(y_0) = \frac{-1}{\sqrt{1-y_0^2}}, \quad y_0 \in (-1, 1).$$

Dowód. Określając arcus sinus i arcus cosinus, sprawdziliśmy, że sinus jest funkcją rosnącą na $[-\pi/2, \pi/2]$, a cosinus jest funkcją malejącą na $[0, \pi]$.

Aby zastosować twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej do obliczenia pochodnej $F(y) = \arcsin y$ w punkcie $y_0 = \sin x_0$, musimy sprawdzić, że pochodna sinusa nie znika w x_0 . Tak jednak jest, gdyż $\cos x_0 \neq 0$ dla każdego $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Zatem, na mocy

Stwierdzenia 6.14 zastosowanego do $f = \sin$ i $g = f^{-1} = F$ w punktach $a = x_0, b = y_0$, otrzymujemy

$$F'(y_0) = g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin x_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Zauważmy: skorzystaliśmy w powyższym rachunku z tego, że cosinus jest dodatni na przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$.

Podobnie obliczmy pochodną funkcji $G(y) = \arccos y$. Tym razem stosujemy Stwierdzenie 6.14¹ do $f = \cos$ i $g = f^{-1} = G$ w punktach $a = x_0, b = y_0 = \cos x_0$, gdzie $y_0 \in (-1, 1)$ i $x_0 \in (0, \pi)$. Otrzymujemy

$$G'(y_0) = g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{-1}{\sin x_0} = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\cos x_0)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Korzystaliśmy z tego, że $\sin x_0 > 0$ dla $x_0 \in (0, \pi)$. \square

Stwierdzenie 6.32. Funkcja $H(y) = \arctg y$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $y \in \mathbb{R}$; mamy

$$H'(y) = \frac{1}{1 + y^2} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Dowód. Jak poprzednio, stosujemy twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej — tym razem do pary funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in (-\pi/2, \pi/2)$, oraz $g(y) = f^{-1}(y) = H(y), y \in \mathbb{R}$, biorąc punkty y, x powiązane zależnością $y = \operatorname{tg} x$. Wolno to zrobić: pochodna tangensa, tzn. $1 + \operatorname{tg}^2 x$, jest zawsze liczbą większą od 1, a więc różną od zera. Otrzymujemy

$$H'(y) = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} x)^2} = \frac{1}{1 + y^2}$$

dla każdego $y \in \mathbb{R}$. \square

Stosując powyższe wzory i twierdzenia o pochodnej sumy, iloczynu, ilorazu i złożenia funkcji, można obliczać pochodne dowolnych funkcji elementarnych. Zakończmy ten podrozdział przykładem, ilustrującym sposób obliczania pochodnych w jeszcze jednej sytuacji.

Przykład 6.33. Niech $f(x) = x^x$ dla $x > 0$. Wtedy, ze wzorów na pochodną złożenia i pochodną iloczynu,

$$f'(x) = \left(e^{x \ln x} \right)' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = e^{x \ln x} \cdot (1 + \ln x).$$

(Ważne jest to, że nie stosujemy bezpośrednio ani wzoru na pochodną funkcji wykładniczej, ani wzoru na pochodną funkcji potęgowej. Nie wolno tego robić, bo *ani podstawa, ani wykładnik potęgi nie są w tym przykładzie stałymi*).

¹Proszę samodzielnie sprawdzić, że spełnione są założenia tego stwierdzenia!

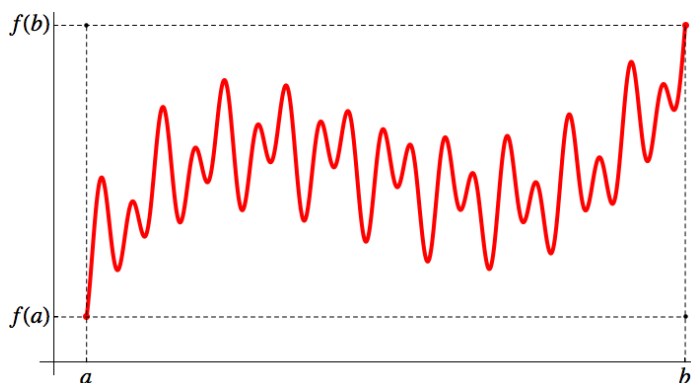
6.3 Najważniejsze własności funkcji różniczkowalnych

W tym podrozdziale zajmiemy się opisem własności funkcji różniczkowalnych i związkiem pochodnej z monotonicznością oraz ekstremami. Będziemy zajmować się funkcjami określonymi na przedziałach prostej rzeczywistej. Termin *funkcja różniczkowalna* będzie oznaczał funkcję, która jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny.

Definicja 6.34 (ekstremum lokalne). Niech $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem w \mathbb{R} . Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $a \in I$ maksimum lokalne (odpowiednio: minimum lokalne), jeśli istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla wszystkich $x \in I$, $|x - a| < \delta$, zachodzi nierówność $f(a) \geq f(x)$ (odpowiednio: $f(a) \leq f(x)$).

Jeśli dla wszystkich $x \in I$, $0 < |x - a| < \delta$, nierówności są ostre, to mówimy wtedy, że f ma w punkcie a maksimum (lub minimum) właściwe.

Słowo *ekstremum* jest wspólną nazwą minimum i maksimum: w zależności od kontekstu i potrzeby może oznaczać jedno lub drugie. Z definicji wynika, że funkcja może mieć ekstremum lokalne także w końcu przedziału. Czytelnik powinien pamiętać, że wartość funkcji w punkcie ekstremum lokalnego nie musi być najmniejszą ani największą wartością funkcji na danym przedziale. Ekstremów może być wiele, a ponadto jeśli przedział jest otwarty, to funkcja w ogóle nie musi przyjmować swoich kresów.



Funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, która ma dużo ekstremów lokalnych wewnątrz (a, b) , jednak w żadnym z nich nie jest osiągnięty kres dolny ani górny zbioru $f((a, b))$.

Lemat 6.35 (lemat Fermata). Jeśli I jest odcinkiem otwartym, $a \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie a i f ma w a ekstremum lokalne, to $f'(a) = 0$.

Geometryczna interpretacja lematu Fermata jest prosta: styczna do wykresu funkcji różniczkowalnej w punkcie ekstremum lokalnego jest pozioma.

Dowód. Dla ustalenia uwagi założmy, że f ma w a maksimum lokalne (w drugim przypadku dowód jest taki sam; można także rozważyć funkcję $-f$, która ma maksima tam, gdzie f ma minima). Wybierzmy $\delta > 0$ tak, aby przedział $J := (a - \delta, a + \delta)$ był zawarty w I i aby $f(x) \leq f(a)$ dla wszystkich $x \in J$.

Dla $0 < |h| < \delta$ mamy wtedy $f(a + h) - f(a) \leq 0$. Dlatego iloraz różnicowy $(f(a + h) - f(a))/h$ jest nieujemny dla $-\delta < h < 0$ i niedodatni dla $0 < h < \delta$. Nierówności nieostre

zachowują się w granicy, a pochodna $f'(a)$ istnieje, więc

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0.$$

Stąd już wynika, że $f'(a) = 0$. \square

Uwaga 6.36. Podkreślmy bardzo ważny fakt: lematu Fermata nie można odwrócić: z faktu, że funkcja różniczkowalna f ma w pewnym punkcie pochodną równą zero, *nie wynika*, że f ma w tym punkcie ekstremum lokalne. Najprostszym przykładem jest $f(x) = x^3$, różniczkowalna na całej prostej \mathbb{R} . Mamy $f'(x) = 3x^2$, a więc $f'(0) = 0$, jednak f jest rosnąca i nie ma ekstremum w zerze. Pochodna funkcji ciągłej, rosnącej, może znikać na zbiorze nieskończonym, a nawet na zbiorze gęstym.²

Twierdzenie 6.37 (Rolle'a). *Założmy, że $a < b$, zaś funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna w każdym punkcie $x \in (a, b)$. Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że $f'(x_0) = 0$.*

Dowód. Jeśli f jest funkcją stałą, to f' znika w każdym punkcie $x \in (a, b)$ i nie ma czego dowodzić. Założmy więc, że f nie jest funkcją stałą. Połóżmy

$$m := \inf_{[a,b]} f, \quad M := \sup_{[a,b]} f.$$

Ponieważ f nie jest stała i $f(a) = f(b)$, to musi być $m < f(a) = f(b)$ lub $M > f(a) = f(b)$. Z twierdzenia Weierstrassa (patrz Tw. 5.36 w rozdziale 5) wiemy, że m i M są wartościami f , zatem przynajmniej jedna z tych wartości jest przyjmowana w punkcie *wewnętrznym* x_0 , należącym do przedziału otwartego (a, b) . Funkcja f ma oczywiście w tym punkcie ekstremum lokalne. Z lematu Fermata wynika, że $f'(x_0) = 0$. \square

Twierdzenie 6.38 (Cauchy'ego). *Niech $a < b$ i niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi na $[a, b]$, różniczkowalnymi w każdym punkcie przedziału (a, b) . Założmy ponadto, że $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$. Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że $g(a) \neq g(b)$, gdyż w przeciwnym przypadku na mocy twierdzenia Rolle'a istniałby punkt, w którym g' znika, a zakładamy, że $g' \neq 0$ na (a, b) . Dlatego prawa strona wzoru z tezy twierdzenia ma sens.

Rozpatrzmy teraz funkcję pomocniczą

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)).$$

Z założeń o f i g wynika, że h jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i różniczkowalną wewnątrz tego przedziału. Ponadto, $h(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) = h(a)$. Zatem, h spełnia

²Samodzielna konstrukcja odpowiednich przykładów może być ciekawym zadaniem dla ambitnych Czytelników.

wszystkie założenia twierdzenia Rolle'a. Istnieje więc punkt $\xi \in (a, b)$ taki, że $h'(\xi) = 0$.
Mamy jednak

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Dlatego równość $h'(\xi) = 0$ jest równoważna tezie twierdzenia. \square

Odnotujmy bardzo ważny wniosek z twierdzenia Cauchy'ego.

Wniosek 6.39 (twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej). Załóżmy, że $a < b$, zaś funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna w każdym punkcie $x \in (a, b)$. Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że

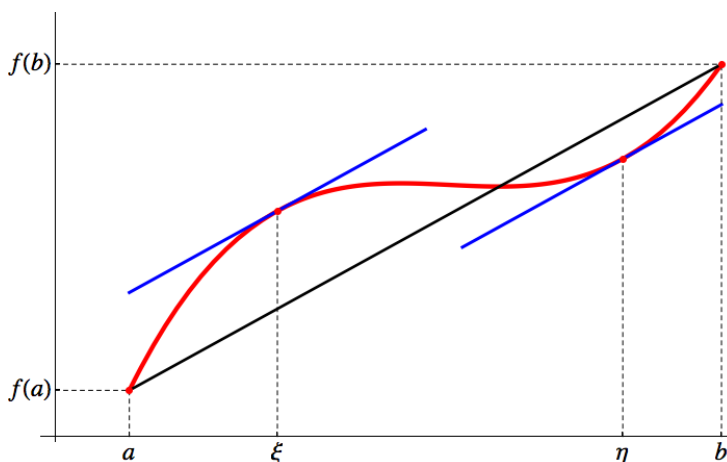
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Stosujemy twierdzenie Cauchy'ego do f i do funkcji $g(x) = x$, $x \in [a, b]$. \square

Zadanie 6.40. Podać przykład, świadczący o tym, że jeśli f jest ciągła na $[a, b]$, ale f' nie istnieje choćby w jednym punkcie, to teza twierdzenia Lagrange'a nie musi zachodzić.

Przykład 6.41. Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej **nie zachodzi** (w powyższej postaci) dla funkcji o wartościach wektorowych, np. zespolonych. Oto banalny przykład: niech $f(t) = \exp(2\pi it)$ dla $t \in [0, 1]$. Wtedy, dla każdego $c \in (0, 1)$, mamy $0 = f(1) - f(0) \neq f'(c) = 2\pi i \cdot \exp(2\pi ic)$.

Twierdzenie Lagrange'a ma bardzo prostą interpretację geometryczną: w przedziale (a, b) istnieje taki punkt, w którym styczna do wykresu f jest równoległa do siecznej, poprowadzonej przez dwa końce łuku wykresu.



Interpretacja geometryczna twierdzenia Lagrange'a: Istnieje co najmniej jeden punkt, w którym styczna do wykresu funkcji jest równoległa do siecznej. (Może się zdarzyć, że takich punktów jest więcej).

Wniosek 6.42. Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}$, $[c, d] \subset A$, $c < d$, a funkcja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[c, d]$ i różniczkowalna w (c, d) . Zachodzą wówczas następujące implikacje:

(i) Jeśli $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in (c, d)$, to f jest niemalejąca na $[c, d]$.

- (ii) Jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (c, d)$, to f jest rosnąca na $[c, d]$.
- (iii) Jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (c, d)$, to f jest malejąca na $[c, d]$.
- (iv) Jeśli $f'(x) \leq 0$ dla każdego $x \in (c, d)$, to f jest nierosnąca na $[c, d]$.

Dowód. Wystarczy zapisać tezę twierdzenia Lagrange'a w postaci

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a) \quad \text{dla pewnego } \xi \in (a, b),$$

a następnie podstawiać za a i b dowolne pary punktów przedziału $[c, d]$. \square

Wniosek 6.43. Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek: $f'(\xi) = 0$ dla każdego $\xi \in (a, b)$, to f jest funkcją stałą.

Dowód. Stosując twierdzenie Lagrange'a dla f na dowolnym przedziale $[a, x] \subset [a, b]$, stwierdzamy, że $f(a) = f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$. \square

Twierdzenie 6.44. Załóżmy, że $c < d$, zaś funkcja $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[c, d]$ i różniczkowalna w każdym punkcie $x \in (c, d)$. Następujące warunki są równoważne:

- (i) Funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze stałą M ;
- (ii) Dla każdego $x \in (c, d)$ zachodzi nierówność $|f'(x)| \leq M$

Dowód. Jeśli f spełnia warunek Lipschitza ze stałą M , to dla dowolnych $y, x \in (c, d)$, $y \neq x$ zachodzi nierówność

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq M.$$

Wykonując przejście graniczne $y \rightarrow x$, otrzymujemy $|f'(x)| \leq M$.

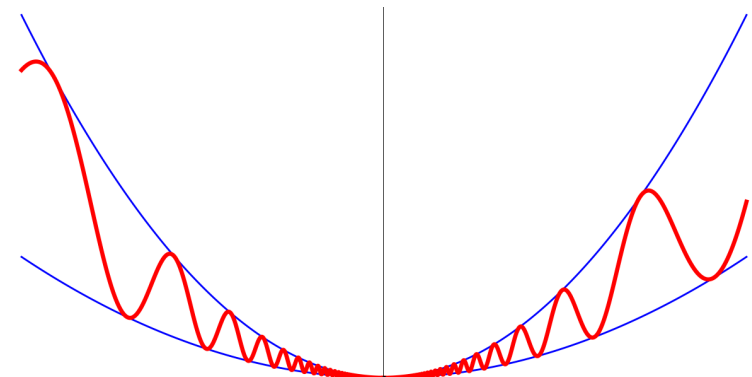
Na odwrót, jeśli f spełnia warunek (ii), to dla dowolnych $a, b \in [c, d]$, $a \neq b$, dobierając do a i b punkt $\xi \in (a, b)$ tak, jak w tezie twierdzenia Lagrange'a, możemy napisać

$$|f(b) - f(a)| = |f'(\xi)| \cdot |b - a| \stackrel{\text{(ii)}}{\leq} M |b - a|.$$

Funkcja f spełnia więc warunek Lipschitza ze stałą M . \square

Uwaga 6.45. Funkcja ciągła na odcinku $[a, b]$ (a więc jednostajnie ciągła na tym odcinku) i różniczkowalna w (a, b) może mieć nieograniczoną pochodną. Przykład: $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in [0, 1]$; wtedy $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ dla $x \in (0, 1]$ i f' nie jest ograniczona w żadnym otoczeniu zera.

Na zakończenie tego podrozdziału spróbujemy udzielić częściowych odpowiedzi na dwa pytania: jakie funkcje mogą być pochodnymi, i czy pochodna funkcji różniczkowalnej musi być funkcją ciągłą. Odpowiedź na drugie pytanie jest prosta: pochodna nie musi być funkcją ciągłą.



Funkcja z Przykładu 6.46 w otoczeniu zera (dla nieco większej czytelności rysunku, oś y została liniowo rozciągnięta). Wykres oscyluje między dwiema parabolami, $y = x^2$ i $y = 3x^2$. Pochodna istnieje w każdym punkcie, jednak nie jest ciągła w zerze i zmienia znak nieskończenie wiele razy w każdym przedziale wokół zera.

Przykład 6.46. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x^2(2 + \sin(1/x)), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dla $x \neq 0$ otrzymujemy, stosując wzory na pochodną iloczynu i pochodną złożenia,

$$f'(x) = 2x \cdot \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2}) = 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}. \quad (6.3)$$

Zatem na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pochodna f istnieje i jest tam funkcją ciągłą.

Ponieważ sinus na \mathbb{R} przyjmuje tylko wartości z przedziału $[-1, 1]$, więc $|f(x)| \leq 3x^2$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Dlatego

$$0 \leq \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \left| \frac{f(h)}{h} \right| \leq 3|h| \rightarrow 0 \quad \text{dla } h \rightarrow 0.$$

Z twierdzenia o trzech funkcjach wynika zatem, że $f'(0) = 0$. Jednak f' nie jest ciągła w zerze. To wynika stąd, że pierwszy składnik po prawej stronie (6.3) dąży do zera dla $x \rightarrow 0$ (moduł tego składnika nie przekracza $6|x|$), jednak drugi składnik, $-\cos 1/x$, nie ma granicy dla $x \rightarrow 0$ (patrz Przykład 5.12). Dlatego granica f' w zerze nie istnieje.

Nietrudno zauważyć jeszcze jedno: $f(x) = 0$ tylko dla $x = 0$, a dla $x \neq 0$ jest $f(x) \geq x^2 > 0$. Zatem f ma w zerze minimum lokalne właściwe (a nawet osiąga w zerze swój kres dolny). Jednak dla dowolnej liczby $\delta > 0$ funkcja f' zmienia znak nieskończenie wiele razy w przedziale $(0, \delta)$. Podobnie jest w przedziale $(-\delta, 0)$: tam też f' zmienia znak nieskończenie wiele razy.³ Zatem prawdziwy jest następujący fakt, dla kogoś być może lekko zaskakujący i przeczący naiwnej intuicji.

Może się zdarzyć, że f jest ciągła na \mathbb{R} i ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ ekstremum lokalne właściwe, jednak nie jest monotoniczna na żadnym przedziale $(x_0, x_0 + \delta)$, ani na żadnym przedziale $(x_0 - \delta, x_0)$, gdzie $\delta > 0$. \square

³Czytelnik zechce, naśladowując rozumowanie z Przykładu 5.12, precyzyjnie to uzasadnić.

Twierdzenie 6.47 (własność Darboux dla pochodnej). Załóżmy, że $a < b$, zaś funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna na $[a, b]$. Dla każdej liczby $c \in [f'(a), f'(b)]$ istnieje punkt $x \in [a, b]$ taki, że $f'(x) = c$.

Uwaga: nie zakładamy, że $f'(a) < f'(b)$. Napis $[f'(a), f'(b)]$ oznacza przedział o końcach $f'(a)$ i $f'(b)$, być może zdegenerowany do jednego punktu. Podkreślmy też wyraźnie: nie zakładamy tu ciągłości f' .

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności przyjmijmy $f'(a) < f'(b)$. Rozpatrzmy funkcję pomocniczą⁴ $\phi(x) = f(x) - cx$. Spełnia ona warunki:

$$\phi'(a) = f'(a) - c \leq 0, \quad \phi'(b) = f'(b) - c \geq 0.$$

Jeśli $\phi'(a) = 0$ lub $\phi'(b) = 0$, to teza twierdzenia zachodzi (można wziąć $x = a$ lub $x = b$). Załóżmy więc odtąd, że $\phi'(a) < 0 < \phi'(b)$.

Funkcja ϕ jest ciągła na $[a, b]$, zatem, z Twierdzenia 5.36 wynika, że istnieje punkt $x \in [a, b]$ taki, że

$$\phi(x) = \inf_{[a,b]} \phi.$$

Zauważmy, że gdyby $x = a$, to mielibyśmy dla małych $h > 0$

$$\frac{\phi(a+h) - \phi(a)}{h} \geq 0, \quad \text{a zatem} \quad \phi'(a) \geq 0.$$

Ponieważ jednak $\phi'(a) < 0$, więc $x \neq a$. Tak samo pokazujemy, że $x \neq b$. Z lematu Fermata otrzymujemy teraz $\phi'(x) = f'(x) - c = 0$. \square

Odpowiedź na inne naturalne pytanie: czy każda funkcja ciągła jest pochodną pewnej funkcji? jest też twierdząca, ale na jej uzasadnienie Czytelnik będzie musiał poczekać.

6.4 Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora

6.4.1 Definicja pochodnych wyższych rzędów

Jeśli funkcja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru A , to funkcję $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $g(a) = f'(a)$ dla każdego $a \in A$, nazywamy *pierwszą pochodną* funkcji f . Pochodne wyższych rzędów definiuje się indukcyjnie. Służą one, jak się przekonamy, do aproksymacji funkcji wielomianami, do badania ekstremów, a także (druga pochodna) do określania wypukłości. Zacznijmy od definicji.

Definicja 6.48 (pochodne wyższych rzędów). Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech P będzie przedziałem otwartym w \mathbb{R} , $a \in P$. Jeśli w każdym punkcie przedziału P funkcja $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ ma pochodne do rzędu $(n-1)$ włącznie, to mówimy, że f ma n -tą pochodną w a (lub: pochodną rzędu n w a) wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(n-1)}$ jest różniczkowalna w punkcie a . Przyjmujemy

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}.$$

⁴Nietrudno zobaczyć, że ϕ dobieramy tak, aby mieć $\phi' = 0 \Leftrightarrow f' = c$.

Krótko mówiąc, górny indeks w nawiasie oznacza liczbę wykonanych różniczkowań. Zatem, $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f'' = (f')'$, $f^{(3)} = (f^{(2)})' = (f'')' = f'''$. Primów nie używamy do oznaczania pochodnych rzędu wyższego niż trzeci. Ogólna, indukcyjna reguła podana w definicji orzeka, iż $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ w tych punktach, w których funkcja $f^{(n-1)}$ jest różniczkowalna.

Przykład 6.49. a) Jeśli $f(x) = \exp(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, to – jak już wiemy – $f'(x) = \exp(x) = f(x)$. Nietrudno stąd wywnioskować, że f ma pochodne wszystkich rzędów: $f'' = (f')' = f' = f$, $f''' = (f'')' = f' = f$ i ogólnie $f^{(n)} = f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

b) Posługując się wzorami na pochodne sinusa i cosinusa (patrz Stwierdzenie 6.22), łatwo sprawdzamy, że

$$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^{n+1} \sin x, \quad (\sin x)^{(2n-1)} = (-1)^{n+1} \cos x, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.4)$$

$$(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x, \quad (\cos x)^{(2n-1)} = (-1)^n \sin x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

c) Ze wzoru na pochodną logarytmu naturalnego (patrz Stwierdzenie 6.25) i pochodną funkcji potęgowej otrzymujemy dla $n \geq 1$

$$(\ln y)^{(n)} = (y^{-1})^{(n-1)} = (-y^{-2})^{(n-2)} = \dots = (-1)^{n-1} (n-1)! y^{-n}, \quad y > 0, \quad (6.6)$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}, \quad x > -1. \quad (6.7)$$

(Obu wzorów dowodzi się tak samo, przez łatwą indukcję.)

d) Jeśli $m, k \in \mathbb{Z}$ są nieujemne, to wówczas

$$(x^m)^{(k)} = \begin{cases} m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)x^{m-k}, & 0 \leq k \leq m, \\ 0, & k > m. \end{cases} \quad (6.8)$$

Pochodna n -tego rzędu sumy dwóch funkcji n -krotnie różniczkowalnych jest sumą n -tych pochodnych składników, tzn. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$. Dowód jest oczywisty i wynika ze wzoru na pochodną sumy. Wzory na wyższe pochodne złożenia funkcji i funkcji odwrotnej są dość zawile, ale w razie potrzeby można je wyprowadzić, wykonując czysto mechaniczną pracę. Odnotujmy natomiast wzór Leibniza na n -tą pochodną iloczynu. Z mnemotechnicznego punktu widzenia jest on “taki sam”, jak dwumian Newtona.

Stwierdzenie 6.50 (wzór Leibniza). Jeśli $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, $a \in P$ i $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$ są n -krotnie różniczkowalne w a , to wówczas

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)}(a) g^{(n-j)}(a).$$

Szkic dowodu. Dowód jest łatwy; prowadzi się go przez indukcję, korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu i tożsamości $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$. Sprawdźmy tylko wzór na $(fg)''$:

$$(fg)'' = ((fg)')' = (f'g + fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg'',$$

pozostawiając resztę szczegółów zainteresowanym. \square

6.4.2 Wzór Taylora

Najważniejszym wzorem w Analizie, wykorzystującym pochodne wyższych rzędów, jest tak zwany wzór Taylora. Służy on do przybliżania funkcji n -krotnie różniczkowalnych wielomianami, z pewną kontrolą błędu przybliżenia (jakość i stopień tej kontroli zależą od tego, ile wiemy o danej funkcji). W najprostszym przypadku, dla wielomianów, wynika on ze związku między współczynnikami wielomianu i wartościami pochodnych wielomianu w zerze, który z kolei łatwo otrzymać ze wzoru (6.8).

Prześledźmy odpowiedni rachunek. Niech

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas

$$\begin{aligned} P'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1} = \sum_{j=1}^n j a_j x^{j-1}, \\ P''(x) &= 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{j=2}^n j(j-1)a_j x^{j-2}, \\ &\vdots \\ P^{(k)}(x) &= \sum_{j=k}^n j(j-1)\cdots(j-k+1)a_j x^{j-k} \quad \text{dla } k \leq n. \end{aligned}$$

W szczególności, $P^{(n)}(x) = n!a_n$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, a ponadto

$$P^{(k)}(0) = k!a_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (6.9)$$

Stwierdzenie 6.51 (Wzór Taylora dla wielomianów). *Jeśli P jest wielomianem stopnia n , to wówczas*

$$P(x) = P(0) + \frac{P^{(1)}(0)}{1!}x + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(0)}{j!}x^j; \quad (6.10)$$

$$P(w) = P(x_0) + \frac{P^{(1)}(x_0)}{1!}(w-x_0) + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(w-x_0)^n \quad (6.11)$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(x_0)}{j!}(w-x_0)^j. \quad (6.12)$$

Dowód. Pierwszy wzór wynika z relacji (6.9) między współczynnikami wielomianu P i jego pochodnymi w zerze. Aby otrzymać drugi wzór, wystarczy zastosować pierwszy do wielomianu Q , gdzie $Q(w-x_0) = P(w)$. Wtedy $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(x_0)$ dla dowolnego k . \square

Jeśli $k > n$, to oczywiście $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)^{(k)} = 0$ dla wszystkich x . Okazuje się, że taki warunek spełniają na prostej tylko wielomiany odpowiedniego stopnia. Odnotujmy ten fakt.

Stwierdzenie 6.52. *Jeśli $f: \mathbb{R} \supset P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie P jest przedziałem, jest k -krotnie różniczkowalna i $f^{(k)} \equiv 0$, to f jest wielomianem stopnia co najwyżej $k - 1$.*

Dowód. Dowodzimy przez indukcję względem k . Jeśli $k = 1$, to z Wniosku 6.43 wynika, że $f = \text{const}$, a więc f jest wielomianem stopnia 0 i teza zachodzi.

Założmy prawdziwość stwierdzenia dla liczby k . Niech f będzie $(k + 1)$ -krotnie różniczkowalna i $f^{(k+1)} \equiv 0$. Wówczas $f^{(k)}(x) \equiv c \in \mathbb{R}$ na mocy Wniosku 6.43. Rozpatrzmy $\varphi(x) = f(x) - cx^k/k!$. Oczywiście,

$$\varphi^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - k! \cdot c/k! = 0.$$

a więc na mocy założenia indukcyjnego φ jest wielomianem stopnia co najwyżej $k - 1$. Zatem, $f(x) = \varphi(x) + a_k x^k$, gdzie $a_k = c/k!$, jest wielomianem stopnia co najwyżej k . \square

Twierdzenie 6.53 (wzór Maclaurina z resztą w postaci Peano). *Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, $0 \in P$. Załóżmy, że $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ ma $(k - 1)$ pochodnych w przedziale P i k -tą pochodną w punkcie 0. Wtedy*

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + r(x), \quad (6.13)$$

gdzie reszta $r(x)$ spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^k} = 0. \quad (6.14)$$

Intuicyjny sens tego twierdzenia jest jasny: funkcję, która ma $(k - 1)$ pochodnych w pewnym przedziale i k -tą pochodną w pewnym ustalonym punkcie (jak zobaczymy później, zero nie odgrywa tu żadnej szczególnej roli), to w pobliżu tego punktu można tę funkcję przybliżać wielomianami stopnia k , przy czym błąd przybliżenia ma, dla małych x -ów, mniejszy rząd niż x^k .

Liczne przykłady zastosowań tego twierdzenia Czytelnik zobaczy później (także na ćwiczeniach). Najpierw przytoczymy

Dowód. Krok 1. Niech najpierw $k = 1$. Wtedy wzór Maclaurina przybiera postać $f(x) = f(0) + f'(0)x + r(x)$, a równość

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right) = 0$$

wynika wprost z definicji pochodnej.

Krok 2. Rozpatrzmy teraz przypadek szczególny: niech funkcja $\phi: P \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$\phi^{(j)}(0) = 0 \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, k. \quad (6.15)$$

Dla takiej ϕ prawa strona (6.13) składa się z samej 'reszty', tzn. wzór Maclaurina przybiera postać $\phi(x) = r(x)$. Trzeba więc wykazać, że dla każdej takiej funkcji zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{x^k} = 0. \quad (6.16)$$

Udowodnimy to przez indukcję względem k . Przypadek $k = 1$ już rozpatrzyliśmy.

Niech ϕ spełnia warunek (6.15) dla $k = q + 1$. Wtedy $\psi = \phi'$ spełnia ten sam warunek dla $k = q$. Piszemy, stosując do ϕ twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej na odcinku o końcach 0 i x ,

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x)}{x^{q+1}} &= \frac{\phi(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^q} = \phi'(tx) \cdot \frac{1}{x^q} && \text{dla pewnego } t \in (0, 1) \\ &= \psi(tx) \cdot \frac{1}{(tx)^q} \cdot t^q \rightarrow 0 && \text{dla } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

na mocy założenia indukcyjnego, zastosowanego do funkcji ψ . To kończy dowód wzoru Maclaurina dla funkcji ϕ , spełniających dodatkowy warunek (6.15).

Krok 3. Przypadek ogólny. Dla f spełniającej założenia twierdzenia kładziemy

$$\phi(x) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j,$$

tzn. po prostu $\phi(x) = r(x)$. Nietrudno sprawdzić, że $\phi^{(j)}(0) = f^{(j)}(0) - f^{(j)}(0) = 0$, więc ϕ spełnia założenie (6.15). Zgodnie z poprzednim krokiem dowodu, zachodzi więc warunek (6.16), tzn. $\phi(x)/x^k = r(x)/x^k \rightarrow 0$ dla $x \rightarrow 0$. \square

Podkreślmy: w całym twierdzeniu chodziło tylko o zbadanie zachowania reszty $r(x)$ dla małych x . To był kluczowy problem.

Otrzymany wzór Maclaurina można “przesunąć” na dowolny inny przedział $P \subset \mathbb{R}$, z wyróżnionym punktem x_0 . Jeśli $f(x) = \varphi(x - x_0)$, to $f^{(j)}(x_0) = \varphi^{(j)}(0)$ dla wszystkich j , dla których pochodne rzędu j istnieją. Zachodzi więc także następujący fakt.

Wniosek 6.54 (wzór Taylora z resztą w postaci Peano). Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym, $x_0 \in P$. Załóżmy, że $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ ma $(k - 1)$ pochodnych na P i k -tą pochodną w punkcie x_0 . Wówczas

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + r(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^k} = 0.$$

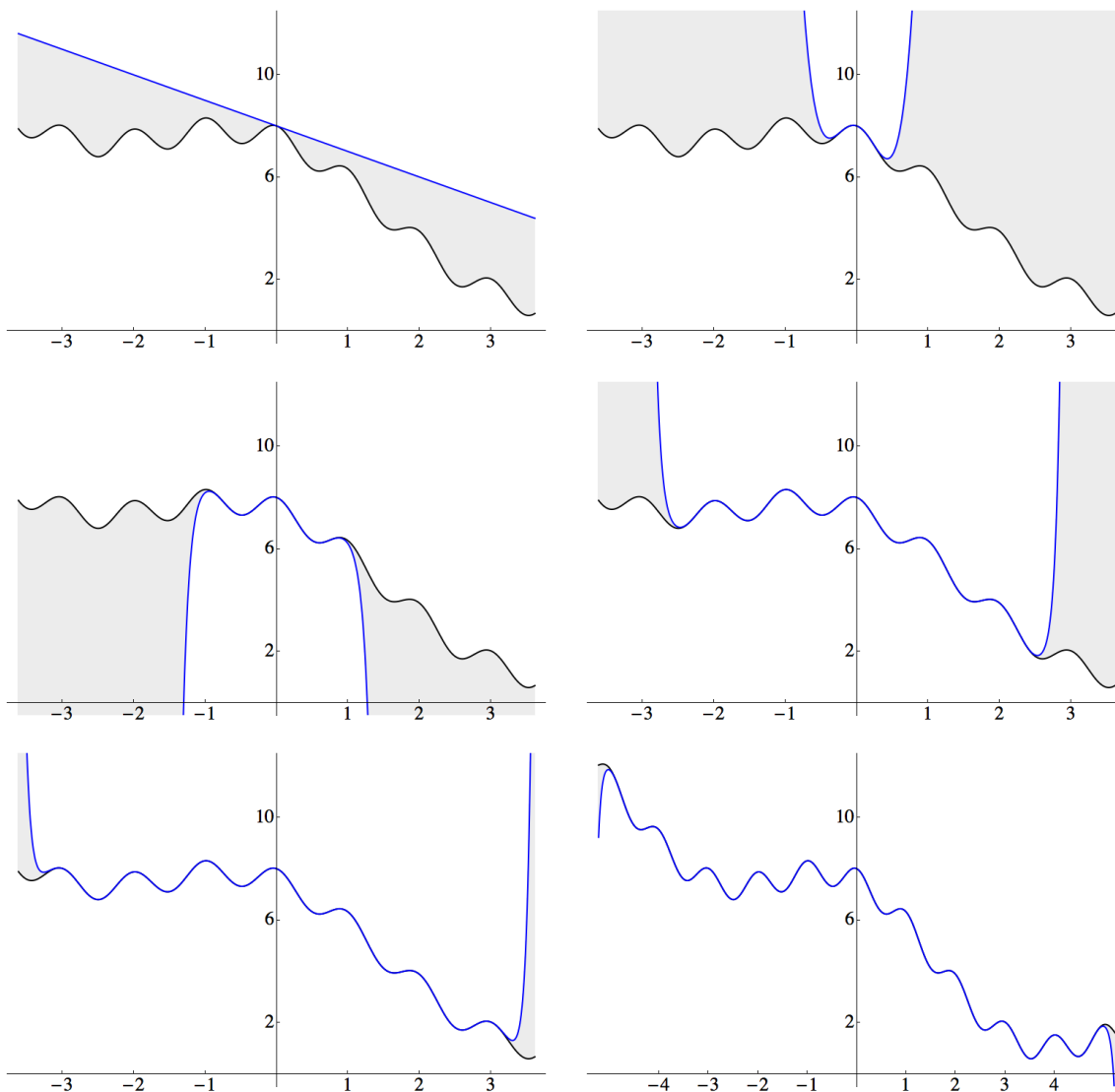
Uwaga 6.55 (terminologia). Wielomian

$$\sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

nazywa się k -tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie x_0 (gdy $x_0 = 0$, używamy nazwy wielomian Maclaurina). Zamiast podawać warunek (6.14), pisze się czasem $r(x) = o(x^k)$ dla $x \rightarrow 0$. Symbol po prawej stronie to tzw. “o małe”; napis

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{dla } x \rightarrow a$$

oznacza po prostu, że granica $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = 0$. Taki język jest czasem bardzo wygodny, co zobaczymy w konkretnych przykładach.



Funkcja $f(x) = 6 - x + \frac{3}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos(2\pi x)$ i jej wielomiany Taylora–Maclaurina w punkcie $x_0 = 0$ dla $n = 1$ (styczna do wykresu), dla $n = 5$ (górne rysunki), dla $n = 15$ i $n = 40$ (środkowe rysunki), i wreszcie dla $n = 52$ i $n = 82$ (dolne rysunki). Jak widać, wykresy f i T_{82} na przedziale $[-4, 4]$ pokrywają się praktycznie idealnie. Jednak dla $|x| \rightarrow \infty$ funkcja $g = |f - T_{82}|$ ma oczywiście granicę $+\infty$. Przybliżenie, jakie zapewnia wzór Taylora, ma *charakter lokalny*.

Z praktycznego punktu widzenia, przybliżenie, jakie zapewnia wzór Taylora, jest wystarczające do wielu celów praktycznych, np. choćby do obliczania wartości funkcji. Nawet ktoś zupełnie niezainteresowany teorią może zobaczyć to na rysunkach. Te, które widać w skrypcie, zostały wykonane dla konkretnej funkcji (wybranej tak, aby uzyskać rozsądną ilość przedziałów monotoniczności i wykres, który w otoczeniu zera wygląda dość przypadkowo)

$$f(x) = 6 - x + \frac{3}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos(2\pi x); \quad (6.17)$$

jej wykres jest zaznaczony kolorem czarnym. Kolorem niebieskim zaznaczono wykresy

wielomianów Taylora–Maclaurina,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k,$$

dla różnych n . Jak widać, im wyższy stopień wielomianu Taylora, tym (w danym przypadku) większa długość przedziału, na którym przybliżenie jest dokładne, i tym mniejszy błąd przybliżenia. Zobaczmy później, jakie są teoretyczne oszacowania reszty we wzorze Taylora.⁵

Oto fragment kodu, który zainteresowanym pozwoli na prowadzenie w wydziałowym Laboratorium własnych eksperymentów z wielomianami Taylora. Można samodzielnie zmieniać funkcję i dwoma suwakami zmieniać rozmiar przedziału oraz stopień wielomianu Taylora:

```
Manipulate[
  Plot[
    Evaluate[
      {1.5 Cos[x] + .5 Cos[2 * Pi * x] - x + 6,
       Normal[Series[1.5 Cos[x] + .5 Cos[2 * Pi * x] - x + 6, {x, 0, n}]]
      }], {x, -x0, x0},
    PlotRange -> {-0.5, 12.5}, PlotPoints -> 120, MaxRecursion -> 3,
    PlotStyle -> {{Black, Thick}, {Blue, Thick}},
    TicksStyle -> Directive[Black, 26],
    Ticks -> {{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4}, {2, 6, 10}},
    Filling -> {2}, FillingStyle -> Directive[Opacity[.15], Gray],
    ImageSize -> {800, 500}, ImagePadding -> 20
  ],
  {{n, 5, "stopień wielomianu"}, 1, 80, 1},
  {{x0, 5, "wielkość przedziału"}, .5, 8}
]
```

Przejdziemy teraz do konkretnych przykładów, wskazujących m.in., jak przydatny jest wzór Taylora przy obliczaniu granic.

Przykład 6.56. Posługując się wzorami na pochodne wyższych rzędów funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych, podanymi w Przykładzie 6.49, możemy teraz łatwo wypisać wzory MacLaurina dla tych funkcji. Można to zrobić dla dowolnej liczby n , gdyż rozpatrywane funkcje mają pochodne wszystkich rzędów na całej prostej.

a) Niech $f(x) = \exp(x)$. Wówczas $f^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, więc wzór (6.13) dla funkcji wykładniczej przybiera postać

$$\exp(x) = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + o(x^n) \quad \text{dla } x \rightarrow 0.$$

⁵Zobaczymy też, niestety, że istnieją tak ‘złośliwe’ funkcje, dla których prawa strona wzoru Taylora w pewnych punktach składa się, dla dowolnego n , z samej reszty – wtedy przybliżanie wielomianami Taylora nie wnosi żadnej informacji.

- b) Dla $f(x) = \sin x$ mamy $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \sin 0 = 0$ (tzn. w (6.13) nie ma w ogóle składników o numerach parzystych), natomiast $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1} \cos 0 = (-1)^n$ dla $n = 0, 1, \dots$. Wzór MacLaurina dla sinusa jest więc następujący:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r(x),$$

gdzie $r(x) = o(x^{2n+1})$ dla $x \rightarrow 0$, gdyż skończyliśmy wypisywanie wielomianu MacLaurina na pochodnej rzędu $(2n+1)$. Zauważmy, że w tym przypadku można w istocie twierdzić, że $r(x) = o(x^{2n+2})$ dla $x \rightarrow 0$, gdyż kolejny, parzysty, składnik w rozwinięciu MacLaurina jest zerem (parzyste pochodne sinusa znikają w zerze).

- c) Dla $f(x) = \cos x$ mamy $f^{(2n+1)}(0) = 0$ dla każdego $n = 0, 1, \dots$, natomiast $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$ i dlatego

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r(x),$$

gdzie $r(x) = o(x^{2n})$ dla $x \rightarrow 0$ (i, jak w poprzednim podpunkcie, można zauważyć, że w istocie mamy nawet $r(x) = o(x^{2n+1})$, gdyż kolejny, nieparzysty, składnik rozwinięcia MacLaurina jest zerem). \square

Uwaga. Czytelnik zauważył zapewne, że wielomiany MacLaurina w ostatnim przykładzie wyglądają tak samo, jak odpowiednie sumy częściowe szeregów, którymi posługiwaliśmy się w rozdziale 4. To nie jest przypadkowy fakt: jak zobaczymy za jakiś czas, jeśli funkcja f jest sumą szeregu, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, zbieżnego na pewnym przedziale otwartym wokół zera, to wówczas f ma pochodne wszystkich rzędów i $f^{(k)}(0) = k!a_k$ dla każdego k .

Przykład 6.57. Niech $f(x) = \ln x$ i $x_0 = 1$. Tym razem zastosujemy wzór Taylora w punkcie $x_0 = 1$. Mamy $f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ (patrz Przykład 6.49), a więc

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + r(x), \quad \text{gdzie} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{r(x)}{(x-1)^n} = 0.$$

Podstawiając $x-1 = t$, otrzymamy

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + o(t^n) \quad \text{dla } t \rightarrow 0.$$

Tym wzorem też można się posługiwać dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$, gdyż logarytm naturalny ma na $(0, \infty)$ pochodne wszystkich rzędów. \square

Przykład 6.58. Obliczymy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{\ln(1+x^3)}.$$

Mamy $\ln(1+t) = t + o(t)$; biorąc $t = x^3$ stwierdzamy, że mianownik jest równy x^3 z dokładnością do wyrazów niższego rzędu. Dlatego znajdziemy rozwinięcie Taylora licznika też z dokładnością do wyrazów z x^3 . Wiemy, że $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ dla $x \rightarrow 0$. Zatem

$$\begin{aligned} \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{(\sin x)^3}{6} + o((\sin x)^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{dla } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Skomentujmy ten prosty skądinąd rachunek. Po pierwsze, nie musieliśmy wcale różniczkować złożenia $\sin \circ \sin$. Podstawialiśmy jeden wzór Taylora do drugiego, kontrolując błąd. Po drugie, napis ‘ $o(x^3)$ ’ oznaczał w różnych miejscach różne wyrażenia! Wiemy tylko, że ‘ $o(x^3)$ dla $x \rightarrow 0$ ’ to funkcja, która po podzieleniu przez x^3 ma w zerze granicę 0. Dlatego⁶ $o(x^3) + o(x^3) = o(x^3)$ oraz $o((\sin x)^3) = o(x^3)$, gdyż $\frac{\sin x}{x}$ ma zerze granicę 1. Ostatecznie,

$$\frac{\sin x - \sin(\sin x)}{\ln(1 + x^3)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}},$$

a więc szukana granica wynosi $1/6$. Podkreślmy ponownie: w liczniku i mianowniku ostatniego ułamka pod tym samym symbolem $o(x^3)$ kryją się różne wyrażenia – reszty ze wzoru Maclaurina dla różnych funkcji! Ich wspólną własnością jest jednak to, że po podzieleniu przez x^3 dążą do zera. Dlatego umiemy udzielić odpowiedzi. \square

Podamy teraz ogólne twierdzenie, pozwalające dokładniej szacować resztę we wzorze Taylora.

Twierdzenie 6.59 (wzór Taylora z resztą Schlömilcha–Roche’a). Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w przedziale (a, b) pochodne do rzędu $(k+1)$ włącznie. Załóżmy, że $x_0, x_0 + d \in (a, b)$, $d > 0$. Oznaczmy

$$r_k(x) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

Wówczas dla każdego $x \in (x_0, x_0 + d)$ i każdego $p > 0$ istnieje liczba $\theta \in (0, 1)$ taka, że

$$r_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{k! \cdot p} (1 - \theta)^{k+1-p} (x - x_0)^{k+1}. \quad (6.18)$$

Dowód. Ustalmy $x \in (x_0, x_0 + d)$ i rozważmy funkcję pomocniczą

$$\varphi(y) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(y)}{j!} (x - y)^j, \quad \text{gdzie } x_0 \leq y \leq x.$$

Wtedy $\varphi(x) = 0$ i $\varphi(x_0) = r_k(x)$; ponadto, φ jest różniczkowalna w $[x_0, x]$, gdyż f ma $k+1$ pochodnych na większym przedziale. Obliczmy

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= 0 - f'(y) - \left(\frac{f^{(2)}(y)}{1!} (x - y) - \frac{f^{(1)}(y)}{1!} \right) - \left(\frac{f^{(3)}(y)}{2!} (x - y)^2 - \frac{f^{(2)}(y)}{1!} (x - y) \right) \\ &\quad - \dots - \left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x - y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!} (x - y)^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Opuszczając nawiasy, otrzymujemy po dokonaniu redukcji

$$\varphi'(y) = -\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x - y)^k. \quad (6.19)$$

⁶To jeden z powodów, dla których tej symboliki trzeba używać z wyczuciem i ostrożnie!

Niech teraz ψ będzie funkcją ciągłą w $[x_0, x]$, różniczkowalną w (x_0, x) , której pochodna nie znika nigdzie w (x_0, x) . Stosując Twierdzenie Cauchy'ego (patrz Tw. 6.38; proszę samodzielnie sprawdzić, że spełnione są wszystkie założenia), otrzymujemy

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \quad \text{dla pewnego } c \in (x_0, x).$$

Korzystając z tej równości, obliczamy

$$\begin{aligned} r_k(x) = \varphi(x_0) &= \underbrace{\varphi(x) - \psi(x) + \psi(x_0)}_{=0} \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \\ \stackrel{(6.19)}{=} & \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!} (x-c)^k \cdot \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Aby zakończyć dowód, pozostaje odpowiednio dobrać funkcję ψ i użyć powyższego wzoru dla niej. Weźmy $\psi(y) = (x-y)^p$. Wtedy ψ jest ciągła na $[x_0, x]$ i $\psi'(y) = -p(x-y)^{p-1}$ nie znika w (x_0, x) . Ponadto, $\psi(x) = 0$ i $\psi(x_0) = (x-x_0)^p$. Niech $\theta \in (0, 1)$ będzie takie, że $c = x_0 + \theta(x-x_0)$. Wzór (6.20) przepisujemy teraz w postaci

$$\begin{aligned} r_k(x) &= \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{k!} (x-x_0 - \theta(x-x_0))^k \cdot \frac{-(x-x_0)^p}{-p(x-x_0 - \theta(x-x_0))^{p-1}} \\ &= \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{k! \cdot p} (x-x_0)^k (1-\theta)^k \cdot \frac{(x-x_0)^p}{(x-x_0)^{p-1} (1-\theta)^{p-1}} \\ &= \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{k! \cdot p} (x-x_0)^{k+1} (1-\theta)^{k+1-p}. \end{aligned}$$

To jest właśnie szukana postać reszty, (6.18). Dowód jest zakończony. \square

Dobierając różne wartości p , można otrzymać różne konkretne postacie reszty. Bardzo znana jest tzw. *reszta Lagrange'a*, którą otrzymujemy dla $p = k+1$. Wtedy $k+1-p = 0$, a $k! \cdot p = (k+1)!$. Dlatego zachodzi następujący fakt.

Wniosek 6.60 (wzór Taylora z resztą Lagrange'a). *Założmy, że funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w przedziale (a, b) pochodne do rzędu $(k+1)$ włącznie. Wówczas, dla każdego $x_0 \in (a, b)$ i każdego $x \in (a, b)$ istnieje taki punkt c , pośredni między x_0 i x , że*

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1}.$$

6.4.3 Warunki dostateczne istnienia ekstremów lokalnych

Posługując się wzorem Taylora, nietrudno sformułować warunki dostateczne istnienia ekstremów lokalnych, wyrażone za pomocą pochodnych wyższych rzędów. Wiemy już, że zerowanie pierwszej pochodnej funkcji nie jest warunkiem dostatecznym istnienia ekstremum lokalnego (przykład: $f(x) = x^3$ jest ściśle rosnąca, ale $f'(0) = 0$). Jeśli jednak wiadomo, *które pochodne wyższych rzędów danej funkcji znikają, a które nie*, to można łatwo określić, czy w danym punkcie jest ekstremum lokalne, czy nie. Służy do tego wzór Taylora.

Stwierdzenie 6.61. Załóżmy, że $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w (a, b) pochodne do rzędu $(2k - 1)$ włącznie, a ponadto istnieje $f^{(2k)}(x_0)$. Jeśli

$$f^{(j)}(x_0) = 0 \quad \text{dla } j = 1, \dots, 2k - 1, \quad \text{zaś } f^{(2k)}(x_0) \neq 0,$$

to f ma w x_0 ekstremum lokalne właściwe. Dokładniej, jeśli $f^{(2k)}(x_0) > 0$, to f ma w x_0 minimum lokalne właściwe, a jeśli $f^{(2k)}(x_0) < 0$, to f ma w x_0 maksimum lokalne właściwe.

Dowód. Rozpatrzmy tylko przypadek $f^{(2k)}(x_0) > 0$; w drugim przypadku dowód jest analogiczny. Ze wzoru Taylora z resztą w postaci Peano otrzymujemy, uwzględniając założenie o znikaniu pochodnych $f^{(j)}(x_0)$ dla $j = 1, \dots, 2k - 1$,

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{2k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + r(x) = \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} (x - x_0)^{2k} + r(x),$$

gdzie $r(x) = o((x - x_0)^{2k})$ dla $x \rightarrow x_0$. Dobierzmy liczbę $\delta > 0$ tak, aby

$$\left| \frac{r(x)}{(x - x_0)^{2k}} \right| < \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} \quad \text{dla } 0 < |x - x_0| < \delta;$$

można to zrobić, posługując się wprost definicją granicy, gdyż $\varepsilon = f^{(2k)}(x_0)/(2 \cdot (2k)!) > 0$. Zatem, z nierówności trójkąta,

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} + \frac{r(x)}{(x - x_0)^{2k}} \right) (x - x_0)^{2k} > \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} (x - x_0)^{2k} > 0$$

dla wszystkich $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Dowód jest zakończony. \square

Stwierdzenie 6.62. Załóżmy, że $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w (a, b) pochodne do rzędu $2k$ włącznie, a ponadto istnieje $f^{(2k+1)}(x_0)$. Jeśli

$$f^{(j)}(x_0) = 0 \quad \text{dla } j = 1, \dots, 2k, \quad \text{ale } f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0,$$

to f nie ekstremum w punkcie x_0 .

Szkic dowodu. Postępując tak, jak w poprzednim dowodzie, otrzymujemy

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2k+1)}(x_0)}{(2k+1)!} (x - x_0)^{2k+1} + r(x),$$

przy czym dla pewnej liczby $\delta > 0$ jest

$$\left| \frac{r(x)}{(x - x_0)^{2k+1}} \right| < \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{f^{(2k+1)}(x_0)}{(2k+1)!} \right| \quad \text{dla } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Ponieważ wyrażenie $(x - x_0)^{2k+1}$ nie ma stałego znaku, więc łatwo jest stąd wywnioskować, że i różnica $f(x) - f(x_0)$ nie ma stałego znaku dla x bliskich x_0 . \square

6.4.4 Warunki dostateczne wypukłości. Punkty przegięcia.

W ostatniej części tego podrozdziału powiemy o związkach pochodnej z wypukłością.

Twierdzenie 6.63. *Załóżmy, że $f: P = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wówczas f jest wypukła na P (odpowiednio: ściśle wypukła na P) wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest niemalejąca na P (odpowiednio: rosnąca na P).*

Dowód. Znamy już Twierdzenie 5.75, które podaje równoważne warunki wypukłości. Trzeci warunek w tym twierdzeniu orzeka, że f jest wypukła na $P = (a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x < y < z$ należących do P zachodzą nierówności

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Jeśli f jest ściśle wypukła, to dla każdej trójki punktów nierówności są ostre.

Ustalmy teraz dowolne $x < y < z \in P$ i założmy, że f jest różniczkowalna, a f' jest funkcją niemalejącą. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieją $c_1 \in (x, y)$ oraz $c_2 \in (y, z)$ takie, że

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

gdzie środkowa nierówność zachodzi, gdyż f' jest niemalejąca i $c_1 < y < c_2$. Jeśli ponadto f' jest rosnąca, to $f'(c_1) < f'(c_2)$. To kończy dowód w jedną stronę.

Pokażemy teraz, że jeśli f jest wypukła i f' istnieje, to $f'(x) \leq f'(z)$ dla $x < z \in P$. Z Twierdzenia 5.75 wynika, że dla $0 < h < y - x$, gdzie $y = \frac{x+z}{2}$ jest środkiem odcinka (x, z) , zachodzą nierówności

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq \frac{f(z) - f(z-h)}{h}.$$

Ponieważ nierówności nieostre zachowują się w granicy, więc wykonując przejście graniczne $h \rightarrow 0$, otrzymujemy

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq f'(z). \quad (6.21)$$

Zatem f' jest niemalejąca. Jeśli ponadto f jest ściśle wypukła, to środkowa nierówność jest ostra, co oznacza, że wtedy $f'(x) < f'(z)$. \square

Uwaga. Aby sprawdzić, że monotoniczność f' jest warunkiem dostatecznym wypukłości f , można też postąpić inaczej. Niech $x_1 \leq x \leq y = x_2 \in P$, $t \in (0, 1)$. Funkcja

$$\psi(x) = f((1-t)x + ty) - (1-t)f(x) - tf(y)$$

ma pochodną $\psi'(x) = (1-t)(f'((1-t)x + ty) - f'(x))$. Zauważmy, że $(1-t)x + ty = x + t(y-x) > x$, gdy $x < y$ i $t > 0$. Dlatego, jeśli f' jest niemalejąca, to $\psi' \geq 0$ na $[x_1, x_2]$. Stąd $\psi(x_1) \leq \psi(x_2) = 0$, a warunek $\psi(x_1) \leq 0$ jest po prostu nierównością Jensena. Zauważmy, że gdy f' jest rosnąca, to nierówności w ostatnim zdaniu można zmienić na ostre.

Wniosek 6.64. Załóżmy, że $f: P = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna. Wówczas:

- (i) Jeśli $f'' > 0$ na P , to f jest ściśle wypukła na P ;
- (ii) Jeśli $f'' \geq 0$ na P , to f jest wypukła na P ;
- (iii) Jeśli $f'' < 0$ na P , to f jest ściśle wklęsła na P ;
- (iv) Jeśli $f'' \leq 0$ na P , to f jest wklęsła na P .

Dowód. Wystarczy zastosować poprzednie twierdzenie i Wniosek 6.42, podający warunki dostateczne monotoniczności funkcji różniczkowalnej. \square

Uwaga. Należy pamiętać, że mówimy tu tylko o *dostatecznych* warunkach wypukłości. Funkcja wypukła może przecież w pewnych punktach nie mieć nawet pierwszej pochodnej (przykład: $f(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$), a tym bardziej drugiej. Stosując Twierdzenie 5.75, można dość łatwo wykazać, że funkcja wypukła ma w każdym punkcie pochodne jednostronne i jest różniczkowalna poza zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Szczegóły pozostawiamy w charakterze zadania.

Definicja 6.65 (punkty przegięcia). Niech $f: P = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła i niech ma w punkcie $x_0 \in P$ skończoną lub nieskończoną pochodną. Załóżmy, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że f nie jest liniowa na żadnym z przedziałów $(x_0, x_0 - \delta)$ i $(x_0, x_0 + \delta)$, a ponadto na jednym z nich jest wypukła, zaś na drugim – wklęsła. Mówimy wtedy (i tylko wtedy), że f ma punkt przegięcia w x_0 .

Można spotkać w literaturze inne, *nierównoważne* powyższej, definicje punktów przegięcia – np. taką:

Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w $x_0 \in (a, b)$ i niech $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ będzie styczną do wykresu f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Mówimy, że f ma w x_0 punkt przegięcia, gdy funkcja $f(x) - y(x)$ zmienia znak w punkcie x_0 .

Geometrycznie biorąc, powyższe określenie oznacza, że wykres f przechodzi z jednej strony stycznej na drugą. *Nie wymagamy*, żeby na ustalonym przedziale z jednej strony x_0 funkcja była wklęsła, a z drugiej wypukła.

Zadanie 6.66. Niech

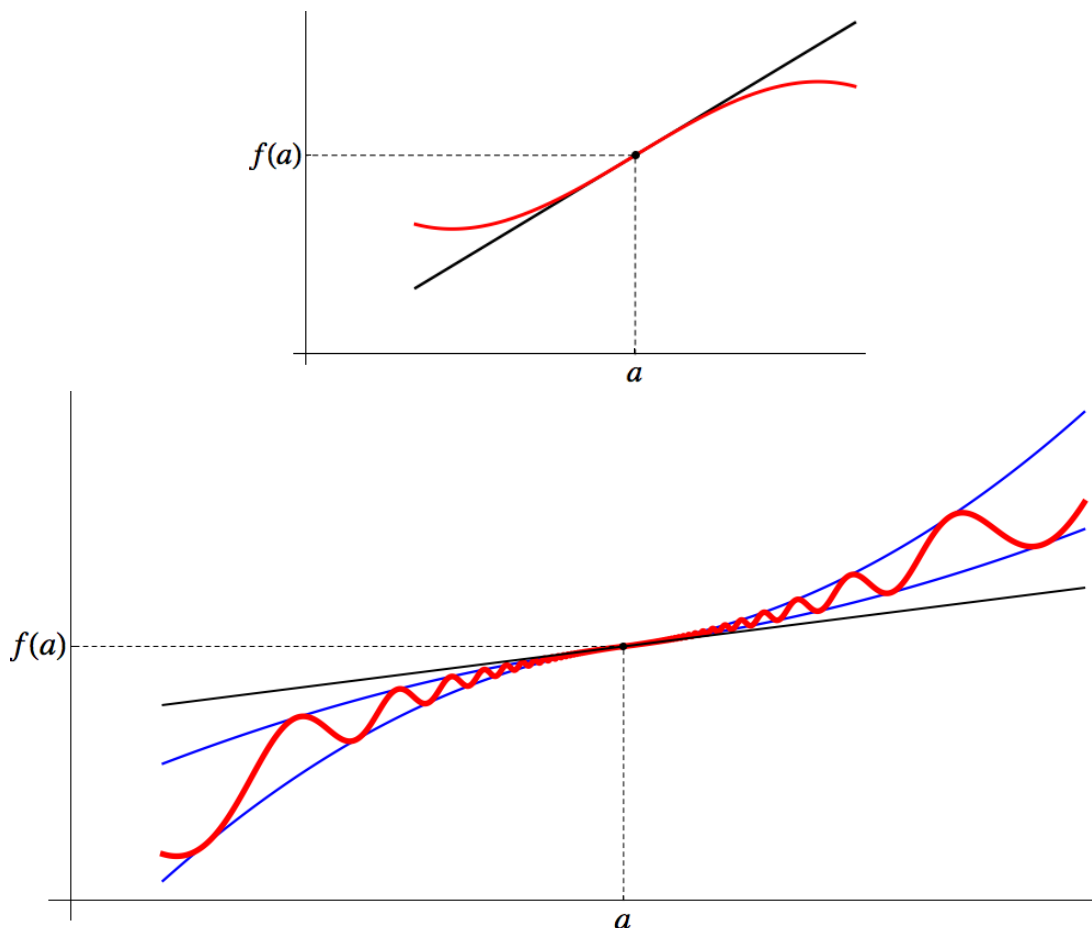
$$f(x) = \begin{cases} x^2(2 + \sin(1/x)), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

będzie funkcją z Przykładu 6.46 i niech $g(x) = f(x)$ dla $x \geq 0$, $g(x) = -f(x)$ dla $x < 0$. Sprawdzić, że g nie ma w $x_0 = 0$ punktu przegięcia w sensie Definicji 6.65, ale funkcja

$$g(x) - \left(g(x_0) + g'(x - x_0)(x - x_0) \right)$$

jest dodatnia dla $x > x_0 = 0$ i ujemna dla $x < x_0 = 0$, tzn. wykres g przechodzi w zerze z jednej strony stycznej na drugą.

Stwierdzenie 6.67. Załóżmy, że $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na (a, b) i trzykrotnie różniczkowalna w $x_0 \in (a, b)$, przy czym $f^{(3)}(x_0) \neq 0 = f''(x_0)$. Wtedy f ma w x_0 punkt przegięcia.



U góry: punkt przegięcia. U dołu: wykres funkcji przechodzi na drugą stronę stycznej, jednak w dowolnie małym przedziale $(a, a + \delta)$ są zarówno odcinki, na których funkcja jest wklęsła, jak i odcinki, na których funkcja jest wypukła. Konkretny przykład takiej sytuacji można znaleźć w Zadaniu 6.66.

Dowód. Bez zmiany ogólności założmy, że $f^{(3)}(x_0) > 0$. Ponieważ

$$0 < f^{(3)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0 + h) - f''(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0 + h)}{h},$$

więc dla wszystkich dostatecznie małych $h > 0$ jest $f''(x_0 + h) > 0 > f''(x_0 - h)$. Zatem f jest ściśle wypukła na pewnym przedziale $(x_0, x_0 + \delta)$ i ściśle wklęsła na pewnym przedziale $(x_0 - \delta, x_0)$. Na żadnym z tych przedziałów f oczywiście nie jest liniowa, a ponadto $f'(x_0)$ istnieje, gdyż f jest dwukrotnie różniczkowalna. Spełnione są więc wszystkie warunki Definicji 6.65. \square

Uwaga 6.68. Przy założeniach ostatniego stwierdzenia funkcja

$$h(x) = f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right)$$

zmienia znak w punkcie x_0 , gdyż ze wzoru Taylora z resztą w postaci Peano wynika, że

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + o((x-x_0)^3) \\ &= \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + o((x-x_0)^3) \quad \text{dla } x \rightarrow x_0; \end{aligned}$$

znak prawej strony określamy tak samo, jak w dowodzie Stwierdzenia 6.62. Z intuicyjnego punktu widzenia, przy założeniach $f^{(3)}(x_0) \neq 0 = f''(x_0)$ różnica h między f i styczną do wykresu f zachowuje się w otoczeniu punktu x_0 – z dokładnością do zaniedbywalnego błędu – tak, jak pewna wielokrotność $(x-x_0)^3$. Widać, że przy takich założeniach oba przytoczone określenia punktu przegięcia są równoważne (a patologie takie, jak w Zadaniu 6.66, są wykluczone).

Zadanie 6.69. Sprawdzić, że przy założeniach Stwierdzenia 6.62 f ma w x_0 punkt przegięcia.

Wskazówka. Spróbować naśladować dowód Stwierdzenia 6.67.

6.5 Reguła de l'Hospitala

Sformułujemy teraz kilka wariantów tak zwanej reguły de l'Hospitala, która ułatwia obliczanie granice wyrażeń nieoznaczonych typu $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Jest to narzędzie wygodne i warto je znać. Zobaczmy jednak przykłady sytuacji, gdy reguła de l'Hospitala prowadzi do kosztownych rachunków i z kretesem przegrywa konkurencję z wzorem Taylora.

Twierdzenie 6.70. Załóżmy, że $f, g: \mathbb{R} \supset P \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie skupienia $a \in P$ zbioru $P \subset \mathbb{R}$, a ponadto $f(a) = g(a) = 0 \neq g'(a)$. Wtedy granica

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

istnieje i jest równa $f'(a)/g'(a)$.

Dowód. Z założeń $f(a) = g(a) = 0 \neq g'(a)$ wynika, że

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)}$$

(ostatni ułamek ma sens: blisko punktu a jest $g(x) \neq g(a)$, gdyż $g'(a) \neq 0$). Z twierdzenia o granicy iloczynu i definicji pochodnej wynika natychmiast, że

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \rightarrow f'(a) \cdot \frac{1}{g'(a)} \quad \text{gdy } x \rightarrow a. \quad \square$$

Twierdzenie 6.71. Załóżmy, że $f, g: \mathbb{R} \supset P \rightarrow \mathbb{R}$ są $(k-1)$ -krotnie różniczkowalne w przedziale $P \subset \mathbb{R}$. Jeśli a jest punktem wewnętrznym P i

$$f^{(j)}(a) = g^{(j)}(a) = 0 \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, k-1, \quad \text{ale } g^{(k)}(a) \neq 0,$$

to granica

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

istnieje i jest równa $f^{(k)}(a)/g^{(k)}(a)$.

Dowód. Posługując się wzorem Taylora z resztą Peano i założeniem o znikaniu odpowiednich pochodnych f i g , możemy napisać:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k)}{\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k)} = \frac{f^{(k)}(a) + \frac{o((x-a)^k)}{(x-a)^k}}{g^{(k)}(a) + \frac{o((x-a)^k)}{(x-a)^k}} \quad \text{dla } x \rightarrow a.$$

(Zauważmy, że w otoczeniu punktu a mianownik nie będzie się zerował, gdyż $g^{(k)}(a) \neq 0$.) Stąd natychmiast wynika teza. \square

Kolejny wariant od dwóch poprzednich różni się tym, że *nie zakładamy różniczkowości* obu funkcji w punkcie a .

Twierdzenie 6.72. *Załóżmy, że $f, g: [a, a+d) \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $d > 0$, są różniczkowalne w przedziale otwartym $(a, a+d)$, $g'(x) \neq 0$ na $(a, a+d)$ i $f(a) = g(a) = 0$. Jeśli istnieje granica $\lim_{x \rightarrow a} (f'(x)/g'(x)) = A$, to istnieje granica $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x))$ i też jest równa A .*

Szkic dowodu. Tym razem skorzystamy z twierdzenia Cauchy'ego i napiszemy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}, \quad \text{gdzie } a < \xi_x < x. \quad (6.22)$$

Posługując się wprost definicją granicy (wg. Cauchy'ego), nietrudno stwierdzić, że dla $x \rightarrow a$ prawa strona dąży do A , a więc i lewa strona dąży do A . Czytelnik zechce uzupełnić wszystkie szczegóły rozumowania. \square

Uwaga 6.73. Regułę de l'Hospitala w wersji podanej w Twierdzeniu 6.72 wolno stosować nie tylko dla $A \in \mathbb{R}$, ale także w przypadku $A = \pm\infty$. Jeśli np. $A = +\infty$, to dla dowolnej liczby $M > 0$ znajdziemy $\eta > 0$ takie, że $f'(\xi)/g'(\xi) > M$ na przedziale $(a, a+\eta)$. Jeśli $x \in (a, a+\eta)$, to ξ_x we wzorze (6.22) też jest punktem przedziału $(a, a+\eta)$ i dlatego dla $x \in (a, a+\eta)$ lewa strona (6.22) jest większa od M .

Uwaga 6.74. W Twierdzeniu 6.72 punkt $a \in \mathbb{R}$ można zastąpić przez $\pm\infty$. Uzasadnienie nie jest skomplikowane. Wystarczy przyjąć, że

$$F(t) = f(1/t), \quad G(t) = g(1/t);$$

wtedy (powiedzmy, że $a = +\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{G(t)}.$$

Mamy też, dzięki wzorowi na pochodną złożenia,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^{-2}f'(1/t)}{-t^{-2}g'(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square$$

W ostatniej wersji reguła de l'Hospitala przenosi się na nieoznaczoności typu $\frac{\infty}{\infty}$.

Twierdzenie 6.75. *Niech f, g będą różniczkowalne w przedziale $(a, a+d)$, $g'(x) \neq 0$ na $(a, a+d)$ i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. Jeśli istnieje granica $\lim_{x \rightarrow a} (f'(x)/g'(x)) = A$, to istnieje granica $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x))$ i też jest równa A .*

Dowód. Dla ustalenia uwagi rozpatrzmy przypadek $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ i $A \in \mathbb{R}$. Niech $a < x < x_0 < a + d$. Wtedy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - (f(x_0)/f(x))}{1 - (g(x_0)/g(x))}.$$

Dla ustalonego x_0 , ułamek

$$U(x_0, x) = \frac{1 - (g(x_0)/g(x))}{1 - (f(x_0)/f(x))}$$

ma dla $x \rightarrow a$ granicę równą 1, gdyż $f, g \rightarrow +\infty$ dla $x \rightarrow a$. Posługując się twierdzeniem Cauchy'ego, by wyrazić stosunek przyrostów funkcji f i g , piszemy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot U(x_0, x) = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot U(x_0, x), \quad \text{gdzie } a < x < \xi_x < x_0. \quad (6.23)$$

Dlatego

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| &= \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} + \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| \\ &\stackrel{(6.23)}{=} \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} (U(x_0, x) - 1) + \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| \\ &\leq \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \right| \cdot |U(x_0, x) - 1| + \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right|. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i liczbę $\eta \in (0, 1)$, którą dobierzemy do ε później. Korzystając z założenia o istnieniu granicy ilorazu pochodnych, weźmy taki punkt $x_0 \in (a, a + d)$, aby $|\frac{f'(t)}{g'(t)} - A| < \eta$ dla wszystkich $t \in (a, x_0)$. Wreszcie, ustalwszy już x_0 , wybierzmy liczbę $\delta \in (0, |x_0 - a|)$ tak, aby $|U(x_0, x) - 1| < \eta$ dla wszystkich $x \in (a, a + \delta)$. Szacując prawą stronę (6.24), otrzymujemy teraz

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \right| \cdot \eta + \eta \leq (|A| + \eta)\eta + \eta < (|A| + 1 + 1)\eta < \varepsilon$$

dla wszystkich liczb $x \in (a, a + \delta)$; aby zachodziła ostatnia nierówność, wystarczy wziąć np. $\eta = \varepsilon/(|A| + 3)$. \square

Zadanie 6.76. Przeprowadzić dowód ostatniego twierdzenia dla $A = \pm\infty$.

Założenie o istnieniu granicy ilorazu f'/g' jest istotnie i nie można go pominąć.

Przykład 6.77. Oczywiście,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{2x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{2x}}{1 - \frac{\sin x}{2x}} = 1.$$

Jednak, oznaczając $f(x) = 2x + \sin x$, $g(x) = 2x - \sin x$, otrzymujemy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 + \cos x}{2 - \cos x},$$

a ten iloraz nie ma granicy dla $x \rightarrow \infty$. (Można wykazać, że każda liczba $z \in [\frac{1}{3}, 3]$ jest granicą ciągu $f'(x_n)/g'(x_n)$ dla pewnego ciągu (x_n) , który dąży do nieskończoności).

Teraz omówimy kilka przykładów zastosowań reguły de l'Hospitala.

Przykład 6.78. Zaczniemy od nieoznaczoności typu $\frac{0}{0}$. Obliczmy granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, gdzie $f(x) = e^x - e^{-x} - x$ i $g(x) = \sin x - 2x$. Mamy $f(0) = g(0) = 0$. Jest $f'(x) = e^x + e^{-x} - 1$ i $g'(x) = \cos x - 2$, więc $f'(0)/g'(0) = 1/(-1) = -1$. Dlatego granica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - x}{\sin x - 2x}$$

istnieje i jest równa -1 . (Posłużyliśmy się Twierdzeniem 6.70).

Przykład 6.79. Obliczmy granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, gdzie $f(x) = e^x - e^{-x} - x$ i $g(x) = \sin x - x$. Mamy $f(0) = g(0) = 0$. Jest $f'(x) = e^x + e^{-x} - 1$ i $g'(x) = \cos x - 1$, więc wartości $f'(0)/g'(0)$ nie można określić. Ponadto $f'(x)/g'(x) \rightarrow -\infty$ dla $x \rightarrow 0^+$ i dlatego granica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - x}{\sin x - x}$$

istnieje i jest równa $-\infty$. (Tym razem posłużyliśmy się Twierdzeniem 6.72 i Uwagą 6.73).

Przykład 6.80. Obliczmy granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, gdzie tym razem $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ i $g(x) = \sin x - x$. Łatwo sprawdzić, że

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = g(0) = g'(0) = g''(0) = 0, \quad \text{ale } g'''(0) = -\cos 0 = -1.$$

Ponieważ $f'''(0) = e^0 + e^{-0} = 2$, więc na mocy Twierdzenia 6.71

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'''(0)}{g'''(0)} = -2.$$

Przykład 6.81. Ten przykład jest nieco bardziej skomplikowany. Obliczmy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}.$$

Niech $f(x) = (1+x)^{1/x} - e$ dla $x > 0$. W punkcie $x = 0$ kładziemy $f(0) = 0$. Ponieważ $(1+x)^{1/x} \rightarrow e$ dla $x \rightarrow 0^+$ (to można sprawdzić, obliczając granicę prawostronną w zerze funkcji $\ln((1+x)^{1/x}) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, a następnie korzystając z ciągłości funkcji wykładniczej), więc otrzymamy w ten sposób funkcję ciągłą $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, różniczkowalną dla $x > 0$.

Ponadto, niech $g(x) = x$. Wtedy $g(0) = 0$ i $g'(x) = 1$ dla wszystkich x . Aby zastosować Twierdzenie 6.72, obliczamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \right)' \\ &= \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) \\ &= (1+x)^{1/x} \cdot \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right). \end{aligned} \tag{6.25}$$

Twierdzenie 6.72 pozwala teraz sprowadzić istnienie granicy f/g do istnienia granicy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - (x+1)\ln(1+x)}{x^2(x+1)}. \quad (6.26)$$

Niech teraz $F(x) = x - (x+1)\ln(1+x)$, $G(x) = x^2(x+1) = x^3 + x^2$. Mamy

$$F'(x) = 1 - \ln(1+x) - 1 = -\ln(1+x), \quad G'(x) = 3x^2 + 2x,$$

więc $F(0) = G(0) = F'(0) = G'(0) = 0$, natomiast

$$F''(x) = -\frac{1}{1+x}, \quad G''(x) = 6x + 2,$$

tzn. $F''(0) = -1$, $G''(0) = 2$ i na mocy Twierdzenia 6.71 otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) \stackrel{(6.26)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} \stackrel{\text{Tw. 6.71}}{=} \frac{F''(0)}{G''(0)} = -\frac{1}{2}.$$

Podstawiając ten wynik do (6.25) i korzystając z równości $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e$, otrzymujemy teraz, stosując Twierdzenie 6.72,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{e}{2}.$$

Ponieważ $-e/2 < -1$, więc otrzymujemy z ostatniego przykładu następujący wniosek.

Wniosek 6.82. Dla wszystkich dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e - \frac{1}{n}$$

Dowód. Dla ciągu $x_n = \frac{1}{n}$, przy oznaczeniach z ostatniego przykładu, z pewnością zachodzi warunek: $f(x_n)/g(x_n) < -1$ dla wszystkich dostatecznie dużych n (posługujemy się definicją Heinego granicy funkcji i Stwierdzeniem 2.13). Równoważnie,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = f(x_n) + e < e - g(x_n) = e - \frac{1}{n},$$

a to jest teza wniosku. \square

Widzimy zatem, że ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny do swojej granicy, liczby e , dość wolno: odstęp $e - a_n$ jest większy od $\frac{1}{n}$. Do wszelkich celów związanych z praktycznymi obliczeniami używa się rozwinięcia funkcji wykładniczej w szereg, które poznaliśmy w Rozdziale 4.

Przykład 6.83. Logarytm rośnie w nieskończoności wolniej, niż dowolna funkcja potęgowa o wykładniku dodatnim. Innymi słowy, dla każdego $\omega > 0$ jest

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\omega} = 0,$$

gdyż dla $f(x) = \ln x$ i $g(x) = x^\omega$ mamy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1/x}{\omega x^{\omega-1}} = \frac{1}{\omega x^\omega} \rightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow \infty.$$

Zauważmy: tym razem chodziło o nieoznaczoność typu $\frac{\infty}{\infty}$ i skorzystaliśmy z Twierdzenia 6.75.

Zadanie 6.84. Proszę samodzielnie wykazać, używając metody z ostatniego przykładu, że dla dowolnych liczb $\omega > 0$ i $a > 1$ jest

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\omega}{a^x} = 0.$$

Ile razy trzeba zastosować regułę de l'Hospitala, żeby uzyskać odpowiedź?

Z ostatniego zadania i ostatniego przykładu wynika ponownie morał, który skądinąd Czytelnik miał szansę poznać wcześniej, rozwiązując elementarnymi metodami wiele konkretnych zadań o granicach ciągów:

Dla $x \rightarrow +\infty$:

1. *Logarytm naturalny dąży do nieskończoności wolniej, niż dowolna funkcja potęgowa o wykładniku dodatnim;*
2. *Funkcja wykładnicza dąży do nieskończoności szybciej, niż dowolny wielomian.*

Przykład 6.85. W ostatnim przykładzie wskażemy granicę, którą można względnie łatwo określić, stosując wzór Taylora, natomiast używanie reguły de l'Hospitala jest raczej skazane na porażkę. Obliczmy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x - \sin x)^{4/3} \ln(1/\cos x)}{(\exp(x - \sin x) - 1)^2}.$$

Korzystając z rozwinięć Taylora–Maclaurina funkcji trygonometrycznych, $\exp t$ i $\ln(1+t)$, które poznaliśmy w poprzednim podrozdziale, możemy dla $x \rightarrow 0$ napisać

$$\begin{aligned} \ln(1/\cos x) &= -\ln \cos x = -\ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2); \\ \exp(x - \sin x) - 1 &= \exp \left(x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \right) - 1 = \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Funkcja $h(x) = \arcsin x$ ma pochodne

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}, \\ h''(x) &= -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = x(1-x^2)^{-3/2}, \\ h'''(x) &= (1-x^2)^{-3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(1-x^2)^{-5/2} \cdot (-2x) = (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}. \end{aligned}$$

Zatem $h(0) = h''(0) = 0$, $h'(0) = h'''(0) = 1$, i ze wzoru Maclaurina z resztą Peano otrzymujemy

$$\arcsin x = h(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{dla } x \rightarrow 0.$$

In[9]:= D[(ArcSin[x] - Sin[x])^(4/3) * Log[1/Cos[x]], {x, 3}]

$$\text{Out[9]} = \left\{ 4 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos[x] \right) \sec[x]^2 (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{1/3} + \right. \\ \left. \text{Log}[\sec[x]] \left(-\frac{8 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos[x] \right)^3}{27 (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{5/3}} + \frac{4}{3} \left(\frac{3x^2}{(1-x^2)^{5/2}} + \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} + \cos[x] \right) \right. \right. \\ \left. \left. (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{1/3} + \frac{4 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos[x] \right) \left(\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} + \sin[x] \right)}{3 (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{2/3}} \right) + \right. \\ \left. 2 \sec[x]^2 (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{4/3} \tan[x] + \right. \\ \left. 3 \left(\frac{4 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos[x] \right)^2}{9 (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{2/3}} + \frac{4}{3} (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{1/3} \left(\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} + \sin[x] \right) \right) \tan[x] \right\}$$

Stosowanie reguły de l'Hospitala nie zawsze jest dobrym pomysłem. Trzecią pochodną funkcji

$$(\arcsin x - \sin x)^{4/3} \cdot \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

można obliczyć, ułatwiając sobie pracę: załączony zrzut ekranu pokazuje wynik obliczeń symbolicznych, wykonanych przez komputer. Czytelnik powinien sobie teraz wyobrazić, że przedstawiony wynik ma trzykrotnie zróżniczkować za pomocą *kartki i ołówka*. Obliczanie granicy z Przykładu 6.85 tylko przy użyciu reguły de l'Hospitala jest zajęciem dość absurdalnym.

Stąd, ponieważ $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ dla $x \rightarrow 0$,

$$\arcsin x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Teraz możemy zakończyć rachunki. Otóż,

$$\frac{(\arcsin x - \sin x)^{4/3} \ln(1/\cos x)}{(\exp(x - \sin x) - 1)^2} = \frac{\left(\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^{4/3} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2} \\ = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)^{4/3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)^2} \quad \text{dla } x \rightarrow 0$$

(pisząc drugą równość, po prostu skróciliśmy ułamek przez x^6). Dlatego

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x - \sin x)^{4/3} \ln(1/\cos x)}{(\exp(x - \sin x) - 1)^2} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{4/3} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 6^2 \cdot 3^{-4/3} 2^{-1} = 2 \cdot 3^{2/3}.$$

Proszę zauważyć: o wartości granicy wnioskowaliśmy, dzieląc licznik i mianownik przez x^6 . To oznacza, że ważne były wartości szóstych pochodnych licznika i mianownika w zerze! Jednak różniczkując licznik i mianownik, otrzymujemy coraz bardziej skomplikowane wyrażenia; nic się wtedy nie upraszcza...

Warto zatem pamiętać, że wzór Taylora jest znacznie bardziej uniwersalnym narzędziem niż reguła de l'Hospitala.

Przykład 6.86. Wskażemy funkcję, dla której prawa strona wzoru Taylora-Maclaurina zawsze składa się *tylko* z reszty; wszystkie inne składniki są zerami. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że f jest ciągła w zerze. Nietrudno też zauważyć, a następnie wykazać przez indukcję, że dla $x \neq 0$ zachodzi wzór

$$f^{(n)}(x) = \exp(-1/x^2) \cdot W_n(1/x),$$

gdzie $W_n(t)$ jest pewnym wielomianem zmiennej t o współczynnikach całkowitych. Korzystając z tej własności, nietrudno udowodnić, że $f^{(n)}(0) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Istotnie, dla $n = 0$ wynika to wprost z definicji f , a jeśli wiemy już, że $f^{(n)}(0) = 0$, to

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(-1/x^2) \cdot W_n(1/x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tW_n(t)}{e^t} = 0$$

na mocy reguły de l'Hospitala. Dla tej funkcji używanie wzoru Taylora-Maclaurina do jej przybliżania nic nie daje!

Rozdział 7

Zbieżność jednostajna

Kilkakrotnie mieliśmy już do czynienia z granicami ciągów, zależnych od dodatkowego parametru, który mógł być liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Przyjęliśmy np. definicję funkcji wykładniczej

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}.$$

Dla każdego $z \in \mathbb{C}$ wartość $\exp(z)$ funkcji wykładniczej jest więc granicą wartości konkretnych wielomianów. Można zadać naturalne pytania: jeśli, ogólnie, $f(z) = \lim_n f_n(z)$ dla wszystkich z z pewnego podzbioru prostej lub płaszczyzny, to które własności wszystkich funkcji f_n (ciągłość? różniczkowalność? ...) dziedziczy graniczna funkcja f ? Czy dziedziczy je w każdym przypadku, czy może potrzebne są dodatkowe założenia?

W tym rozdziale postaramy się przynajmniej częściowo wyjaśnić te kwestie.

7.1 Definicje i przykłady

Niech $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $n = 1, 2, \dots$, a X oznacza (na razie) zupełnie dowolny zbiór.

Definicja 7.1 (zbieżność punktowa). Powiemy, że ciąg funkcji (f_n) jest *zbieżny punktowo do f na zbiorze X* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in X$ zachodzi równość

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Piszemy wtedy: $f_n \rightarrow f$ na X .

Definicja 7.2 (zbieżność jednostajna). Powiemy, że ciąg funkcji (f_n) jest *zbieżny jednostajnie do f na zbiorze X* wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $x \in X$ i wszystkich $n > n_0$ jest

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Piszemy wtedy: $f_n \rightrightarrows f$ na X .

Uwaga. Mówimy, że szereg funkcji $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x)$ jest zbieżny punktowo (odpowiednio: jednostajnie) do funkcji $f(x)$ na zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych

$S_n = \sum_{k=k_0}^n f_k$ tego szeregu jest zbieżny do f punktowo (odpowiednio: jednostajnie) na zbiorze X . Zwykle będziemy mieć do czynienia z sytuacją $k_0 = 0$ lub $k_0 = 1$.

Aby ostro uwidocznić różnicę między oboma pojęciami, zapiszemy Definicje 7.1 i 7.2, używając kwantyfikatorów, potrzebnych do określenia granicy:

Zbieżność punktowa $f_n \rightarrow f$ na X : $\boxed{\forall x \in X} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) > 0 \forall n > n_0$
zachodzi warunek $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$ na X : $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) > 0 \boxed{\forall x \in X} \forall n > n_0$
zachodzi warunek $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Różnica polega na tym, że liczbę n_0 w pierwszym przypadku wybieramy, ustaliwszy wcześniej zarówno $x \in X$, jak i $\varepsilon > 0$. Dlatego n_0 może zależeć zarówno od ε , jak i od punktu $x \in X$. Natomiast w drugim przypadku najpierw ustalamy $\varepsilon > 0$, a potem wybieramy liczbę n_0 niezależną od $x \in X$, tak, aby warunek $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ zachodził dla wszystkich $n > n_0$ i wszystkich $x \in X$ jednocześnie.¹

Zacznijmy od standardowego przykładu, wskazującego, że różnica między obiema definicjami jest istotna.

Przykład 7.3. Niech $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ i niech $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f_n(x) = x^n$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Innymi słowy, ciąg f_n jest zbieżny punktowo na $[0, 1]$ do funkcji f . Nie jest to jednak zbieżność jednostajna: dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest

$$f_n(2^{-1/n}) - f(2^{-1/n}) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

a zatem warunek z definicji zbieżności jednostajnej z pewnością nie zachodzi dla żadnej liczby dodatniej $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Przykład 7.4. Jak poprzednio, niech $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Połóżmy

$$f(x) = \exp(x), \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Z Twierdzenia 4.52 wynika, że $f_n \rightarrow f$ na $[0, 1]$, tzn. dla każdego $x \in [0, 1]$ szereg $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$

¹Z podobnym rozróżnieniem spotkaliśmy się już, definiując ciągłość jednostajną.

jest zbieżny do $\exp(x)$. Mamy ponadto

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{2}{n!}. \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy oszacowanie *niezależne* od liczby $x \in [0, 1]$. Jeśli $\varepsilon > 0$, to biorąc $n_0 = [2/\varepsilon] + 1 > 2/\varepsilon$, otrzymujemy

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{2}{n!} < \frac{2}{n} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in [0, 1] \text{ i } n > n_0.$$

Dlatego tym razem $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$.

Zauważmy jeszcze, że do podobnego oszacowania można dojść, posługując się wzorem Taylora–MacLaurina z resztą Lagrange’a:

$$\exp(x) = f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{dla pewnego } c_n \in (0, x) \subset (0, 1),$$

a zatem, ponieważ w tym przykładzie $f^{(j)} \equiv f$ dla wszystkich j ,

$$f(x) = f_n(x) + r_n, \quad \text{gdzie} \quad |r_n| = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!},$$

Zadanie 7.5. Wykazać, że ciąg funkcji

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$$

jest zbieżny jednostajnie do $f(z) = \exp z$

(a) na każdym ograniczonym przedziale $[-M, M] \subset \mathbb{R}$;

(b) na każdym kole domkniętym $K_M = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq M \subset \mathbb{C}$.

To, że w poprzednim przykładzie, a także w ostatnim zadaniu, mamy do czynienia ze zbiorami *ograniczonymi*, jest rzeczą istotną.

Przykład 7.6. Na zbiorze $X = \mathbb{R}$ ciąg

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots$$

nie jest zbieżny jednostajnie do funkcji wykładniczej. Udowodnimy to przez zaprzeczenie.

Założmy przez chwilę, że dla $\varepsilon = 1 > 0$ istnieje n_0 takie, że $|f_n(x) - f(x)| < 1 = \varepsilon$ dla wszystkich $n > n_0$ i $x \in \mathbb{R}$. Ustalmy $n > n_0$. Dla $x > 0$ jest

$$|f(x) - f_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Wstawiając do tego oszacowania $x_n = ((n+1)!)^{1/(n+1)}$, otrzymujemy

$$|f(x_n) - f_n(x_n)| > \frac{x_n^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1,$$

to zaś jest sprzeczność, bo dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, a więc także dla $x = x_n$, powinna zgodnie z założeniem zachodzić nierówność przeciwna. Warunek z definicji jednostajnej zbieżności nie jest więc w tym przypadku spełniony. \square

Norma jednostajna. Interpretacja geometryczna zbieżności jednostajnej

Nietrudno zauważyć, że Definicja 7.2 jest równoważna następującej:

Ciąg $f_n \Rightarrow f$ na X wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczbowy

$$d_n \equiv d(f_n, f) := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$$

jest zbieżny do zera dla $n \rightarrow \infty$.

Wprowadza się czasem oznaczenie

$$\|g\|_{\infty, X} = \sup_{x \in X} |g(x)|$$

(indeks X opuszczamy, gdy wiadomo dobrze, o jaki zbiór chodzi). Liczbę $\|g\|_{\infty, X}$ nazywamy *normą jednostajną* funkcji g (na zbiorze X).² Przy takich oznaczeniach,

$$d_n \equiv d(f_n, f) = \|f_n - f\|_{\infty, X}.$$

Tę liczbę można traktować jak – abstrakcyjnie zdefiniowaną! – *odległość funkcji f_n i f* . Jeśli bowiem $Y = \mathbb{R}^X$ jest zbiorem wszystkich funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, to funkcja

$$Y \times Y \ni (f, g) \mapsto d(f, g) = \|f - g\|_{\infty, X} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

spełnia trzy naturalne warunki, które spełnia np. zwykła odległość punktów na płaszczyźnie czy w przestrzeni:

1. Dla wszystkich $f, g \in Y$ warunek $d(f, g) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f = g$;
2. Dla wszystkich $f, g \in Y$ jest $d(f, g) = d(g, f)$.
3. Dla wszystkich $f, g, h \in Y$ zachodzi *nierówność trójkąta*

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Pierwsze dwa warunki są oczywiste. Trzeci wynika z nierówności trójkąta w \mathbb{R} i definicji kresu górnego: dla każdego $x \in X$ jest

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{t \in X} |f(t) - h(t)| + \sup_{t \in X} |h(t) - g(t)| = d(f, h) + d(h, g); \end{aligned}$$

²Oczywiście $\|g\|_{\infty, X} < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy g jest funkcją ograniczoną.

biorąc teraz supremum lewej strony względem $x \in X$, otrzymujemy

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Mówi się krótko, że d jest *metryką* na zbiorze Y . Z ogólnym pojęciem *przestrzeni metrycznej* i *metryki* Czytelnik zapozna się bliżej na II roku studiów, na zajęciach z Topologii i z Analizy. Podkreślmy jednak już teraz dwie rzeczy:

1. Zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$ na X jest równoważna temu, że odległość

$$d(f_n, f) = \|f_n - f\|_{\infty, X} \rightarrow 0 \quad \text{dla } n \rightarrow \infty.$$

Traktujemy zatem funkcje *tak jak punkty* zbioru $Y = \mathbb{R}^X$; zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$ to zbieżność (odpowiednio określonej) odległości *punktów* f_n i f w zbiorze $Y = \mathbb{R}^X$ do zera.

2. Warunek

$$d(f, g) = \|f - g\|_{\infty, X} = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$$

jest oczywiście równoważny następującemu:

$$f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in X.$$

Oznacza to, że $d(f, g) \leq \varepsilon$, gdy wykres g zawiera się w krzywoliniowym pasku o wysokości 2ε , narysowanym wokół wykresu funkcji f (patrz rysunek).

Ciągłość granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyjnego

Zakończymy ten wstępny podrozdział prostym, ale ważnym twierdzeniem, które wyjaśnia jeden z powodów wprowadzenia pojęcia jednostajnej zbieżności ciągów funkcyjnych.

Twierdzenie 7.7. *Załóżmy, że $P \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym przedziałem. Niech $f_n: P \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi na P . Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ na P , to f jest ciągła na P .*

Dowód. Ustalmy $x \in P$ oraz dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, a także liczbę $\eta > 0$, którą dobierzemy do ε pod koniec dowodu. Wskażemy liczbę $\delta > 0$ taką, że

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{dla } y \in P, |y - x| < \delta. \quad (7.1)$$

(Na mocy Stwierdzenia 5.27, wyniknie stąd ciągłość f w punkcie $x \in P$.)

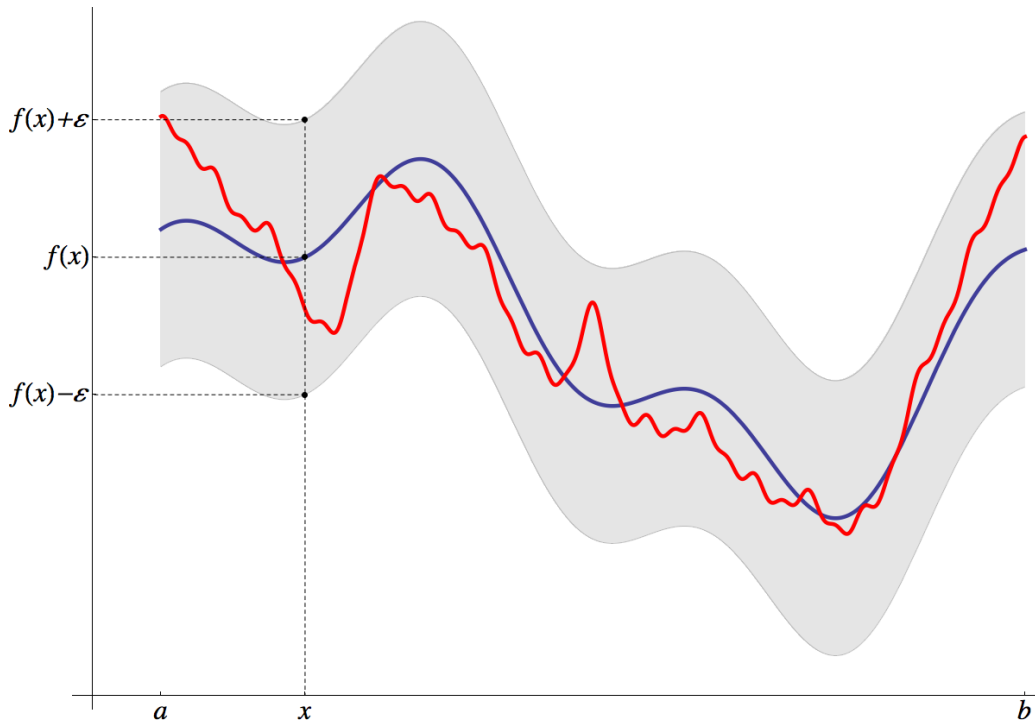
Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|f_n(t) - f(t)| < \eta$ dla wszystkich $t \in P$. Ustalmy jakąkolwiek liczbę $n > n_0$. Z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \eta + |f_n(x) - f_n(y)| + \eta = 2\eta + |f_n(x) - f_n(y)|. \end{aligned}$$

Funkcja f_n jest ciągła w $x \in P$. Istnieje zatem liczba $\delta > 0$ taka, że $|f_n(x) - f_n(y)| < \eta$ dla wszystkich $y \in P$, spełniających nierówność $|x - y| < \delta$. Dlatego

$$|f(x) - f(y)| < 2\eta + |f_n(x) - f_n(y)| < 3\eta.$$

dla $y \in P$ takich, że $|y - x| < \delta$. Wybierając $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$, otrzymujemy warunek (7.1) i kończymy dowód. \square



Warunek $d(f, g) = \|f - g\|_\infty < \varepsilon$ oznacza, że wykres g mieści się w “pasku o wysokości 2ε ” wokół wykresu f .

Uwaga 7.8. Udowodniliśmy w istocie nieco więcej: jeśli $f_n \rightrightarrows f$ na przedziale P i wszystkie funkcje f_n są ciągłe w $x_0 \in P$, to f jest ciągła w x_0 .

Uwaga 7.9. Omówiony wcześniej przykład ciągu $f_n(x) = x^n$, zbieżnego na $[0, 1]$ punktowo (ale nie jednostajnie!) do funkcji $f = \chi_{[0,1]}$ nieciągłej w $x_0 = 1$ wskazuje, że założenie *jednostajnej* zbieżności jest w tym twierdzeniu istotne.

Uwaga 7.10. Może się zdarzyć, że ciąg funkcji $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest zbieżny punktowo (ale nie jednostajnie) do funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Oto przykład takiej sytuacji: $f(x) = 1$ jest funkcją stałą. Wybieramy $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłą i taką, że

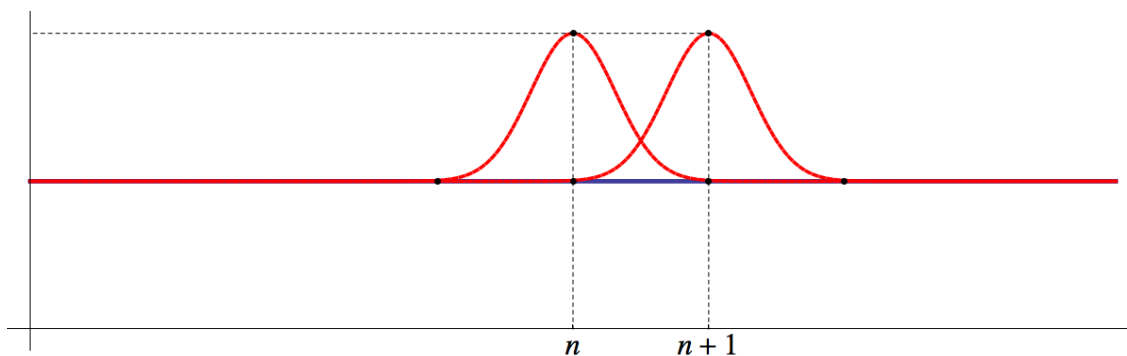
$$g(x) = 0 \quad \text{dla } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \quad g(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (-1, 1), \quad \sup g = 1.$$

Następnie, kładziemy $f_n(x) = 1 + g(x - n)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wykresy funkcji f_n wyglądają jak garby, przesuujące się w równym tempie w stronę $+\infty$ (patrz rysunek). Przy ustalonym $x \in \mathbb{R}$ mamy po prostu $f_n(x) = 1 = f(x)$ dla $n > x + 1$. Nietrudno sprawdzić, że w tej sytuacji oczywiście $f_n \rightarrow f$ na \mathbb{R} , ale $\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup g = 1$, czyli $f_n \not\rightrightarrows f$.

Uwaga 7.11. Tak samo definiuje się zbieżność jednostajną ciągów funkcji $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ (moduł oznacza wtedy wszędzie po prostu moduł liczby zespolonej). Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Jeśli ciąg funkcji ciągłych $f_n: C \subset X \rightarrow \mathbb{C}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, to f jest ciągła na X .

Dowód jest taki sam, jak w przypadku rzeczywistym.



“Wędrujący garb”: ciąg funkcji $g_n \rightarrow f$ punktowo, ale $d(g_n, f) = \|g_n - f\|_\infty = \text{const} > 0$ dla wszystkich n .

7.2 Najprostsze kryteria zbieżności jednostajnej

Stwierdzenie 7.12. Niech $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Następujące warunki są równoważne:

- (a) Ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie na X do pewnej funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$;
- (b) Ciąg (f_n) spełnia jednostajny warunek Cauchy’ego: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $m, n > n_0$ i wszystkich $x \in X$ zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Dowód. Całe rozumowanie polega na zastosowaniu warunku Cauchy’ego dla ciągów liczbowych (patrz Twierdzenie 2.37) i uważnej lekturze definicji. Oto szczegóły.

Część I. (a) \Rightarrow (b). Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$ na X , więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich $n > n_0$ i $x \in X$. Zatem, dla wszystkich $m, n > n_0$ i wszystkich $x \in X$ otrzymujemy z nierówności trójkąta

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Część II. (b) \Rightarrow (a). Załóżmy, że (f_n) spełnia jednostajny warunek Cauchy’ego b. Wtedy dla każdego $x \in X$ ciąg liczbowy $(f_n(x))_{n=1,2,\dots}$ spełnia warunek Cauchy’ego, a więc na mocy Twierdzenia 2.37 ma granicę w \mathbb{R} . Oznaczmy tę granicę $f(x)$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$ i zastosujmy (b) do liczby $\varepsilon/2$: istnieje takie n_0 (zależne tylko od ε !), że dla wszystkich $m, n > n_0$ i $x \in X$ jest $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ustalmy teraz liczbę n i przejdźmy do granicy $m \rightarrow \infty$. Ponieważ w granicy zachowują się nierówności nieostre, więc otrzymamy

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } n > n_0 \text{ i } x \in X.$$

Zatem istotnie $f_n \rightrightarrows f$ na X . \square

Stwierdzenie 7.13 (kryterium Weierstrassa). Niech $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Jeśli

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

a szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to wówczas szeregi funkcyjne

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

są zbieżne jednostajnie na X .

Uwaga terminologiczna. W takiej sytuacji mówimy, że szereg $\sum f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.

Dowód. Niech

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^m |f_n(x)|$$

oznacza m -tą sumę częściową szeregu $\sum |f_n|$. Z założenia $|f_n(x)| \leq a_n$, a więc gdy $m, k \in \mathbb{N}$ i $m > k$, to

$$|S_m(x) - S_k(x)| = S_m(x) - S_k(x) \leq a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_m \quad \text{dla wszystkich } x \in X.$$

Szereg liczbowy zbieżny $\sum a_n$ spełnia warunek Cauchy'ego dla szeregów, patrz Stwierdzenie 4.4. Zatem dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takie, że

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_m = |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_m| < \varepsilon$$

dla wszystkich $m > k > n_0$. Stąd

$$|S_m(x) - S_k(x)| \leq a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_m < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in X \text{ i } m > k > n_0.$$

Ciąg funkcyjny (S_m) spełnia więc *jednostajny warunek Cauchy'ego na X* , tzn. na mocy poprzedniego stwierdzenia jest jednostajnie zbieżny. Z definicji, oznacza to zbieżność jednostajną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ na zbiorze X .

Dowód jednostajnej zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest analogiczny. Trzeba tylko zauważyć, że dla $m > k$ jest

$$\left| \sum_{n=1}^m f_n(x) - \sum_{n=1}^k f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=k+1}^m f_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^m |f_n(x)| \leq a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_m.$$

Łatwo stąd (podobnie, jak w pierwszej części dowodu) wywnioskować, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum f_n$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego na X . \square

Uwaga 7.14. Oba stwierdzenia przenoszą się bez zmian na przypadek funkcji o wartościach zespolonych.

7.3 Twierdzenia Weierstrassa i Diniego

Oznaczenia. Niech $P \subset \mathbb{R}$. W dalszym ciągu symbolem $C(P)$ będziemy oznaczali zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f: P \rightarrow \mathbb{R}$.

Udowodnimy teraz fundamentalne twierdzenie, które ma liczne zastosowania w Analizie Matematycznej. Niektóre z nich poznamy wkrótce.

Twierdzenie 7.15 (Weierstrass). *Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$ i $f \in C([a, b])$, to istnieje ciąg wielomianów P_n o współczynnikach rzeczywistych taki, że $P_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.*

Zauważmy najpierw, że wystarczy udowodnić twierdzenie w szczególnym przypadku: dla $a = 0$ i $b = 1$. Dla innych przedziałów uzyskamy wtedy tezę, składając odpowiednie funkcje z funkcjami liniowymi

$$[0, 1] \ni t \mapsto x = a + t(b - a) \in [a, b].$$

Istotnie, przypuśćmy, że dla dowolnej $f \in C([0, 1])$ istnieją wielomiany P_n takie, że $P_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$. Dla ustalonej $g \in C([a, b])$ niech $f(t) = g(a + t(b - a))$, gdzie $t \in [0, 1]$; f jest funkcją ciągłą na $[0, 1]$. Wybierzmy ciąg wielomianów $P_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ i połóżmy

$$Q_n(x) := P_n\left(\frac{x - a}{b - a}\right) \quad \text{dla } x \in [a, b].$$

Wtedy Q_n są wielomianami i $Q_n \rightrightarrows g$ na $[a, b]$, gdyż $\|Q_n - g\|_{\infty, [a, b]} = \|P_n - f\|_{\infty, [0, 1]}$.

Dlatego ograniczymy się do dowodu następującego twierdzenia.

Twierdzenie 7.16 (S.N. Bernstein). *Niech $f \in C([0, 1])$. Połóżmy*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Wówczas $B_n(f) \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$.

Uwaga terminologiczna. Wielomian $B_n(f)$ nazywa się *n -tym wielomianem Bernsteina funkcji f* .

Dowód. Najpierw udowodnimy trzy pomocnicze fakty:

- (a) Jeśli $f_1(x) \equiv 1$ na $[0, 1]$, to $B_n(f_1) \equiv 1$ na $[0, 1]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Jeśli $f_2(x) = x$ na $[0, 1]$, to $B_n(f_2)(x) = x$ na $[0, 1]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Jeśli $f_3(x) = x^2$ na $[0, 1]$, to $B_n(f_3)(x) = x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n}$ na $[0, 1]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Własność (a) wynika natychmiast z dwumianu Newtona. Istotnie, jeśli $f_1 \equiv 1$, to

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1^n = 1.$$

Dla dowodu (b) zauważmy, że $\frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$ dla $k \geq 1$ (a dla $k = 0$ lewa strona jest zerem). Dlatego dla funkcji $f_2(x) = x$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} B_n(f_2)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x. \end{aligned}$$

(Przechodząc do trzeciej linijki, podstawiliśmy $j = k - 1$). Aby sprawdzić (c), piszemy

$$\frac{k^2}{n^2} = \frac{k^2 - k}{n^2} + \frac{k}{n^2} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

i rachujemy

$$\begin{aligned} B_n(f_3)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} \cdot x^2 \cdot (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} B_n(f_2)(x) \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j \cdot (1-x)^{n-2-j}}_{= 1, \text{ z dwumianu Newtona}} + \frac{x}{n} = x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n}. \end{aligned}$$

Teraz przejdziemy do zasadniczej części dowodu. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest *jednostajnie ciągła* na $[0, 1]$, więc istnieje $\delta > 0$ takie, że $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \frac{\varepsilon}{2}$, gdy $|x - \frac{k}{n}| < \delta$. Różnicę między f i jej n -tym wielomianem Bernsteina szacujemy następująco:

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \quad (7.2) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =: S_1(n) + S_2(n), \end{aligned}$$

gdzie

$$S_i(n) = \sum_{k \in A_i} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad i = 1, 2,$$

dla

$$A_1 = \left\{ k = 0, 1, \dots, n : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta \right\} \quad \text{oraz} \quad A_2 = \left\{ k = 0, 1, \dots, n : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta \right\}.$$

(po prostu dzielimy całą sumę na dwie inne, odpowiednio dobrane). Oszacowanie sumy $S_1(n)$ jest łatwe: gdy $\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta$, to $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \frac{\varepsilon}{2}$ i dlatego

$$S_1(n) \leq \sum_{k \in A_1} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \stackrel{(a)}{=} \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.3)$$

Kluczowy krok to szacowanie sumy S_2 . Niech $M = \sup_{[0,1]} |f|$. Zauważmy, że

$$\delta \leq \left| x - \frac{k}{n} \right|, \quad \text{stąd zaś} \quad 1 \leq \left(\frac{k - nx}{n\delta} \right)^2 \quad \text{dla } k \in A_2.$$

Ponadto, oczywiście $|f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq |f(x)| + |f(\frac{k}{n})| \leq 2M = 2 \sup |f|$. Dlatego

$$\begin{aligned} S_2(n) &\leq 2M \sum_{k \in A_2} \left(\frac{k - nx}{n\delta} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k^2}{n^2} - 2x \frac{k}{n} + x^2 \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = S_3(n) \end{aligned}$$

(zwiększamy zakres sumowania z $k \in A_2$ do wszystkich $0 \leq k \leq n$). Ostatnią sumę można łatwo wyrazić przez wielomiany Bernsteina funkcji $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ i $f_3(x) = x^2$, a następnie obliczyć, korzystając z pomocniczych faktów (a)–(c); prowadzi to do oszacowania

$$\begin{aligned} S_2(n) \leq S_3(n) &= \frac{2M}{\delta^2} \left(B_n(f_3)(x) - 2x \cdot B_n(f_2)(x) + x^2 B_n(f_1)(x) \right) \\ &= \frac{2M}{\delta^2} \left(x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n} - 2x^2 + x^2 \right) \\ &= \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{M}{2n\delta^2}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

gdyż $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ na \mathbb{R} .

Wstawiając oszacowania (7.3) i (7.4) do (7.2), otrzymujemy

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in [0, 1]$$

i dla $n > n_0 := \lceil M/(\varepsilon\delta^2) \rceil + 1$. To kończy dowód. \square

Jedno z zastosowań twierdzenia Weierstrassa zobaczymy nieco później w tym rozdziale, w dowodzie twierdzenia, orzekającego, że każda funkcja ciągła $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ na przedziale $P \subset \mathbb{R}$ jest pochodną pewnej funkcji $F: P \rightarrow \mathbb{R}$. Jest to jeden z podstawowych faktów, wykorzystywanych w rachunku całkowym.

Podamy teraz dwa niezbyt trudne twierdzenia, ilustrujące związek zbieżności jednostajnej z monotonicznością.

Twierdzenie 7.17 (pierwsze twierdzenie Dini'ego). *Przypuśćmy, że funkcje $f, f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $K \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym, są ciągłe. Jeśli $f_n \rightarrow f$ punktowo na K , a ponadto*

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \leq f_n \leq \dots \quad \text{na } K,$$

to wówczas $f_n \rightrightarrows f$ na K

Dowód. Przypuśćmy, że zbieżność $f_n \rightarrow f$ nie jest jednostajna. Istnieje wtedy $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ znajdziemy $m > n$ i punkt $x_m \in K$, dla których

$$|f(x_m) - f_m(x_m)| = f(x_m) - f(x_m) \geq \varepsilon > 0. \quad (7.5)$$

Opuszczając moduł, skorzystaliśmy z założenia o monotoniczności ciągu (f_m) .

Zbiór K jest zwarty, więc ciąg (x_m) ma podciąg zbieżny do pewnego $x \in K$. Przechodząc do tego podciągu, możemy bez zmniejszenia ogólności rozważań założyć, że po prostu $x_m \rightarrow x$ dla $m \rightarrow \infty$. Weźmy teraz dowolne $k \in \mathbb{N}$. Dla $m > k$ zachodzą nierówności

$$f_k(x_m) \leq f_m(x_m) \stackrel{(7.5)}{\leq} f(x_m) - \varepsilon$$

i dlatego, dzięki ciągłości f ,

$$f_k(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_k(x_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) - \varepsilon = f(x) - \varepsilon.$$

To jednak przeczy punktowej zbieżności $f_k \rightarrow f$: granica ciągu liczbowego $(f_k(x))$ powinna być równa $f(x)$. \square

Twierdzenie 7.18 (drugie twierdzenie Dini'ego). *Jeśli funkcje $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są niemalejące i ciąg (f_n) jest punktowo zbieżny na $[a, b]$ do funkcji ciągłej f , to wówczas $f_n \rightrightarrows f$.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ i $\eta > 0$. Ponieważ na mocy Twierdzenia 5.57 f jest jednostajnie ciągła na $[a, b]$, więc istnieje $\delta > 0$ takie, że $|f(x) - f(y)| < \eta$, gdy $|x - y| < \delta$. Podzielmy $[a, b]$ na N przedziałów o równych długościach $\frac{b-a}{N} < \delta$. Niech x_0, x_1, \dots, x_N oznaczają końce tych przedziałów. Wybierzmy teraz n_0 tak, aby

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| < \eta \quad \text{dla wszystkich } n > n_0 \text{ i } k = 0, 1, \dots, N. \quad (7.6)$$

Niech $x \in [a, b]$. Wtedy $x \in [x_k, x_{k+1}]$ dla pewnego $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Funkcja f jest niemalejąca jako ciągu granica funkcji niemalejących, więc dzięki (7.6) otrzymujemy dla $n > n_0$ nierówności

$$\underbrace{f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_{k+1})}_{\text{monotoniczność } f}, \quad f(x_k) - \eta \stackrel{(7.6)}{<} \underbrace{f_n(x_k) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{k+1})}_{\text{monotoniczność } f_n} \stackrel{(7.6)}{<} f(x_{k+1}) + \eta.$$

Stąd już wynika, że zarówno $f(x)$, jak i $f_n(x)$, należą do przedziału I o końcach $f(x_k) - \eta$ i $f(x_{k+1}) + \eta$. Odstęp między punktami x_k są mniejsze od δ , więc dzięki doborowi δ do η długość przedziału I jest mniejsza od 3η . Biorąc teraz $\eta = \varepsilon/3$ otrzymujemy

$$|f(x) - f_n(x)| < 3\eta = \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in [a, b] \text{ i } n > n_0,$$

co kończy dowód. \square

Zauważmy, że w dowodzie *nie było potrzebne* założenie o ciągłości f_n . Istotna jest oczywiście ciągłość funkcji f oraz monotoniczność wszystkich rozpatrywanych funkcji.

7.4 Twierdzenie o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych

Udowodnimy teraz ważne twierdzenie, które w wielu sytuacjach pozwala wnioskować, że funkcja, określona jako granica ciągu (lub suma szeregu) funkcyjnego, ma pochodną.

7.4.1 Przypadek rzeczywisty

Twierdzenie 7.19. *Załóżmy, że $f_n: \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $n = 1, 2, \dots$, są różniczkowalne. Jeśli ciąg $f'_n \rightrightarrows g$ na $[a, b]$, a ponadto istnieje taki punkt $x_0 \in [a, b]$, że ciąg $(f_n(x_0))$ jest zbieżny, to wówczas:*

- (a) Ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$;
- (b) Funkcja f jest różniczkowalna na $[a, b]$ i $f' = g$.

Dowód. Najpierw sprawdzimy, że ciąg (f_n) spełnia na przedziale $[a, b]$ jednostajny warunek Cauchy'ego.

Lemat 7.20. Niech $\Delta_{n,m} = f_n - f_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Załóżmy, że spełnione są założenia Twierdzenia 7.19. Wówczas dla każdej liczby $\eta > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n, m > n_0$ i wszystkich $x, y \in [a, b]$ zachodzi nierówność

$$|\Delta_{n,m}(x) - \Delta_{n,m}(y)| < \eta|x - y|.$$

Dowód LEMATU 7.20. Ustalmy $\eta > 0$. Funkcja $\Delta_{n,m}$ jest różniczkowalna na $[a, b]$ i $\Delta'_{n,m} = f'_n - f'_m$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że

$$|\Delta_{n,m}(x) - \Delta_{n,m}(y)| = |f'_n(\theta_{x,y}) - f'_m(\theta_{x,y})| \cdot |x - y| \quad \text{dla pewnego } \theta_{x,y} \in (x, y)$$

(zakładamy bez zmiany ogólności, że $x < y$). Jednak ciąg (f'_n) jest jednostajnie zbieżny, a więc na mocy Stwierdzenia 7.12 istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \eta \quad \text{dla wszystkich } t \in [a, b] \text{ i } m, n > n_0.$$

Wstawiając to oszacowanie do poprzedniego, kończymy dowód lematu. \square

Przejdźmy teraz do zasadniczej części dowodu twierdzenia.

Krok 1. Zbieżność ciągu (f_n) . Niech $\varepsilon > 0$ i $\eta = \varepsilon/2(b - a)$. Dobierzmy do η liczbę n_0 z Lematu 7.20. Z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| \\ &= |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |\Delta_{n,m}(x) - \Delta_{n,m}(x_0)| \\ &< |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \\ &\leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Pierwszy składnik jest niegroźny: ciąg $(f_n(x_0))$ jest zbieżny, a zatem istnieje n_1 takie, że $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich $m, n > n_1$. Dlatego dla $m, n > \max(n_0, n_1)$ i dla wszystkich $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

co oznacza, że ciąg (f_n) spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, a więc na mocy Stwierdzenia 7.12 jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, która oczywiście jest ciągła (patrz Twierdzenie C^0 – granica).

Krok 2. Różniczkowalność funkcji f . Wykażemy, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x) \quad \text{dla } x \in [a, b].$$

Ustalmy w tym celu $x \in [a, b]$ i liczby $\eta, \varepsilon > 0$; znajdziemy $\delta > 0$ takie, że

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| < \varepsilon \quad \text{dla } |h| < \delta. \quad (7.7)$$

Przekształcimy prawą stronę nierówności (7.7), próbując przybliżyć f przez f_n i g przez f'_n . Mamy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| \\ &= \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f_n(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x+h) - f_n(x+h) - (f(x) - f_n(x))}{h} \right| + \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right| \\ &=: A + B. \end{aligned}$$

Każdy ze składników oszacujemy osobno.

Oszacowanie składnika A. Z Lematu 7.20 wynika, że dla $m, n > n_0 = n_0(\eta)$ jest

$$|f_m(x+h) - f_n(x+h) - (f_m(x) - f_n(x))| = |\Delta_{m,n}(x+h) - \Delta_{n,m}(x)| < \eta|h|.$$

Ponieważ $f_m(t) \rightarrow f(t)$ dla każdego $t \in [a, b]$, więc przechodząc do granicy $m \rightarrow \infty$, a następnie dzieląc obie strony przez $|h|$ otrzymujemy

$$A = \left| \frac{f(x+h) - f_n(x+h) - (f(x) - f_n(x))}{h} \right| \leq \eta$$

dla wszystkich $|h| > 0$ i $n > n_0$.

Oszacowanie składnika B. Z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} B &= \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right| = \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) + f'_n(x) - g(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right| + |f'_n(x) - g(x)| < \eta + \eta = 2\eta, \end{aligned}$$

o ile n jest ustalone i dostatecznie duże, a $|h|$ dostatecznie małe. Aby się o tym przekonać, ustalmy najpierw liczbę $n > n_0$ tak, aby $|f'_n(x) - g(x)| < \eta$ dla wszystkich $x \in [a, b]$; możemy to zrobić, gdyż $f'_n \rightrightarrows g$. Następnie, korzystając z różniczkowalności f_n w punkcie x , wybierzmy $\delta > 0$ takie, by

$$\left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right| < \eta \quad \text{dla } |h| < \delta.$$

Wtedy istotnie $B < 2\eta$.

Ostatecznie, kładąc $\eta = \varepsilon/3$ i używając obu oszacowań, otrzymujemy dla $0 < |h| < \delta$ nierówność

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| \leq A + B < \eta + 2\eta = 3\eta = \varepsilon.$$

Zachodzi więc warunek (7.7). To kończy dowód całego twierdzenia. \square

Oczywiście, odpowiednik tego twierdzenia zachodzi dla szeregów funkcyjnych: to tylko kwestia zmiany języka.

Wniosek 7.21. Załóżmy, że $f_n: \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $n = 1, 2, \dots$, są różniczkowalne. Jeśli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$ do funkcji g , a ponadto istnieje taki punkt $x_0 \in [a, b]$, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ jest zbieżny, to wówczas:

(a) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$;

(b) Funkcja f jest różniczkowalna na $[a, b]$ i $f' = g$.

Przykład 7.22. Niech $g(x) = 1/(1-x)$, gdzie $|x| \leq q < 1$. Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego,

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Powyższy szereg jest na przedziale $[-q, q]$ zbieżny jednostajnie. To wynika z kryterium Weierstrassa (patrz Stwierdzenie 7.13), gdyż $|x^n| \leq q^n$ na $[-q, q]$, a $\sum q^n$ jest zbieżnym szeregiem liczb dodatnich.

Położmy $f_n(x) = x^{n+1}/(n+1)$, $n = 0, 1, \dots$, $x \in [-q, q]$. Wtedy $f'_n(x) = x^n$. Stwierdziłiśmy już, że szereg $\sum f'_n = \sum x^n$ jest na $[-q, q]$ zbieżny jednostajnie. Szereg $\sum f_n$ jest zbieżny (co najmniej) w jednym punkcie: dla $x_0 = 0$ wszystkie składniki są zerami. Dlatego, na mocy Wniosku 7.21,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{dla wszystkich } |x| \leq q.$$

Innymi słowy, nieskończoną sumę $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ wolno na tym przedziale różniczkować tak samo, jak sumę skończoną: pochodna sumy jest sumą pochodnych. Należy jednak pamiętać, że **bez założenia zbieżności jednostajnej szeregu pochodnych** to nie musi być prawdą! Przykład takiej sytuacji zobaczymy w następnym podrozdziale.

Zauważmy jeszcze, że funkcje $f(x) = \sum f_n(x) = \sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ oraz $\varphi(x) = -\ln(1-x)$ mają na przedziale $[-q, q]$ tę samą pochodną, równą $1/(1-x)$. Dlatego $(f - \varphi)' = 0$ na $[-q, q]$, więc $f - \varphi = \text{const} = f(0) - \varphi(0) = 0 - 0 = 0$. Ostatecznie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \quad \text{dla wszystkich } |x| < 1,$$

gdź całe rozumowanie można przeprowadzić, używając dowolnej liczby $q < 1$. \square

Przykład 7.23. Niech $f_n(x) = n^{-1} \arctg(x/n)$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$. Dla $x_0 = 0$ mamy $f_n(x_0) = 0$ dla każdego n , więc szereg funkcyjny $\sum f_n$ jest zbieżny w x_0 . Pochodna f'_n spełnia nierówność

$$0 < f'_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(x/n)^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ponieważ szereg liczbowy $\sum 1/n^2$ jest zbieżny, więc z kryterium Weierstrassa wynika, że szereg $\sum f'_n$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dlatego szereg

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctg \frac{x}{n}$$

jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[a, b] \in \mathbb{R}$ i dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

Uwaga 7.24. Jeśli ciąg (lub szereg) funkcyjny jest zbieżny jednostajnie na wszystkich zwartych podzbiórach pewnego ustalonego podzbioru $P \subset \mathbb{R}$ (bądź $P \subset \mathbb{C}$), to mówimy, że jest *zbieżny niemal jednostajnie na P* . W ostatnim przykładzie mieliśmy do czynienia właśnie z taką sytuacją.

7.4.2 Przypadek zespolony

Uważny Czytelnik spostrzeżł być może, że w dowodzie Twierdzenia 7.19 posłużyliśmy się twierdzeniem Lagrange’a o wartości średniej, *które nie zachodzi dla funkcji o wartościach zespolonych*, patrz Przykład 6.41. Dlatego zespolona wersja twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych wymaga nieco innego dowodu, który pokrótce naszkicujemy.

Ustalmy najpierw terminologię.

Definicja 7.25. Zbiór $Z \subset \mathbb{C}$ nazywa się *domknięty* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu zbieżnego $(z_n) \subset Z$ jest $z = \lim z_n \in Z$.

Przykład: koło domknięte $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ jest zbiorem domkniętym (nierówności nieostre zachowują się po przejściu granicznym), a koło otwarte $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ nie jest zbiorem domkniętym (nierówności ostre mogą po przejściu granicznym zmienić się w nieostre).

Definicja 7.26. Zbiór $Z \subset \mathbb{C}$ nazywa się *ograniczony* wtedy i tylko wtedy, gdy Z zawiera się w pewnym kole.

Twierdzenie 7.27. Załóżmy, że W jest domkniętym, wypukłym i ograniczonym podzbiorem \mathbb{C} , a funkcje $f_n : \mathbb{C} \supset W \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $n = 1, 2, \dots$, są różniczkowalne (w sensie zespolonym). Jeśli ciąg $f'_n \Rightarrow g$ na W , a ponadto istnieje taki punkt $z_0 \in W$, że ciąg $(f_n(z_0))$ jest zbieżny, to wówczas:

(a) Ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej $f : W \rightarrow \mathbb{C}$;

(b) Funkcja f jest różniczkowalna na W i $f' = g$.

Szkic dowodu. Jedynym miejscem w dowodzie Twierdzenia 7.19, gdzie skorzystaliśmy z faktu, że mamy do czynienia z funkcjami zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych, był Lemat 7.20 (w jego dowodzie skorzystaliśmy z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej). Podamy “zespolony” odpowiednik tego fragmentu rozumowania. Sformułowanie zespolonej wersji twierdzenia o wartości średniej poprzedzimy technicznym lematem.

Lemat 7.28. Niech $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągłe na $[0, 1]$ i różniczkowalne w $(0, 1)$. Jeśli $a > 1$, to funkcja

$$\Phi_a(t) = (\varphi^2(t) + \psi^2(t))^{a/2}$$

jest różniczkowalna w $(0, 1)$ i zachodzi nierówność

$$|\Phi'_a(t)| \leq a (\varphi^2(t) + \psi^2(t))^{(a-1)/2} \cdot \left((\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \right)^{1/2}.$$

Dowód. Przypadek 1. Jeśli $\varphi^2(t) + \psi^2(t) > 0$, to różniczkowalność Φ_a w punkcie t wynika z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej. Ponieważ

$$|\varphi\varphi' + \psi\psi'| \leq (\varphi^2 + \psi^2)^{1/2} ((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{1/2}$$

z nierówności Schwarza, więc mamy w takim punkcie

$$\begin{aligned} |\Phi'_a| &= \frac{a}{2} (\varphi^2 + \psi^2)^{\frac{a}{2}-1} \cdot 2|\varphi\varphi' + \psi\psi'| \\ &\leq a (\varphi^2 + \psi^2)^{\frac{a}{2}-1} (\varphi^2 + \psi^2)^{1/2} ((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{1/2} \\ &= a (\varphi^2 + \psi^2)^{(a-1)/2} \cdot ((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

To jest szukana nierówność.

Przypadek 2. Jeśli $\varphi^2(t) + \psi^2(t) = 0$, to $\Phi'_a(t) = 0$. Wykażemy to, posługując się definicją pochodnej. W takim punkcie t jest $\Phi_a(t) = 0$, a ponadto

$$(\varphi^2 + \psi^2)^{1/2} \leq |\varphi| + |\psi|,$$

więc dla wszystkich dostatecznie małych h zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi_a(t+h) - \Phi_a(t)}{h} \right| &= \left| \frac{\Phi_a(t+h)}{h} \right| \\ &\leq \frac{|\varphi(t+h)| + |\psi(t+h)|}{|h|} \cdot (\varphi^2(t+h) + \psi^2(t+h))^{(a-1)/2} \\ &\leq (|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| + 2) \cdot (\varphi^2(t+h) + \psi^2(t+h))^{(a-1)/2}. \end{aligned}$$

Pisząc ostatnią linijkę, skorzystaliśmy z nierówności $|\varphi(t+h)|/|h| < |\varphi'(t)| + 1$, która zachodzi dla wszystkich małych $|h|$, oraz z analogicznej nierówności dla ψ . Przechodząc do granicy $h \rightarrow 0$, otrzymujemy $\Phi'_a(t) = 0$, gdyż czynnik

$$(\varphi^2(t+h) + \psi^2(t+h))^{(a-1)/2} \rightarrow 0,$$

bowiem $\varphi^2(t+h) + \psi^2(t+h) \rightarrow \varphi^2(t) + \psi^2(t) = 0$ dla $h \rightarrow 0$, a mamy $a > 1$. \square

Uwaga: w ostatnim kroku jest istotne, że $a > 1$!

Wniosek 7.29. Niech $\varphi, \psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągłe na $[0, 1]$ i różniczkowalne w $(0, 1)$. Jeśli $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ oraz $h(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ dla $t \in [0, 1]$, to wówczas

$$|h(1)| \leq \sup_{t \in (0,1)} |h'(t)|.$$

Dowód. Przyjmijmy takie oznaczenia, jak w poprzednim lemacie. Ponieważ $\psi(0) = \varphi(0) = 0$, więc

$$|h(1)|^a = |\Phi_a(1)| = |\Phi_a(1) - \Phi_a(0)| = |\Phi'_a(c)|$$

dla pewnego $c \in (0, 1)$. Wiemy jednak, że

$$\begin{aligned} |\Phi'_a(c)| &\leq a (\varphi^2(c) + \psi^2(c))^{(a-1)/2} \cdot ((\varphi'(c))^2 + (\psi'(c))^2)^{1/2} \\ &\leq a \cdot \left(\sup_{t \in [0,1]} |h(t)| \right)^{(a-1)/2} \cdot \sup_{t \in (0,1)} |h'(t)|. \end{aligned}$$

Dlatego

$$|h(1)|^a \leq a \cdot \left(\sup_{t \in [0,1]} |h(t)| \right)^{(a-1)/2} \cdot \sup_{t \in (0,1)} |h'(t)|;$$

przechodząc do granicy $a \rightarrow 1^+$, otrzymujemy tezę wniosku. \square

Wniosek 7.30 (twierdzenie o wartości średniej, wariant zespolony). *Założmy, że $W \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem wypukłym, a $H: W \rightarrow \mathbb{C}$ funkcją różniczkowalną na W . Wówczas dla wszystkich punktów $z, w \in W$ zachodzi nierówność*

$$|H(z) - H(w)| \leq |z - w| \cdot \sup_{\zeta \in W} |H'(\zeta)|.$$

Dowód. Gdy $w = z$, nierówność jest banalna: $0 \leq 0$. Założmy, że $z \neq w$. Połóżmy

$$h(t) = H(w + t(z - w)) - H(w) \quad \text{dla } t \in [0, 1], \quad \varphi = \operatorname{Re} h, \quad \psi = \operatorname{Im} h.$$

Wtedy φ, ψ i h spełniają wszystkie założenia poprzedniego wniosku. Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} |H(z) - H(w)| = |h(1)| &\leq \sup_{t \in (0,1)} |h'(t)| = \sup_{t \in (0,1)} |H'(w + t(z - w))| \cdot |z - w| \\ &\leq |z - w| \sup_{\zeta \in W} |H'(\zeta)|, \end{aligned}$$

gdyż $I = \{z + t(w - z) : t \in [0, 1]\} \subset W$. \square

Wniosek 7.31. *Założmy, że spełnione są założenia Twierdzenia 7.27. Niech $\Delta_{n,m} = f_n - f_m: W \rightarrow \mathbb{C}$. Wówczas dla każdej liczby $\eta > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n, m > n_0$ i wszystkich $z, w \in W$ zachodzi nierówność*

$$|\Delta_{n,m}(z) - \Delta_{n,m}(w)| < \eta |z - w|.$$

Dowód WNIOSKU 7.31 (szkic). Stosujemy poprzedni wniosek do funkcji $H = \Delta_{n,m}$. Wtedy $H' = \Delta'_{n,m} = f'_n - f'_m$. Otrzymujemy

$$|\Delta_{n,m}(z) - \Delta_{n,m}(w)| \leq |z - w| \cdot \sup_{\zeta \in W} |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)|.$$

Ponieważ ciąg (f'_n) jest jednostajnie zbieżny na W , więc dla ustalonego η , posługując się jednostajnym warunkiem Cauchy'ego, znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sup_{\zeta \in W} |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)| < \eta \quad \text{dla wszystkich } m, n > n_0.$$

To kończy dowód wniosku. \square

Dalszy ciąg dowodu twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych w przypadku zespolonym jest, począwszy od tego miejsca, taki sam, jak w przypadku rzeczywistym. Czytelnik, zainteresowany rozumieniem teorii, zechce samodzielnie sprawdzić wszystkie szczegóły.

7.4.3 Istnienie funkcji pierwotnej

Udowodnimy teraz zapowiedziane wcześniej twierdzenie: każda funkcja ciągła jest pochodną pewnej funkcji. Najpierw wprowadzimy tradycyjną terminologię.

Definicja 7.32. Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, a $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ dowolną funkcją. Funkcja różniczkowalna $F: P \rightarrow \mathbb{R}$ nazywa się *funkcją pierwotną* f wtedy i tylko wtedy, gdy $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in P$.

Stwierdzenie 7.33. *Jeśli $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, a $F_1, F_2: P \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, to wówczas $F_1 - F_2$ jest funkcją stałą na P .*

Dowód. Wprost z definicji wynika, że $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$. Zatem, na mocy Wniosku 6.43, funkcja $F_1 - F_2$ jest stała na P . \square

Twierdzenie 7.34. *Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie (dowolnym) przedziałem. Każda funkcja ciągła $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną.*

Dowód. Przedstawmy przedział P jako sumę wstępującego ciągu przedziałów domkniętych $[a_k, b_k]$, tzn. niech

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k], \quad \text{gdzie} \quad a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots, \quad b_1 \leq b_2 \leq b_3 \dots$$

Bez zmniejszenia ogólności założymy, że 0 jest punktem wspólnym wszystkich przedziałów $[a_k, b_k]$. Z Twierdzenia 7.15 wynika, że istnieje ciąg wielomianów $P_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taki, że

$$\sup_{x \in [a_k, b_k]} |P_k(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.8)$$

Dla każdego k znajdziemy wielomian Q_k taki, że $Q_k'(x) = P_k(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $Q_k(0) = 0$. Istotnie, jeśli $P_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, to podane warunki spełnia

$$Q_k(x) = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^n}{n}.$$

Ustalmy teraz k . Zauważmy, że ciąg liczbowy $(Q_n(0))_{n \geq k}$ jest zbieżny (bo składa się z samych zer), natomiast wobec (7.8) ciąg $(P_n)_{n \geq k}$, tzn. ciąg pochodnych wielomianów Q_n , jest zbieżny jednostajnie do f na $[a_k, b_k]$. Spełnione są więc założenia Twierdzenia 7.19; wynika żeń, że ciąg $(Q_n)_{n \geq k}$ jest zbieżny jednostajnie na $[a_k, b_k]$ do funkcji $F_k: [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $F_k' = f$ na $[a_k, b_k]$ i $F_k(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(0) = 0$.

Zauważmy, że dla $m > k$ uzyskane w ten sposób funkcje F_m i F_k pokrywają się na $[a_m, b_m] \cap [a_k, b_k] = [a_k, b_k]$. Istotnie,

$$F_m'(x) - F_k'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{dla } x \in [a_k, b_k],$$

więc $F_m - F_k = \text{const}$, ale $F_m(0) = F_k(0) = 0$. Dlatego $F_m = F_k$ na $[a_k, b_k]$. Można więc określić funkcję $F: P = \bigcup [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$F(x) := F_k(x) \quad \text{dla } x \in [a_k, b_k].$$

Sprawdziliśmy, że prawa strona nie zależy od wyboru liczby k , a zatem definicja jest poprawna. Ponieważ dla wszystkich k jest $F_k' = f$ na $[a_k, b_k]$, więc $F' = f$. \square

7.4.4 Inne przykłady

Podamy teraz przykłady dwóch funkcji ciągłych. Każda z nich jest określona jako suma pewnego szeregu funkcyjnego. Jedna z nich nie ma pochodnej w żadnym punkcie, druga natomiast ma pochodne wszystkich rzędów.

Przykład 7.35 (van der Waerden; funkcja ciągła nigdzie nieróżniczkowalna).
Niech

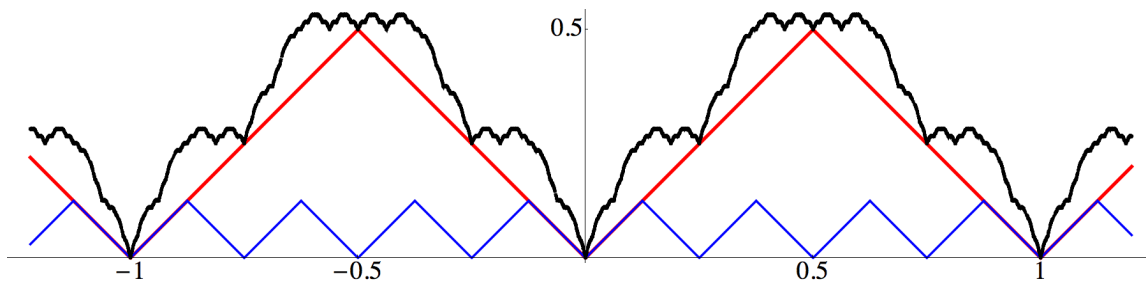
$$d(x) = \inf\{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Innymi słowy, $d(x)$ jest odległością x od najbliższej liczby całkowitej. Można sprawdzić, że $d(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ dla $x \in [0, 1]$ i d jest ciągłą, kawałkami liniową, funkcją okresową o okresie 1. Pochodna funkcji d istnieje w punktach $x \neq k/2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, i jest w nich równa ± 1 . Wykres funkcji d jest przedstawiony na rysunku. Mamy $\inf d = 0$, $\sup d = \frac{1}{2}$.

Położmy

$$d_n(x) = \frac{d(4^n x)}{4^n}, \quad W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ $|d_n(x)| = |4^{-n}d(4^n x)| \leq 4^{-n} \cdot \frac{1}{2}$, a szereg geometryczny $\sum 4^{-n}$ jest zbieżny, więc z kryterium Weierstrassa wynika, że szereg definiujący funkcję W jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny na \mathbb{R} . Dlatego $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.



Funkcje $d = d_0$ (środkowy zygzak), d_1 (drobniejszy, dolny zygzak) oraz $d_0 + d_1 + \dots + d_7$ (nieregularna, czarna krzywa). W żargonie Matematyki użyto definicji $d[x_] := \text{Abs}[x - \text{Round}[x]]$.

Wykażemy, że W nie ma skończonej pochodnej w żadnym punkcie. Ustalmy dowolne $x \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{N}$. Funkcja $4^{-m}d(4^m x)$ jest liniowa na przedziałach długości $4^{-m} \cdot \frac{1}{2}$; wybierzmy taki z nich, do którego należy punkt x . Dobierzmy teraz liczbę h_m tak, żeby spełnione były dwa warunki:

- $|h_m| = 4^{-m-1}$;
- W przedziale I o końcach x i $x + h_m$ funkcja $d_m(x) = 4^{-m}d(4^m x)$ jest liniowa.

Obliczymy teraz iloraz różnicowy $(W(x + h_m) - W(x))/h_m$.

Otóż, $d_m(x + h_m) - d_m(x) = \pm h_m$ dzięki doborowi h_m do x . Podobnie, dla wszystkich $n < m$ jest $d_n(x + h_m) - d_n(x) = \pm h_m$, gdyż dla $n < m$ funkcja d_n jest liniowa na przedziale I , na którym liniowa jest funkcja d_m . Dlatego

$$\frac{d_n(x + h_m) - d_n(x)}{h_m} = \pm 1, \quad n = 0, 1, \dots, m. \quad (7.9)$$

Natomiast dla $n > m$ funkcja d_n ma okres 4^{-n} . Liczba $|h_m| = 4^{-m-1} = 4^{-n} \cdot 4^{n-m-1}$ jest wtedy wielokrotnością 4^{-n} , więc także jest okresem d_n . Dlatego w tym przypadku $d_n(x + h_m) = d_n(x)$. Zatem

$$\frac{d_n(x + h_m) - d_n(x)}{h_m} = 0, \quad n = m + 1, m + 2, m + 3, \dots \quad (7.10)$$

Z bezwzględnej zbieżności szeregu definiującego $W(x)$ wynika, że

$$\frac{W(x + h_m) - W(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(x + h_m) - d_n(x)}{h_m} \stackrel{(7.10)}{=} \sum_{n=0}^m \frac{d_n(x + h_m) - d_n(x)}{h_m} \stackrel{(7.9)}{=} \sum_{n=0}^m \pm 1.$$

Jednak suma parzystej liczby składników ± 1 jest parzystą liczbą całkowitą, a suma nieparzystej liczby ± 1 jest nieparzystą liczbą całkowitą. Dlatego ciąg $(W(x + h_m) - W(x))/h_m$ ma na przemian wyrazy parzyste i nieparzyste i z pewnością nie spełnia warunku Cauchy'ego, a więc nie może być zbieżny do granicy skończonej. \square

Przykład 7.36. Niech³

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 t), \quad t > 0. \quad (7.11)$$

Wówczas funkcja f ma na $(0, \infty)$ ciągłe pochodne wszystkich rzędów. Wykażemy przez indukcję, że

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k n^{2k} \exp(-n^2 t), \quad t > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.12)$$

Niech $0 < \varepsilon < M < \infty$ będą dowolne. Wystarczy sprawdzić, że wzór (7.12) zachodzi na $[\varepsilon, M]$. Dla $k = 0$ mamy na tym przedziale $0 < \exp(-n^2 t) \leq (e^{-\varepsilon})^n = q^n$. Liczba $q = e^{-\varepsilon} \in (0, 1)$, więc na mocy kryterium Weierstrassa szereg (7.12) jest dla $k = 0$ jednostajnie zbieżny na $[\varepsilon, M]$, a jego suma f jest funkcją ciągłą.

Założmy teraz, że (7.12) zachodzi dla pewnej liczby k . Różniczkując kolejno składniki prawej strony, otrzymujemy szereg o wyrazach

$$\frac{d}{dt} \left((-1)^k n^{2k} \exp(-n^2 t) \right) = (-1)^{k+1} n^{2(k+1)} \exp(-n^2 t). \quad (7.13)$$

Na przedziale $[\varepsilon, M]$ jest

$$\left| \frac{d}{dt} \left((-1)^k n^{2k} \exp(-n^2 t) \right) \right| = n^{2(k+1)} \exp(-n^2 t) \leq n^{2(k+1)} (e^{-\varepsilon})^n$$

i dlatego szereg zbudowany ze składników (7.13), tzn. pochodnych składników szeregu (7.12), jest, na mocy kryterium Weierstrassa⁴, jednostajnie zbieżny na $[\varepsilon, M]$. Sam szereg (7.12) też jest zbieżny na całym przedziale $[\varepsilon, M]$; to jest założenie indukcyjne. Z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów i szeregów funkcyjnych wynika teraz, że wzór (7.12) zachodzi także dla liczby $k + 1$.

Na mocy zasady indukcji zupełnej, (7.12) zachodzi dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. \square

³W późniejszym okresie studiów matematycznych Czytelnik zobaczy, że podobne szeregi pojawiają się we wzorach na rozwiązania równań różniczkowych, opisujących proces rozchodzenia się ciepła.

⁴Czytelnik zechce przypomnieć sobie Przykłady 4.15–4.16, gdzie była mowa o zbieżności szeregów liczbowych $\sum n^k q^n$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ jest ustalone, a $q \in (0, 1)$.

7.5 Twierdzenie Arzeli–Ascoliego

Udowodnimy w tym podrozdziale ważne twierdzenie, określające warunki konieczne i dostateczne na to, aby z *każdego* ciągu funkcyjnego, zawartego w pewnej rodzinie funkcji ciągłych \mathcal{F} można było wybrać podciąg jednostajnie zbieżny, którego granica też należy do rodziny \mathcal{F} . Najpierw wprowadzimy kilka definicji.

Definicja 7.37 (δ -sieć). Niech $\delta > 0$. Powiemy, że podzbiór A_1 zbioru $A \subset \mathbb{R}$ jest δ -siecią w A wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in A$ istnieje $y \in A_1$ takie, że $|x - y| < \delta$.

Przykład 7.38. Zbiór $A_1 = \{k/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ jest δ -siecią w $A = \mathbb{R}$ dla każdej liczby $\delta > \frac{1}{4}$. Zbiór liczb wymiernych $A_1 = \mathbb{Q}$ jest δ -siecią w $A = \mathbb{R}$ dla każdej liczby $\delta > 0$.

Definicja 7.39. Zbiór niepusty $A \subset \mathbb{R}$ nazywa się *całkowicie ograniczony* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\delta > 0$ w A istnieje *skończona* δ -sieć.

Lemat 7.40. *Każdy niepusty zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}$ jest całkowicie ograniczony.*

Dowód. Przypuśćmy, że lemat jest fałszywy. Niech $K \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem zwartym, w którym dla pewnego $\delta > 0$ nie ma skończonej δ -sieci. Weźmy dowolne $x_1 \in K$. Zbiór $\{x_1\}$ nie jest δ -siecią w K , więc istnieje $x_2 \in K$ takie, że $|x_2 - x_1| \geq \delta$. Zbiór $\{x_1, x_2\}$ nie jest δ -siecią w K , więc istnieje $x_3 \in K$ takie, że $|x_3 - x_j| \geq \delta$ dla $j = 1, 2$. Postępując dalej w taki sposób, znajdziemy ciąg punktów $(x_n) \subset K$ taki, że $|x_i - x_j| \geq \delta$ dla wszystkich $i \neq j$. Żaden podciąg ciągu (x_n) nie spełnia warunku Cauchy’ego, więc żaden podciąg ciągu (x_n) nie jest zbieżny. To jest sprzeczność: każdy ciąg $(x_n) \subset K$ powinien zawierać podciąg zbieżny, gdyż K jest zwarty. \square

Wprowadzimy teraz kilka określeń, opisujących własności rodzin funkcji. Zanim podamy twierdzenie Arzeli–Ascoliego, zilustrujemy te własności prostymi przykładami.

Definicja 7.41. Rodzina $\mathcal{F} \subset C(K)$ nazywa się *zwarta* wtedy i tylko wtedy, gdy z dowolnego ciągu funkcji $(f_n) \subset \mathcal{F}$ można wybrać podciąg (f_{n_j}) zbieżny jednostajnie na K do pewnej funkcji $f \in \mathcal{F}$.

Okazuje się, że jeśli $K \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym, to zwartość dowolnej rodziny funkcji $\mathcal{F} \subset C(K)$ można dość łatwo scharakteryzować. Kluczowym pojęciem, służącym do tego celu, jest *równociągłość*.

Definicja 7.42. Powiemy, że rodzina $\mathcal{F} \subset C(K)$ jest *równociągła*⁵ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$ i wszystkich punktów $x, y \in K$, $|x - y| < \delta$, zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Czytelnik zechce zwrócić uwagę na *kolejność kwantyfikatorów* w definicji. Chodzi o to, że liczbę $\delta > 0$ można wybrać *jednocześnie* dla wszystkich funkcji $f \in \mathcal{F}$.

Przykład 7.43. Rodzina $\mathcal{F} \subset C([0, 1])$ wszystkich funkcji, spełniających warunek Lipschitza ze stałą 2011, jest równociągła: dla każdego $\varepsilon > 0$ warunek podany w definicji spełnia liczba $\delta = \varepsilon/2011$. Jeśli bowiem $|x - y| \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta = \varepsilon/2011$ i f jest jakąkolwiek funkcją, spełniającą na $[0, 1]$ warunek Lipschitza ze stałą 2011, to

$$|f(x) - f(y)| \leq 2011|x - y| < 2011\delta = \varepsilon.$$

⁵Mówi się też zamiennie: *jednakowo ciągła*.

Przykład 7.44. Rodzina funkcji $f_n(x) = \sin nx$, gdzie $x \in [0, 2\pi]$ i $n = 1, 2, \dots$, *nie jest* równociągła na $[0, 2\pi]$. Istotnie, niech $\varepsilon = 1/2$. Jeśli $\delta > 0$, a n wybierzemy tak, żeby $\pi/2n < \delta$, to $|f_n(0) - f_n(\pi/2n)| = |\sin 0 - \sin \frac{\pi}{2}| = 1 > \varepsilon$

Definicja 7.45. Powiemy, że rodzina $\mathcal{F} \subset C(K)$ jest *wspólnie ograniczona* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $M > 0$ taka, że $\|f\|_{\infty, K} \leq M$ dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$.

Przykład 7.46. Rodzina wszystkich wielomianów na $[0, 1]$ nie jest wspólnie ograniczona, gdyż zawiera dowolnie duże funkcje stałe. Rodzina $f_n(x) = \sin nx$, gdzie $x \in [0, 2\pi]$ i $n = 1, 2, \dots$, jest wspólnie ograniczona przez liczbę $M = 1$.

Definicja 7.47. Powiemy, że rodzina $\mathcal{F} \subset C(K)$ jest *domknięta* wtedy i tylko wtedy, gdy granica każdego jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji z rodziny \mathcal{F} też należy do \mathcal{F} .

Przykład 7.48. Rodzina \mathcal{W} wszystkich wielomianów na $[0, 1]$ *nie jest* domknięta. Istnieje bowiem ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie na $[0, 1]$ do $f(x) = \exp(x)$, tzn. do funkcji, nie należącej do \mathcal{W} .

Twierdzenie 7.49 (Arzela, Ascoli). *Niech $K \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem zwartym i niech $\mathcal{F} \subset C(K)$. Następujące warunki są wówczas równoważne:*

- (i) \mathcal{F} jest zwarta;
- (ii) \mathcal{F} jest domknięta, wspólnie ograniczona i równociągła.

Dowód. Najpierw wykażemy nieco łatwiejszą implikację (i) \Rightarrow (ii). Niech $\mathcal{F} \subset C(K)$ będzie rodziną zwartą. Domkniętość rodziny \mathcal{F} jest oczywista: jeśli $(f_n) \subset \mathcal{F}$ jest jednostajnie zbieżnym ciągiem funkcji, to jego granica f z pewnością należy do \mathcal{F} , gdyż f jest granicą każdego podciągu ciągu (f_n) .

Udowodnimy teraz, że \mathcal{F} jest wspólnie ograniczona. Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Wtedy dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $f_m \in \mathcal{F}$ taka, że $\|f_m\|_{\infty} > m$, tzn., z definicji normy jednostajnej, $|f_m(x_m)| > m$ dla pewnego $x_m \in K$. Z ciągu (f_m) można, dzięki zwartości rodziny \mathcal{F} , wybrać podciąg $f_{m_j} \Rightarrow f$ na K . Funkcja f jest ciągła, a więc jest ograniczona na K ; niech $M = \sup |f| + 1$. Jeśli $m_j > M$ jest dostatecznie duże, to $|f - f_{m_j}| < 1$ na K z definicji jednostajnej zbieżności. Zatem, z nierówności trójkąta,

$$|f(x_{m_j})| \geq |f_{m_j}(x_{m_j})| - |f_{m_j}(x_{m_j}) - f(x_{m_j})| > m_j - 1 > M - 1 = \sup |f|,$$

a to jest oczywista sprzeczność. Rodzina \mathcal{F} musi więc być wspólnie ograniczona.

Wreszcie, sprawdzimy, że \mathcal{F} jest równociągła. Jeszcze raz będziemy rozumować przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że rodzina \mathcal{F} nie jest równociągła. Istnieje wtedy liczba $\varepsilon_0 > 0$ taka, że dla każdej liczby $\delta_n = \frac{1}{n}$ istnieje funkcja $f_n \in \mathcal{F}$ i punkty $x_n, y_n \in K$ takie, że $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, ale $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $x_n - y_n \rightarrow 0$.

Ponieważ rodzina \mathcal{F} jest zwarta, więc – przechodząc w razie potrzeby do podciągu zbieżnego – ożemy bez zmniejszenia ogólności przyjąć, że ciąg $(f_n) \subset \mathcal{F}$ jest jednostajnie zbieżny. Funkcja $f = \lim f_n$ jest ciągła na K , a więc na mocy twierdzenia Cantora jest jednostajnie ciągła. Wybierzmy teraz n_0 tak, żeby $\|f_n - f\|_{\infty} < \varepsilon_0/3$ dla wszystkich $n > n_0$. Wtedy, z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &\geq |f_n(x_n) - f_n(y_n)| - |f_n(x_n) - f(x_n)| - |f_n(y_n) - f(y_n)| \\ &\geq \varepsilon_0 - 2\|f_n - f\|_{\infty} > \frac{\varepsilon_0}{3}. \end{aligned}$$

Zatem $x_n - y_n \rightarrow 0$, ale $f_n(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$. To przeczy jednostajnej ciągłości f na K . Dowód implikacji (i) \Rightarrow (ii) jest zakończony.

Przejdziemy teraz do dowodu ciekawszej i ważniejszej implikacji (ii) \Rightarrow (i). Udowodnimy najpierw następujący fakt:

Jeśli rodzina $\mathcal{F} \subset C(K)$ jest wspólnie ograniczona i równociągła, to z każdego ciągu $(f_n) \subset \mathcal{F}$ można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny.

Z Lematu 7.40 wynika, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ w K istnieje skończona $\frac{1}{m}$ -sieć. Suma P tych wszystkich sieci jest zbiorem przeliczalnym. Ponumerujemy punkty poszczególnych sieci tak, aby $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$.

Ustalmy ciąg $(f_n) \subset \mathcal{F}$. Wykażemy, że z (f_n) można wybrać taki podciąg $g_k = f_{n_k}$, że ciąg liczbowy $(g_k(x_m))_{k=1,2,\dots}$ jest zbieżny dla każdego ustalonego $m \in \mathbb{N}$. (Wykorzystamy w tym celu metodę przekątniową). Następnie udowodnimy, że wybrany podciąg funkcji jest nie tylko zbieżny w każdym z punktów x_m , ale także jednostajnie zbieżny na K .

Rodzina \mathcal{F} jest wspólnie ograniczona, więc ciąg liczb $f_n(x_1)$ jest ograniczony. Posługując się twierdzeniem Bolzano–Weierstrassa, można zeń wybrać podciąg zbieżny. Oznaczmy go $f_{1,n}(x_1)$. Aby wybrać następny podciąg, zauważmy, że ciąg $f_{1,n}(x_2)$ jest ograniczony, a więc zawiera podciąg zbieżny $f_{2,n}(x_2)$. Odnotujmy, że ciąg $f_{2,n}(x_1)$ też jest zbieżny, gdyż jest podciągami zbieżnego ciągu $f_{1,n}(x_1)$. Załóżmy teraz, że dla pewnej liczby k wybraliśmy już podciągi $f_{i,n}$, gdzie $i = 1, \dots, k$, o następujących własnościach:

- Gdy $j > i$, to $(f_{j,n})$ jest podciągami $(f_{i,n})$;
- Ciągi liczbowe $(f_{k,n}(x_i))_{n=1,2,\dots}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, k$, są zbieżne.

Rozpatrzmy teraz ciąg $(f_{k,n}(x_{k+1}))_{n=1,2,\dots}$. Jest on ograniczony, więc ma podciąg zbieżny $(f_{k+1,n}(x_{k+1}))_{n=1,2,\dots}$. Podciąg $f_{k+1,n}$ jest oczywiście podciągami każdego z ciągów $f_{i,n}$ dla $i \leq k$, więc wszystkie ciągi liczbowe $(f_{k+1,n}(x_i))_{n=1,2,\dots}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, k+1$, są zbieżne. Kontynuując tę procedurę, otrzymamy nieskończenie wiele podciągów $f_{k,n}$ wyjściowego ciągu (f_n) ; k -ty z tych podciągów, $f_{k,n}$, jest zbieżny w punktach x_1, \dots, x_k . Wygodnie jest zapisać te podciągi w nieskończonej tabeli

k	1	2	3	\dots
	$f_{1,1}$	$f_{2,1}$	$f_{3,1}$	\dots
	$f_{1,2}$	$f_{2,2}$	$f_{3,2}$	\dots
	$f_{1,3}$	$f_{2,3}$	$f_{3,3}$	\dots
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Ciąg w k -tej kolumnie jest podciągami każdej z wcześniejszych kolumn i jest zbieżny w punktach x_1, \dots, x_k . Połóżmy teraz $g_n = f_{n,n}$. (Jest to ciąg funkcji, wypisanych na głównej przekątnej powyższej tabeli). Zauważmy, że dla każdego ustalonego m ciąg $g_n(x_m)$ jest, począwszy od m -tego miejsca, podciągami $f_{m,n}(x_m)$. Dlatego granica $\lim_n g_n(x_m)$ istnieje dla każdego $m \in \mathbb{N}$.

Wykażemy teraz, że ciąg g_n jest jednostajnie zbieżny na K . W tym celu udowodnimy, że (g_n) spełnia na K jednostajny warunek Cauchy'ego. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy do $\varepsilon/3 > 0$

liczbę $\delta > 0$, korzystając z definicji równości. Ustalmy teraz N tak duże, aby wśród punktów x_1, \dots, x_N zbioru P znalazła się pewna δ -sieć w zbiorze K . Jest to możliwe, gdyż zbiór przeliczalny P był sumą skończonych $\frac{1}{n}$ -sieci dla K .

Ponieważ ciągi $g_n(x_j)$ są zbieżne dla każdego $j = 1, \dots, N$, więc – na mocy warunku Cauchy’ego dla ciągów liczbowych – istnieje n_0 takie, że

$$|g_n(x_j) - g_m(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla wszystkich } m, n > n_0 \text{ i wszystkich } j = 1, \dots, N. \quad (7.14)$$

Niech $x \in K$. Istnieje $j \in \{1, \dots, N\}$ takie, że $|x - x_j| < \delta$. Zatem, dla $n, m > n_0$,

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - g_m(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dwa skrajne składniki oszacowaliśmy, korzystając z równości i doboru δ do $\varepsilon/3$, środkowy zaś – korzystając z (7.14). Otrzymujemy ostatecznie $|g_n - g_m| < \varepsilon$ na K dla wszystkich $m, n > n_0$, więc ciąg g_n , tzn. podciąg f_n wybrany metodą przekątniową, jest zbieżny jednostajnie na K .

Z domkniętości rodziny \mathcal{F} wynika, że granica ciągu g_n też należy do \mathcal{F} . \square

Bardzo często jest w analizie używany natychmiastowy wniosek z powyższego dowodu.

Wniosek 7.50. *Załóżmy, że K jest zbiorem zwartym w \mathbb{R} , a rodzina funkcji $\mathcal{F} \subset C(K)$ jest wspólnie ograniczona i równością. Wówczas każdy ciąg $(f_n) \subset \mathcal{F}$ zawiera podciąg jednostajnie zbieżny.*

Rozdział 8

Szeregi potęgowe

Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$ i współczynnikach $a_n \in \mathbb{C}$ nazywamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (8.1)$$

gdzie $z \in \mathbb{C}$. Z szeregami tego typu mieliśmy już do czynienia, omawiając funkcję wykładniczą, sinus i cosinus.

W tym rozdziale, wyposażeni w wiedzę o zbieżności jednostajnej, omówimy ogólne własności funkcji, które można definiować wzorami typu (8.1).

8.1 Dygresja: granica górna i dolna

Niech (b_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych.

Definicja 8.1. Granicą górną ciągu (b_n) nazywamy element zbioru $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, określony następująco:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{m \geq n} b_m \right).$$

Granicą dolną ciągu (b_n) nazywamy element zbioru $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, określony następująco:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{m \geq n} b_m \right).$$

Symbole 'lim sup' i 'lim inf' pochodzą od łacińskich nazw *limes superior* oraz *limes inferior*.

Uwaga. Nietrudno sprawdzić, że zachodzą równości

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{m \geq n} b_m \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} b_m \right), \quad (8.2)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{m \geq n} b_m \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} b_m \right). \quad (8.3)$$

Istotnie, ciąg $B_n = \sup_{m \geq n} b_m$ jest nierosnący (zwiększając n , obliczamy kres górny mniejszego lub tego samego zbioru). Dlatego ciąg B_n ma granicę (właściwą lub niewłaściwą):

nie wiemy wszak, czy B_n jest ograniczony), która zarazem jest kresem dolnym wszystkich liczb B_n . (Patrz Twierdzenie 2.22, Wniosek 2.23 i Twierdzenie 2.28). To dowodzi pierwszej z podanych równości; drugą można sprawdzić analogicznie.

Inna definicja granicy górnej i dolnej. Granice częściowe

Równoważna definicja granicy górnej i dolnej jest następująca. Oznaczmy literą \mathcal{B} zbiór wszystkich tych podciągów ciągu (b_n) , które są zbieżne do granicy właściwej lub niewłaściwej. Niech Γ oznacza zbiór wszystkich granic podciągów $(b_{n_k}) \in \mathcal{B}$. Inaczej mówiąc, element $c \in \mathbb{R}$ należy do Γ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = \lim b_{n_k}$ dla pewnego podciągu (b_{n_k}) ciągu (b_n) .

Tak określony zbiór Γ nazywamy *zbiorem granic częściowych* ciągu (b_n) . Zachodzą równości

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \sup \Gamma, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf \Gamma. \quad (8.4)$$

Ich sprawdzenie w oparciu o Definicję 8.1 pozostawimy jako nietrudne zadanie dla Czytelnika.

Przykład 8.2. Ciąg $b_n = (-1)^n$ ma granicę górną 1 i granicę dolną -1 . Zbiór granic częściowych tego ciągu to zbiór dwuelementowy $\{-1, 1\}$. Ciąg

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{5}, \quad \dots$$

ma granicę górną 1 i granicę dolną 0. Zbiór granic częściowych tego ciągu to przedział $[0, 1]$.

Zadanie 8.3. Niech (b_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych, a Γ zbiorem granic częściowych tego ciągu. Wykazać, że jeśli ciąg $(g_n) \subset \Gamma$ ma granicę (właściwą lub niewłaściwą) g , to $g \in \Gamma$.

Posługując się wnioskiem 2.35, nietrudno udowodnić, że ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny (do granicy właściwej lub niewłaściwej) wtedy i tylko wtedy, gdy jego granica górna i dolna są równe.

Zanotujmy jeszcze jedną własność granicy górnej, którą wykorzystamy w tym rozdziale.

Stwierdzenie 8.4. *Jeśli $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to dla każdego $b' > b$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $b_n < b'$ dla wszystkich $n > n_0$.*

Dowód. Wiemy, że $b = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} b_m)$; patrz (8.2). Jeśli $b' > b$, to dla dostatecznie dużych n jest $\sup_{m \geq n} b_m < b'$, tzn. $b_m < b'$ dla wszystkich dostatecznie dużych m . \square

8.2 Promień zbieżności; ciągłość sumy szeregu potęgowego

Rozpatrzmy szereg potęgowy

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (8.5)$$

o środku w punkcie $z_0 = 0$.

Stwierdzenie 8.5. *Założmy, że szereg $S(\xi)$ jest zbieżny w pewnym punkcie $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jeśli $0 < \varrho < |\xi|$, to w kole domkniętym $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varrho\}$ szereg $S(z)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.*

Dowód. Z warunku koniecznego zbieżności szeregu wynika, że $a_n \xi^n \rightarrow 0$, a więc istnieje liczba M taka, że $|a_n \xi^n| \leq M$ dla wszystkich n . Jeśli $z \in D_\varrho$, to

$$|a_n z^n| \leq |a_n| \varrho^n = |a_n \xi^n| \cdot \frac{\varrho^n}{|\xi|^n} \leq M q^n,$$

gdzie $q = \varrho/|\xi| \in (0, 1)$, gdyż $0 < \varrho < |\xi|$. Szereg o wyrazach Mq^n jest więc zbieżnym szeregiem liczbowym (po prostu: szeregiem geometrycznym). Teza stwierdzenia wynika z kryterium Weierstrassa. \square

Stwierdzenie 8.6. *Założmy, że szereg $S(\xi)$ jest rozbieżny w pewnym punkcie $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jeśli $|z| > |\xi|$, to szereg $S(z)$ jest rozbieżny.*

Dowód. Przypuśćmy, że jest przeciwnie i szereg $S(z)$ jest zbieżny. Ponieważ $|\xi| < |z|$, więc z poprzedniego stwierdzenia wynika wtedy, że zbieżny jest szereg $S(\xi)$, sprzeczność. \square

Z obu powyższych stwierdzeń wynika, że szereg potęgowy (8.5) jest zbieżny w pewnym kole otwartym $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ i rozbieżny poza kołem domkniętym o tym samym promieniu, tzn. na zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Okazuje się, że liczbę R , nazywaną *promieniem zbieżności szeregu (8.5)*, można wyznaczyć, znając współczynniki a_n tego szeregu.

Twierdzenie 8.7 (wzór Cauchy'ego–Hadamarda). *Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych i niech*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (8.6)$$

Wtedy szereg potęgowy $S(z)$ jest, dla każdego $\varrho < R$, zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w kole $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varrho\}$, oraz rozbieżny w punktach zbioru $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.

Dowód. Rozpatrzmy najpierw przypadek $R > 0$. Ustalmy $\varrho < R$. Wybierzmy liczby rzeczywiste R_1, R_2 tak, aby $\varrho < R_1 < R_2 < R$. Niech ξ będzie (jakimkolwiek) punktem okręgu $\gamma_{R_1} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = R_1\}$. Ponieważ $1/R_2 > 1/R$, więc na mocy Stwierdzenia 8.4 istnieje takie n_0 , że dla wszystkich $n > n_0$ jest

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R_2},$$

lub równoważnie $|a_n| < (R_2)^{-n}$. Dlatego

$$|a_n \xi^n| = |a_n| R_1^n < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \quad \text{dla } n > n_0,$$

a więc na mocy kryterium porównawczego szereg $S(\xi)$ jest zbieżny (nawet bezwzględnie). Ze Stwierdzenia 8.5 wynika teraz pierwsza część tezy: $S(z)$ zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w kole $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varrho\}$.

Niech teraz $|z| > R$. Ustalmy $R_3 \in \mathbb{R}$ tak, aby mieć $R < R_3 < |z|$. Z definicji granicy górnej wynika, że istnieje podciąg n_j taki, że $|a_{n_j}|^{1/n_j} \rightarrow 1/R > 1/R_3$. Dla dostatecznie dużych n_j jest więc $|a_{n_j}| > R_3^{-n_j}$, a zatem

$$|a_{n_j} z^{n_j}| > R_3^{-n_j} |z|^{n_j} > R_3^{-n_j} R_3^{n_j} = 1.$$

Przeto szereg $S(z)$ nie może być zbieżny, gdyż pewien podciąg ciągu jego wyrazów nie dąży do zera: nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

Wreszcie, gdy $R = 0$, to po prostu dla każdego $z \neq 0$ szereg $S(z)$ jest rozbieżny. Aby to sprawdzić, Czytelnik zechce prześledzić ostatni fragment rozumowania, wpisując wszędzie $R = 0$, $1/R = \infty$. \square

Definicja 8.8. Koło $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, gdzie liczba R jest dana wzorem Cauchy'ego–Hadamarda (8.6), nazywamy *kołem zbieżności szeregu* (8.5).

Wiemy z poprzedniego rozdziału, że suma szeregu jednostajnie zbieżnego na pewnym podzbiórze płaszczyzny \mathbb{C} (lub prostej \mathbb{R}) jest na tym zbiorze funkcją ciągłą. Ponieważ na każdym kole domkniętym D_ρ zawartym we wnętrzu koła zbieżności szeregu potęgowy jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie, więc otrzymujemy natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 8.9. Suma $S(z)$ szeregu potęgowego (8.5) jest funkcją ciągłą wewnątrz koła $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, gdzie liczba R jest dana wzorem (8.6). (Jeśli $1/R = 0$, to $S(\cdot)$ jest funkcją ciągłą na całej płaszczyźnie \mathbb{C} .)

Przykład 8.10. Szereg

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ma promień zbieżności $R = \infty$, gdyż $a_n = 1/n!$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}} = 0.$$

Ostatnią równość można otrzymać, posługując się tezą Zadania A.6, albo (znacznie mniej subtelny) oszacowaniem $(n!)^2 \geq n^n$, z którego wynika, że

$$0 < \frac{1}{(n!)^{1/n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Możemy więc – niezależnie od tego, co znacznie wcześniej udowodniliśmy w zupełnie inny sposób – stwierdzić, że funkcja $\exp(z)$ jest ciągła na całej płaszczyźnie \mathbb{C} .

Przykład 8.11. Szereg

$$\sin(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

też ma promień zbieżności $R = \infty$. Zauważmy, że tym razem $a_n = 0$ dla n parzystych. Dla n nieparzystych mamy do czynienia z podciągami ciągu $(n!)^{-1/n}$, który rozpatrzyliśmy w poprzednim przykładzie.

Przykład 8.12. Niech $k \in \mathbb{N}$. Każdy z szeregów

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad S_{2,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{kn}}{n}, \quad S_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

ma promień zbieżności $R = 1$. Nietrudno to stwierdzić, posługując się równością

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1.$$

Zauważmy jednak, że szereg S_1 jest rozbieżny we wszystkich punktach okręgu $|z| = 1$. Szereg S_3 jest zbieżny bezwzględnie we wszystkich punktach tego okręgu, gdyż dla $|z| = 1$ jest $|z^n/n^2| = 1/n^2$. Szereg $S_{2,k}(\xi)$ jest rozbieżny, gdy $\xi^k = 1$ (bo wtedy jego sumy częściowe są sumami częściowymi rozbieżnego szeregu $\sum \frac{1}{n}$) i zbieżny – warunkowo, ale nie bezwzględnie – w pozostałych punktach okręgu jednostkowego. Aby udowodnić ostatnią własność, można posłużyć się kryterium Dirichleta; zrobiliśmy to w istocie w Przykładzie 4.44 (proszę do niego zajrzeć i podstawić $z = \xi^k$).

Widać więc, że zachowanie szeregu potęgowego na brzegu koła zbieżności jest rzeczą delikatną: bez szczegółowego badania współczynników nic naprawdę ogólnego nie da się tu powiedzieć.

8.3 Różniczkowalność sumy szeregu potęgowego

Szeregi potęgowe mają bardzo wygodną własność: ich sumy mają pochodne wszystkich rzędów, które wolno obliczać tak samo, jak pochodne wielomianów – różniczkując kolejne składniki sumy.

Twierdzenie 8.13. Załóżmy, że $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Wtedy funkcja S ma pochodną w każdym punkcie $z \in \{w \in \mathbb{C} : |w| < R\}$ i zachodzi wzór

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \quad (8.7)$$

Dowód. Przy dowolnym ustalonym z , szereg po prawej stronie wzoru (8.7) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg o wyrazach $n a_n z^n$. (Mnożymy po prostu szereg (8.7) przez ustaloną liczbę). Ponieważ $n^{1/n} \rightarrow 1$ dla $n \rightarrow \infty$, więc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |n a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

Dlatego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, tzn. szereg utworzony z pochodnych kolejnych składników szeregu $S(z)$, jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na każdym kole $D_\varrho = \{z : |z| \leq \varrho\}$, gdzie $\varrho < R$. Z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych (stosujemy jego wariant zespolony – wolno to zrobić, gdyż koło jest zbiorem wypukłym) wnioskujemy, że istotnie zachodzi wzór (8.7). \square

Przykład 8.14. Korzystając z powyższego twierdzenia, obliczamy

$$\begin{aligned} (\sin z)' &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \cdot (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos z. \end{aligned}$$

(Podstawiliśmy wyżej $k = n - 1$.)

Ponieważ pochodna sumy szeregu potęgowego wyraża się przez nowy szereg potęgowy o tym samym promieniu zbieżności, więc ostatecznie twierdzenie oczywiście wolno stosować wielokrotnie.

Wniosek 8.15. Załóżmy, że $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Funkcja S ma w kole $z \in \{w \in \mathbb{C} : |w| < R\}$ ciągle pochodne wszystkich rzędów. Zachodzi wzór

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) a_n z^{n-k}. \quad (8.8)$$

Dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jest $k! a_k = S^{(k)}(0)$.

Dowód. Ogólny wzór (8.8) otrzymujemy, stosując k -krotnie poprzednie twierdzenie. Podstawiając w (8.8) $z = 0$, otrzymujemy po prawej stronie tylko jeden niezerowy składnik sumy (dla $n = k$), równy właśnie $k! a_k$. \square

Wniosek 8.16 (jednoznaczność rozwinięcia w szereg potęgowy). Załóżmy, że sumy dwóch szeregów potęgowych,

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{oraz} \quad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

są równe w pewnym kole $|z| < \varrho$. Wtedy $a_n = b_n = S^{(n)}(0)/n!$ dla wszystkich $n = 0, 1, 2, \dots$

Innymi słowy, żadnej funkcji nie można przedstawić w postaci zbieżnego szeregu potęgowego o środku w zerze na dwa istotnie różne sposoby.

Dowód. Skoro $S(z) = T(z)$ w kole $|z| < \varrho$, to promień zbieżności obu szeregów jest przynajmniej taki, jak ϱ . Ponadto, z poprzedniego wniosku wynika, że $S^{(k)}(z) = T^{(k)}(z)$ dla wszystkich $|z| < \varrho$ i wszystkich k , a w szczególności

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = \frac{T^{(n)}(0)}{n!} = b_n.$$

Dowód jest zakończony. \square

8.3.1 Pojęcie funkcji analitycznej

Uwaga 8.17. Wszystko, co powiedzieliśmy do tej pory w tym rozdziale, przenosi się bez zmian na szeregi potęgowe zmiennej rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych. Trzeba tylko zastąpić koło zbieżności $|z| < R$ przedziałem zbieżności $|x| < R$. Wzór na promień zbieżności R , a także wzory na pochodne sumy szeregu potęgowego i jego współczynniki, nie ulegają zmianie.

Uwaga 8.18. Zauważmy, że wzory na współczynniki szeregu potęgowego funkcji S , tzn. równości $a_n = S^{(n)}(0)/n!$, otrzymane we Wnioskach 8.15–8.16, są takie same, jak wzory na kolejne współczynniki Taylora–Maclaurina. Jednak wzór Taylora z resztą w postaci Peano (lub innej) ma charakter lokalny; jak widzieliśmy w Przykładzie 6.86, funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

ma na prostej pochodne wszystkich rzędów i $f^{(n)}(0) = 0$ dla wszystkich n . Zatem f nie jest sumą żadnego zbieżnego szeregu potęgowego – gdyby $f(x) = \sum a_n x^n$, to musiałyby być $a_n = f^{(n)}(0)/n! = 0$, tzn. $f \equiv 0$, ale przecież f wcale nie znika tożsamościowo.

Niech P będzie otwartym przedziałem w \mathbb{R} . Wprowadźmy następujące oznaczenia.

$C^k(P)$: zbiór wszystkich funkcji $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, mających w P ciągłe pochodne do rzędu k włącznie;

$C^\infty(P)$: zbiór wszystkich funkcji $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, mających w P ciągłe pochodne wszystkich rzędów;

$C^\omega(P)$: zbiór wszystkich funkcji $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, dla których dla każdego $a \in P$ istnieje $R_a > 0$ takie, że $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, gdy $|x-a| < R_a$.

Funkcje $f \in C^\infty(P)$ nazywamy *gładkimi*, a funkcje $f \in C^\omega(P)$ – *analitycznymi (w sensie rzeczywistym)*. Są to istotnie różne pojęcia: analityczność to coś więcej, niż gładkość.

Wniosek 8.19. Dla każdego przedziału otwartego $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}$ jest $C^\omega(P) \subsetneq C^\infty(P)$.

Dowód. Niech $a \in P$. Funkcja $f(x-a)$, gdzie f jest dana wzorem (8.9), jest gładka w P , ale nie jest sumą żadnego szeregu potęgowego $\sum_n a_n (x-a)^n$, więc $f \notin C^\omega(P)$. \square

Sprawdźmy jeszcze, że funkcja, która jest sumą szeregu potęgowego $\sum a_n z^n$, zbieżnego w kole $\{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$, rozwija się w szereg potęgowy wokół każdego innego punktu z_0 , należącego do tego koła. Najpierw udowodnimy pomocniczy lemat, który pozwala zamieniać kolejność dwóch nieskończonych sum.

Lemat 8.20. Niech $a_{ij} \in \mathbb{C}$ dla $i, j \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i < +\infty. \quad (8.10)$$

Wówczas

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Dowód. ¹ Niech $E = \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że x_i są parami różne i $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Zdefiniujmy funkcje $f_i, g: \mathbb{R}$ następująco:

$$\begin{aligned} f_i(x_0) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} && \text{dla } i \in \mathbb{N}, \\ f_i(x_n) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} && \text{dla } i, n \in \mathbb{N}, \\ g(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) && \text{dla } x \in E. \end{aligned}$$

Wprost z definicji sumy szeregu wynika, że $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x_0)$ dla $n \rightarrow \infty$. Zatem każda z funkcji f_i jest ciągła w $x_0 \in E$. Ponieważ $|f_i(x)| \leq b_i$ na E , więc na mocy kryterium Weierstrassa i zbieżności szeregu $\sum b_i$ szereg definiujący funkcję g jest zbieżny jednostajnie na E . Wynika stąd, że g jest ciągła w x_0 . Dlatego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \end{aligned}$$

Przedostatnia równość wynika z własności sumy skończenie wielu szeregów, patrz Stwierdzenie 4.6. \square

Twierdzenie 8.21. *Założmy, że szereg*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{8.11}$$

jest zbieżny w kole $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Niech $\xi \in K_R$. Funkcję S można rozwinąć w szereg potęgowy, który ma środek w punkcie ξ i jest zbieżny w każdym punkcie z takim, że $|z - \xi| < R - |\xi|$. Zachodzi przy tym równość

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(\xi)}{n!} (z - \xi)^n, \quad |z - \xi| < R - |\xi|. \tag{8.12}$$

Dowód. Podstawiając $z = (z - \xi) + \xi$ we wzorze na S , otrzymujemy

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((z - \xi) + \xi)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z - \xi)^k \xi^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} \xi^{n-k} \right)}_{= (\text{ozn.}) c_k} (z - \xi)^k. \end{aligned} \tag{8.13}$$

¹Patrz Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, rozdział 8.

Pisząc ostatnią równość, zmieniliśmy kolejność sumowania; sprawdzimy, że dla $|z - \xi| < R - |\xi|$ można to zrobić dzięki Lematowi 8.20. Po pierwsze, wzór

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

pozwała określić symbol Newtona dla wszystkich $k = 0, 1, 2, \dots$; mamy $\binom{n}{k} = 0$ dla $k > n$. Wobec tego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left| a_n \binom{n}{k} (z - \xi)^k \xi^{n-k} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_n \binom{n}{k} (z - \xi)^k \xi^{n-k} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z - \xi| + |\xi|)^n$$

Podstawmy $t = |z - \xi| + |\xi|$. Szereg $\sum_n |a_n| t^n$ ma taki sam promień zbieżności, jak wyjściowy szereg $S(z)$; dlatego szereg podwójny po lewej stronie ostatniego wzoru jest zbieżny dla $t = |z - \xi| + |\xi| < R$ i wtedy, posługując się Lematem 8.20, można zmienić kolejność sumowania we wzorze (8.13). Wzory na współczynniki szeregu funkcji S wokół punktu ξ , tzn. równości $c_k = S^{(k)}(\xi)/k!$, wynikają z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy (patrz Wniosek 8.16). \square

Czytelnik zechce samodzielnie sformułować ‘rzeczywisty’ wariant ostatniego twierdzenia i sprawdzić, że podany dowód przenosi się bez zmian.

Uwaga 8.22. Może się okazać, że szereg (8.12) w poprzednim twierdzeniu jest zbieżny na zbiorze większym, niż koło $\{z \in \mathbb{C} : |z - \xi| < R - |\xi|\}$. Oto prosty przykład. Mamy

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Nietrudno rozwinąć tę funkcję w szereg potęgowy o środku w innym punkcie ξ koła jednostkowego. Otóż,

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\xi-(z-\xi)} = \frac{1}{1-\xi} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-\xi}{1-\xi}} = \frac{1}{1-\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\xi}{1-\xi} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (z-\xi)^n,$$

gdzie $b_n = (1-\xi)^{-n-1}$. Otrzymany szereg potęgowy jest znów szeregiem geometrycznym, zbieżnym, gdy liczba $|\frac{z-\xi}{1-\xi}| < 1$, tzn. gdy $|z-\xi| < |1-\xi|$. Np. dla $\xi = 1/2$ otrzymujemy więc promień zbieżności $1/2$, ale dla $\xi = -1/2$ szereg jest zbieżny wtedy, gdy $|z + \frac{1}{2}| < 3/2$, tzn. w kole otwartym o środku $-1/2$ i promieniu $3/2$, które zawiera całe koło $|z| < 1$ i wiele punktów spoza niego. Czytelnik zechce zrobić odpowiednie rysunki i zobaczyć, że w każdym przypadku punkt $z_0 = 1$, w którym funkcja $1/(1-z)$ przestaje być określona, leży na brzegu koła zbieżności odpowiedniego szeregu.

8.4 Przykłady

Przykład 8.23. Zastosujemy wzór (8.8), aby obliczyć sumę szeregu

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n, \quad |z| < 1.$$

Ponieważ $n^2 = n(n-1) + n$, a szereg T jest zbieżny bezwzględnie na każdym kole $|z| \leq \rho$ (gdzie $\rho < 1$), więc

$$\begin{aligned}
 T(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \\
 &= z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} + z \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \\
 &\stackrel{(8.8)}{=} z^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)'' + z \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' \\
 &= z^2 \left(\frac{1}{1-z} \right)'' + z \left(\frac{1}{1-z} \right)' \\
 &= \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}.
 \end{aligned}$$

Proszę zauważyć: wykorzystaliśmy jedynie wzór na pierwszą i drugą pochodną szeregu potęgowego, a następnie dwukrotnie zrózniczkowaliśmy funkcję $1/(1-z)$. \square

Przykład 8.24 (wzór Bineta na liczby Fibonacciego). Skorzystamy z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy, aby wyznaczyć jawnym wzorem liczby Fibonacciego ($a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$). Niech

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Łatwo sprawdzić, że $0 < a_n \leq 2^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Dlatego $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n} \leq 2$ i szereg określający funkcję Φ jest zbieżny (przynajmniej) w kole $|z| < \frac{1}{2}$. Wewnątrz tego koła wszystkie rachunki, które będziemy prowadzić, mają sens dzięki bezwzględnej zbieżności odpowiednich szeregów.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
 z\Phi(z) &= a_0z + a_1z^2 + a_2z^3 + a_3z^4 + \dots, \\
 z^2\Phi(z) &= a_0z^2 + a_1z^3 + a_2z^4 + \dots.
 \end{aligned}$$

Dodając te równości stronami i korzystając z rekurencyjnej definicji ciągu Fibonacciego, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (z+z^2)\Phi(z) &= z + (a_1+a_0)z^2 + (a_2+a_1)z^3 + (a_3+a_2)z^4 + \dots \\
 &= a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \dots = \Phi(z) - 1.
 \end{aligned}$$

Stąd $\Phi(z) = 1/(1-z-z^2)$. Trójmian kwadratowy $T(z) = 1-z-z^2$ ma pierwiastki $z_1 = -(\sqrt{5}+1)/2$, $z_2 = (\sqrt{5}-1)/2$. Łatwo sprawdzić (rozwiązując układ równań liniowych z niewiadomymi a, b), że

$$\Phi(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{a}{z_1-z} + \frac{b}{z_2-z} \quad \text{dla} \quad a = -b = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Stosując, podobnie jak w Uwadze 8.22, wzór na sumę szeregu geometrycznego, zapisujemy teraz $\Phi(z)$ jako

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{1}{z_1\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} + \frac{1}{z_2\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{z}{z_2}} \\ &= -\frac{1}{z_1\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \frac{1}{z_2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}(z_2^{-n-1} - z_1^{-n-1})z^n.\end{aligned}$$

Dzięki jednoznaczności rozwinięcia Φ w szereg potęgowy o środku w zerze,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(z_2^{-n-1} - z_1^{-n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), \quad n = 0, 1, \dots$$

Jest to tak zwany *wzór Bineta*. \square

Podobnymi metodami można znajdować 'jawne' wzory na wyrazy innych ciągów, określonych liniowymi wzorami rekurencyjnymi.

Uwaga 8.25. Wzór Bineta można także wyprowadzić metodami algebry liniowej. Otóż, definicję rekurencyjną ciągu Fibonacciego można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix},$$

lub krótko $v_{n+1} = Mv_n$, gdzie

$$v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Przez indukcję otrzymujemy natychmiast $v_{n+1} = M^n v_0$. Potęgowanie macierzy M nie jest zajęciem pouczającym. Jednak w bazie złożonej z wektorów własnych przekształcenie $M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ma macierz diagonalną

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Wystarczy więc wyrazić v_0 jako kombinację wektorów własnych u, w przekształcenia M , $v_0 = \alpha u + \beta w$. Wtedy

$$v_n = M^n(\alpha u + \beta w) = \alpha \lambda_1^n u + \beta \lambda_2^n w.$$

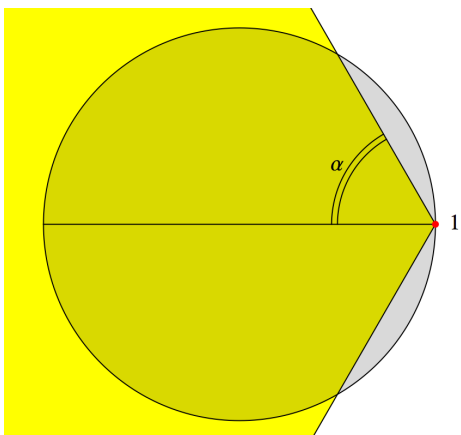
Zainteresowany Czytelnik zechce uzupełnić nietrudne rachunki (trzeba znaleźć wartości i wektory własne M , oraz dobrać stałe α, β tak, aby $v_0 = \alpha u + \beta w$), a następnie odczytać z podanego wyżej wzoru na v_n wzór na a_n (czyli na drugą współrzędną wektora v_n).

8.5 Twierdzenie Abela o granicach kątowych

Widzieliśmy już proste przykłady, wskazujące, że na brzegu koła zbieżności $|z| < R$ szereg potęgowy może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny. Udowodnimy teraz klasyczne twierdzenie, które mówi, jak zachowuje się suma szeregu potęgowego w pobliżu tych punktów okręgu $|z| = R$, gdzie szereg jest zbieżny.

Wprowadźmy najpierw odpowiednie oznaczenia. Niech $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Połóżmy

$$T(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \quad 1 - z = re^{i\theta} \quad \text{dla pewnych } \theta \in (-\alpha, \alpha), r > 0\}. \quad (8.14)$$



Nietrudno jest sprawdzić, że $T(1, \alpha)$ stanowi część wspólną dysku jednostkowego $K_1 = \{z : |z| < 1\}$ oraz kąta o rozwartości 2α , wierzchołku w punkcie $1 \in \mathbb{C}$ oraz dwusiecznej pokrywającej się z półprostą $(-\infty, 1]$ na osi rzeczywistej.

Definicja 8.26. Powiemy, że funkcja $f: K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ma w punkcie 1 granicę kątową równą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ funkcja

$$f_\alpha \equiv f|_{T(1, \alpha)} : T(1, \alpha) \rightarrow \mathbb{C}$$

ma w punkcie 1 granicę równą g ; równoważnie, $f: K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ma w punkcie 1 granicę kątową równą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego kąta $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że jeśli $z \in T(1, \alpha)$ i $|z - 1| < \delta$, to wówczas $|f(z) - g| < \varepsilon$.

Definicja 8.27. Funkcja $g: K_R = \{|z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ ma granicę kątową równą g w punkcie $z_0 \in \gamma_R = \{|z| = R\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(z) = g(z \cdot z_0)$ ma granicę kątową równą g w punkcie 1.

Twierdzenie 8.28 (Abela o granicy kątowej). *Niech*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{dla } |z| < R, \quad \text{gdzie } \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Założmy, że szereg potęgowy definiujący funkcję g jest zbieżny w pewnym punkcie z_0 należącym do okręgu $\gamma_R = \{|z| = R\} \subset \mathbb{C}$ i ma w tym punkcie sumę równą S . Wówczas g ma w punkcie z_0 granicę kątową równą S .

Dowód. Posługując się definicją granicy kątowej można bez zmniejszenia ogólności założyć, że $R = 1$ i $z_0 = 1$; szereg

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest zbieżny wewnątrz koła jednostkowego, tzn. dla $|z| < 1$, a ponadto

$$S = g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{C}.$$

Będziemy szacować $|g(z) - S|$ dla z bliskich 1 i należących do $T(1, \alpha)$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$ i kąt $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Niech $\eta > 0$. Konkretną wartość η dobierzemy do α i ε na końcu dowodu.

Krok 1. Niech

$$\psi_{p,q}(z) = \sum_{n=p+1}^{p+q} a_n(z^n - 1), \quad \psi_p(z) = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n(z^n - 1).$$

Wykażemy, że istnieje taka liczba $p_0 \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $p \geq p_0$ zachodzi nierówność

$$|\psi_p(z)| \leq \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|}, \quad |z| < 1. \quad (8.15)$$

W tym celu udowodnimy, że analogiczny warunek zachodzi dla $\psi_{p,q}(z)$ przy dowolnym $q \in \mathbb{N}$. Oznaczmy $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$. Ze wzoru na różnicę n -tych potęg otrzymujemy²

$$\begin{aligned} \psi_{p,q}(z) &= (z-1) \sum_{n=p+1}^{p+q} a_n(1+z+z^2+\dots+z^{n-1}) \\ &= (z-1) \left\{ (S_{p+q} - S_p) \cdot 1 + (S_{p+q} - S_p) \cdot z + \dots \right. \\ &\quad \left. + (S_{p+q} - S_p) \cdot z^p + (S_{p+q} - S_{p+1}) \cdot z^{p+1} + \dots + (S_{p+q} - S_{p+q-1}) \cdot z^{p+q-1} \right\}. \end{aligned}$$

S_N są sumami częściowymi szeregu zbieżnego. Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje takie p_0 , iż dla wszystkich $k, l \geq p_0$ zachodzi nierówność $|S_k - S_l| \leq \eta$. Z nierówności trójkąta otrzymujemy zatem dla $p \geq p_0$ i dowolnego $q \in \mathbb{N}$

$$|\psi_{p,q}(z)| \leq |z-1| \cdot \eta \cdot \sum_{j=0}^{p+q-1} |z|^j \leq |z-1| \cdot \eta \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |z|^j = \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|}$$

Przechodząc teraz do granicy $q \rightarrow \infty$, otrzymujemy warunek (8.15).

Krok 2. Oszacujmy różnicę $g(z) - S$ następująco:

$$\begin{aligned} |g(z) - S| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n - 1) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^p a_n (z^n - 1) \right| + \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n (z^n - 1) \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^p a_n (z^n - 1) \right| + |\psi_p(z)| \stackrel{(8.15)}{\leq} \left| \sum_{n=0}^p a_n (z^n - 1) \right| + \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|}. \end{aligned}$$

Liczba $p \geq p_0$ jest odtąd ustalona. Wielomian $W(z) = \sum_{n=0}^p a_n (z^n - 1)$ jest ciągly i mamy $W(1) = 0$. Dlatego istnieje liczba $\delta_1 > 0$ taka, że $|W(z)| < \eta$ dla $|1-z| < \delta_1$. Zatem

$$|g(z) - S| < \eta + \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|} \quad \text{dla } |z| < 1, |1-z| < \delta_1. \quad (8.16)$$

²Proszę sobie przypomnieć dowód kryterium Abela: tam wykonywaliśmy podobny rachunek.

Krok 3. Jeśli $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, to istnieje taka liczba $\delta_2 > 0$, że

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos \alpha} \quad \text{dla } z \in T(1, \alpha), |1-z| < \delta_2. \quad (8.17)$$

Istotnie, niech $1-z = re^{i\theta}$, gdzie wobec definicji zbioru $T(1, \alpha)$ kąt $\theta \in (-\alpha, \alpha)$. Mamy

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (1 - re^{i\theta}) \cdot (1 - re^{-i\theta}) = 1 - 2r \cos \theta + r^2$$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{|1-z|}{1-|z|} &= \frac{|1-z|(1+|z|)}{1-|z|^2} = \frac{r(1+|z|)}{2r \cos \theta - r^2} = \frac{1+|z|}{2 \cos \theta - r} \\ &\leq \frac{2}{2 \cos \theta - r} \quad \text{dla } z = 1 - re^{i\theta} \in T(1, \alpha). \end{aligned}$$

Niech $\delta_2 = \cos \alpha$. Dla $\theta \in (-\alpha, \alpha)$ jest $\cos \theta > \cos \alpha > 0$. Jeśli $|1-z| = r < \delta_2 = \cos \alpha$, to wtedy

$$2 \cos \theta - r > 2 \cos \theta - \cos \alpha > \cos \alpha.$$

Dlatego

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2 \cos \theta - r} \leq \frac{2}{\cos \alpha}, \quad z \in T(1, \alpha), \quad |1-z| < \delta_2 = \cos \alpha$$

Otrzymaliśmy więc (8.17).

Krok 4. Zakończenie dowodu. Niech $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Gdy $|1-z| < \delta$ i $z \in T(1, \alpha)$, możemy jednocześnie korzystać z oszacowań (8.16) i (8.17). Otrzymujemy dla takich z nierówność

$$|g(z) - S| \stackrel{(8.16)}{<} \eta + \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|} \stackrel{(8.17)}{\leq} \eta \left(1 + \frac{2}{\cos \alpha} \right) < \varepsilon,$$

o ile np.

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{\cos \alpha} \right)^{-1}.$$

Dowód twierdzenia Abela jest zakończony. \square

Jest oczywiste, że stosując twierdzenie Abela do funkcji analitycznych zmiennej rzeczywistej, otrzymujemy następujący fakt.

Wniosek 8.29. Niech $a_n \in \mathbb{R}$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$ i niech

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{dla } x \in (-R, R), \quad \text{gdzie } \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Załóżmy, że szereg potęgowy definiujący funkcję g jest zbieżny w którymś końcu przedziału $(-R, R)$ i ma w nim sumę równą S . Wówczas g ma w tym końcu przedziału zbieżności granicę jednostronną równą S .

Inaczej mówiąc, zachodzi następujący wniosek.

Wniosek 8.30 (ciągłość szeregu potęgowego w końcu przedziału zbieżności). Załóżmy, że szereg potęgowy

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

o współczynnikach rzeczywistych ma promień zbieżności równy R . Jeśli suma $g(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ jest skończona, to funkcja g jest ciągła na $(-R, R]$.

Przykład 8.31 (suma szeregu anharmonicznego). Rozważmy szereg potęgowy

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Łatwo sprawdzić, że ma on promień zbieżności 1. Ponadto, różniczkując wyraz po wyrazie otrzymujemy

$$g'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}.$$

Dlatego $g(x) = \ln(1+x)$ na $(-1, 1)$: pochodna różnicy tych funkcji znika, więc różnica jest stała, ale dla $x = 0$ jest równa 0, więc jest równa zero dla wszystkich $|x| < 1$. (Podobny argument widzieliśmy w Przykładzie 7.22).

Dla $x = 1$ szereg $g(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ jest zbieżny (kryterium Leibniza). Na mocy Wniosku 8.30 jest więc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Wykorzystaliśmy więc twierdzenie Abela, żeby obliczyć sumę $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$. \square

Przykład 8.32 (szereg Leibniza o sumie $\frac{\pi}{4}$). Niech

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Podobnie jak poprzednio, sprawdzamy, że

$$g'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Mamy też $(\arctg x)' = 1/(1+x^2)$ i $\arctg 0 = g(0) = 0$. Wnioskujemy, że $g(x) = \arctg x$ dla $|x| < 1$. Jednak dla $x = 1$ szereg definiujący funkcję g jest szeregiem zbieżnym (znów wolno użyć kryterium Leibniza). Dlatego na mocy Wniosku 8.30

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctg x = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Szereg po lewej stronie nie nadaje się w praktyce do obliczania π , gdyż jest zbieżny bardzo wolno. Obliczając np. sumę 1000 początkowych wyrazów, otrzymujemy przybliżenie $\pi \approx 3,14059\dots$, różniące się od π już na trzecim miejscu po przecinku.

Zadanie 8.33. Wykazać, że istnieje taka stała $c > 0$, że

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \right| \geq \frac{c}{N} \quad \text{dla } N = 1, 2, \dots$$

8.6 Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy

Do tej pory omijaliśmy następujący ogólny problem. Niech $f: K_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$, lub $f: \mathbb{R} \supset (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$. Kiedy f rozwija się w szereg potęgowy, zbieżny do f w pewnym otoczeniu zera?

Odpowiedź na to pytanie jest inna w przypadku zespolonym, inna zaś w przypadku rzeczywistym. W dziedzinie zespolonej warunkiem koniecznym i dostatecznym rozwijalności funkcji w szereg potęgowy jest istnienie f' ; Czytelnik pozna ten zaskakujący na pierwszy rzut oka fakt, ucząc się teorii funkcji analitycznych. Natomiast w przypadku rzeczywistym założenie $f \in C^\infty$ jest koniecznym warunkiem rozwijalności w szereg potęgowy, ale nawet ono nie wystarcza: wspomnieliśmy o tym, omawiając funkcję (8.9).

Jeśli f jest w pewnym otoczeniu zera gładka, tzn. ma pochodne wszystkich rzędów, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ możemy napisać, posługując się np. wzorem Taylora,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x). \quad (8.18)$$

Lemat 8.34. Niech $f: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞ . Następujące warunki są równoważne.

- (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ w przedziale $|x| < \eta \leq R$;
- (b) Dla każdego $x \in (-\eta, \eta)$ reszta $r_n(x)$, określona wzorem (8.18), dąży do zera dla $n \rightarrow \infty$.

Dowód. Jeśli f jest na przedziale $(-\eta, \eta)$ sumą zbieżnego szeregu potęgowego, to r_n , równa różnicy f i n -tej sumy częściowej tego szeregu, dąży do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Na odwrót, gdy $r_n(x) \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$, to przechodząc do granicy $n \rightarrow \infty$ we wzorze (8.18), otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = f(x).$$

Przykład 8.35 (szereg dwumienny). Niech $a \in \mathbb{R}$. Wykażemy, że funkcja

$$f(x) = (1+x)^a, \quad \mathbb{R} \ni x > -1,$$

jest sumą szeregu potęgowego zbieżnego na przedziale $(-1, 1)$. Połóżmy

$$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!} \quad (8.19)$$

(Dla $a \in \mathbb{N}$, $a \geq n$, definicja jest taka sama, jak definicja współczynnika dwumianowego, z którą spotykaliśmy się wcześniej). Wykażemy, że

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad |x| < 1. \quad (8.20)$$

Dla $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ wzór (8.20) wynika wprost z dwumianu Newtona. Współczynniki dwumianowe (8.19) są wtedy zerami dla wszystkich $n > a$ i suma w (8.20) jest skończona.

Ustalmy liczbę $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$. Niech $a_n = \binom{a}{n}$. Wtedy

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right| \rightarrow 1, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

Dlatego $|a_n|^{1/n} \rightarrow 1$, gdy $n \rightarrow \infty$ (patrz Przykład A.5). Szereg po prawej stronie (8.20) ma więc promień zbieżności 1. Obliczając pochodne funkcji $f(x) = (1+x)^a$, łatwo stwierdzamy, że

$$f^{(n)}(x) = a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)(1+x)^{a-n} \quad (8.21)$$

i dlatego

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!} = \binom{a}{n}.$$

Wiemy już zatem, że jeśli f rozwija się wokół zera w szereg potęgowy, to jest to szereg (8.20). Pozostaje sprawdzić warunek z ostatniego lematu, tzn. zbieżność reszty $r_n(x)$ do zera dla $n \rightarrow \infty$. Posłużymy się w tym celu wzorem na resztę w postaci Schlömilcha–Roche’a,

$$f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = r_n(x) \stackrel{(6.18)}{=} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!p} (1-\theta)^{n+1-p} x^{n+1}, \quad \theta = \theta(x, n, p) \in (0, 1).$$

(Patrz Twierdzenie 6.59, wzór (6.18) – użyliśmy numeru n zamiast k , a punkt $x_0 = 0$.) Będziemy pracować z $p = 1$; w tym przypadku reszta Schlömilcha–Roche’a nazywa się *resztą Cauchy’ego*. Podstawiając $f(x) = (1+x)^a$ i $p = 1$, otrzymujemy dzięki (8.21)

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n)(1+\theta x)^{a-n-1}}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= \binom{a-1}{n} x^n \cdot a(1+\theta x)^{a-n-1} \cdot x(1-\theta)^n \\ &= \binom{a-1}{n} x^n \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \cdot ax(1+\theta x)^{a-1}. \end{aligned}$$

Przeanalizujemy teraz zachowanie każdego z trzech czynników w ostatnim wyrażeniu. Ustalmy $x \in (-1, 1)$. Po pierwsze,

$$\binom{a-1}{n} x^n \rightarrow 0 \quad \text{dla } n \rightarrow \infty.$$

Jest to warunek konieczny (zbadanej wcześniej) zbieżności szeregu po prawej stronie (8.20) dla parametru $a-1$ (zamiast a). Po drugie, $(1-\theta)/(1+\theta x) \in (0, 1)$, gdy $x > -1$ i $\theta \in (0, 1)$. Dlatego

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \in (0, 1) \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}, x \in (-1, 1).$$

Po trzecie wreszcie, mamy $2 > 1+\theta x \geq 1-\theta|x| > 1-|x| > 0$. Dlatego czynnik $ax(1+\theta x)^{a-1}$ też jest ograniczony,³ gdyż funkcja $t \mapsto t^{a-1}$ jest ograniczona na przedziale $[1-|x|, 2]$. Reszta $r_n(x)$ jest zatem (przy ustalonym x) iloczynem czynnika, który zbiega do zera przy $n \rightarrow \infty$ oraz dwóch czynników, które są ograniczone. Mamy więc $r_n(x) \rightarrow 0$; to kończy dowód wzoru (8.20). \square

³Wprawdzie w zapisie tego czynnika nie widać jawnej zależności od n , ale pamiętajmy, że liczba θ zależy i od x , i od n .

Rozdział 9

Całka

W tym rozdziale zajmujemy się całkowaniem. Jest to, obok różniczkowania i znajdowania wszelakich granic, jedna z najważniejszych operacji w całej analizie matematycznej.

Mówiąc niezbyt precyzyjnie, całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania. Dlatego wiele reguł i twierdzeń, opisujących własności różniczkowania, można natychmiast, bez żadnego trudu, przełożyć na odpowiednie własności całkowania. Jednak, o ile różniczkowanie funkcji elementarnych jest zajęciem mechanicznym (wystarczy nauczyć się pewnej liczby wzorów i uważnie je stosować), o tyle całkowanie funkcji elementarnych wymaga większej biegłości i wiąże się (czasem) z różnymi utrudnieniami, o których jeszcze wspomnimy.

Zobaczymy, że obliczanie całki (oznaczonej) polega w istocie na uśrednianiu wartości funkcji (na pewnym przedziale). Taki jest podstawowy sens operacji całkowania. Dzięki temu całkowanie przydaje się m.in. w geometrii, do obliczania długości krzywych oraz pól i objętości różnych figur i brył, a także wszędzie tam – np. w fizyce i matematycznych metodach finansów i ekonomii – gdzie trzeba znaleźć średnią wartość jakiejś wielkości, która zmienia się np. wraz z biegiem czasu.

9.1 Całka nieoznaczona

Definicja 9.1. Niech $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym przedziałem. *Całką nieoznaczoną* funkcji f nazywamy rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f .

Przypomnijmy, że F jest funkcją pierwotną f na P , gdy $F' = f$ na P . Wiemy już, że każda funkcja ciągła $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną (patrz Twierdzenie 7.34) i że dowolne dwie funkcje pierwotne $F_1, F_2: P \rightarrow \mathbb{R}$ tej samej funkcji f różnią się o stałą (patrz Stwierdzenie 7.33).

Używa się zwykle zapisu

$$\int f(x) dx = F(x) + \text{const}, \quad (9.1)$$

gdzie F jest dowolnie wybraną funkcją pierwotną f na danym przedziale.

Uwaga 9.2. Jeśli naturalną dziedziną f nie jest przedział, tylko suma dwóch lub więcej rozłącznych przedziałów, to wtedy różnica dwóch funkcji pierwotnych f *nie musi* być stała.

Niech np. $f(x) = -1/\sin^2 x$ dla $x \in U = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Wiemy, że $F_1(x) = \operatorname{ctg} x$ jest na zbiorze U funkcją pierwotną f , bo $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$. Niech

$$F_2(x) = \operatorname{ctg} x + k \quad \text{dla } x \in (k\pi, (k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(Na każdym z przedziałów $(k\pi, (k+1)\pi)$ przesuwamy wykres cotangensa o inną stałą). Wtedy także $F_2'(x) = -1/\sin^2 x$, ale $F_2 - F_1$ nie jest funkcją stałą na dziedzinie cotangensa, tylko funkcją stałą na każdym przedziale zawartym w dziedzinie cotangensa. O takich funkcjach mówi się czasem, że są *lokalnie stałe*.

Warto zatem interpretować literę C we wzorze (9.1) jako *funkcję lokalnie stałą*. Jeśli dziedzina f jest przedziałem, chodzi po prostu o stałą.

Przykład 9.3. Dzięki wzorom na pochodne wybranych funkcji elementarnych otrzymujemy natychmiast długą listę wzorów na całki nieoznaczone:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1; \quad (9.2)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad (9.3)$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad (9.4)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad (9.5)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad (9.6)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad (9.7)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C, \quad (9.8)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C. \quad (9.9)$$

Wzór (9.2) wolno stosować na każdym przedziale, na którym można określić funkcję x^a – w szczególności, dla wymiernych $a = p/q$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$, $q = 2k+1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, wzór ten ma sens na całej prostej.

Posługując się wzorami (9.3) i (9.7), należy pamiętać, że litera C może oznaczać inną stałą na każdym z przedziałów, których suma stanowi dziedzinę całkowanej funkcji. Mamy tu do czynienia z tym samym zjawiskiem, o którym była mowa w Uwadze 9.2.

Powyższa lista wzorów nie jest kompletna. Nie ma na niej np. wzoru na całkę z tangensa czy z logarytmu naturalnego, bo tg i \ln nie znalazły się wśród wyników wzorów na pochodne w podrozdziale 6.2. Aby obliczyć takie całki, trzeba nauczyć się kilku dodatkowych reguł. Wspomnijmy jednak, że bywa i tak, że całki z funkcji elementarnej *nie można* wyrazić przez funkcje elementarne (choć wiadomo z Twierdzenia 7.34). Najważniejszy przykład takiej sytuacji to $\int \exp(-x^2) dx$, która nie wyraża się przez funkcje elementarne, tzn. przez skończoną liczbę operacji algebraicznych i składania na wielomianach, funkcji wykładniczej, funkcjach trygonometrycznych i funkcjach odwrotnych do nich.

9.1.1 Własności całek nieoznaczonych

Stwierdzenie 9.4 (liniowość całki). *Jeśli $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe, zaś $a, b \in \mathbb{R}$, to*

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

(Dzięki powyższemu wzorowi można obliczać np. całki wszystkich wielomianów.)

Dowód. Stosujemy wzór na pochodną sumy: jeśli $F' = f$ i $G' = g$, to dla wszystkich stałych $a, b \in \mathbb{R}$ jest $(aF + bG)' = af + bg$. \square

Stwierdzenie 9.5 (wzór na całkowanie przez części). *Jeśli $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne, to*

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Dowód. Całkujemy obie strony wzoru na pochodną iloczynu, $(fg)' = fg' + f'g$, a następnie jedną z całek przeliczamy z prawej strony na lewą. \square

Przykład 9.6. 1. Obliczymy $\int \ln x dx$. Niech $g'(x) = 1$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$ (uwaga w nawiasie: funkcja g nie jest określona jednoznacznie przez wybór g' ; ustalamy g w sposób najwygodniejszy z możliwych) oraz $f'(x) = 1/x$. Zatem

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C. \quad (9.10)$$

2. Obliczymy całki $I = \int \sin^2 x dx$ oraz $J = \int \cos^2 x dx$. Zastosujmy wzór na całkowanie przez części do I . Biorąc $f(x) = \sin x$ i $g(x) = -\cos x$, otrzymamy

$$\int \sin^2 x dx = \int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx,$$

tzn. $I - J = -\sin x \cos x = -\frac{1}{2} \sin 2x$. Natomiast

$$I + J = \int (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int 1 dx = x + C.$$

Dodając otrzymane równania stronami, otrzymujemy $2I = x - \frac{1}{2} \sin 2x + C$. Zatem

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C, \quad \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

(Zmieniliśmy oznaczenie stałej, ale to przecież nam wolno.)

Inne zastosowania wzoru na całkowanie przez części będziemy widywać regularnie.

Stwierdzenie 9.7 (wzór na całkowanie przez podstawienie). *Niech f, g' będą ciągłe i niech F będzie funkcją pierwotną f . Wtedy*

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Uwaga 9.8. Dla pełnej precyzji, należałoby zakładać, że g, g' są ciągłe na pewnym przedziale I , zaś $f = F'$ i F są ciągłe na przedziale $J = g(I)$.

Dowód. Stosujemy wzór na pochodną złożenia: $(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$. \square

Przykład 9.9. Niech $f(y) = 1/y$, $g(x) = \cos x$ oraz $F(y) = \ln |y|$. Otrzymujemy

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)) + C = \ln |\cos x| + C.$$

Łatwo sprawdzić, że taką samą metodą otrzymamy nieco ogólniejszy wzór

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C. \quad (9.11)$$

(Dla dowodu, można też po prostu zróżniczkować obie strony).

Zanim omówimy kolejne przykłady zastosowań wzoru na całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie, wspomnimy o tradycyjnych obyczajach, związanych z roboczym zapisem rachunków takich, jak w ostatnim przykładzie.

Uwaga 9.10 (tradycyjny sposób manewrowania symbolami dx, dy). Nie wyjaśniliśmy dotąd znaczenia symbolu dx . Samo oznaczenie pochodzi jeszcze z czasów Newtona i Leibniza i wiąże się z geometryczną interpretacją całek oznaczonych, którą poznamy niedługo.

Jeśli $y = g(x)$, gdzie $g: I \rightarrow g(I) \subset \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na przedziale I , to będziemy pisać $dy = g'(x) \, dx$. Zauważmy, że jeśli funkcja g jest różnowartościowa, a jej pochodna g' nie znika, to wtedy $x = g^{-1}(y)$ i zgodnie z przyjętą przed chwilą konwencją

$$dx = (g^{-1}(y))' \, dy \stackrel{\text{Stw. 6.14}}{=} \frac{1}{g'(x)} \, dy$$

dzięki wzorowi na pochodną funkcji odwrotnej. Jest więc *tak, jakby wzór $dy = g'(x) \, dx$ można było przekształcać tak, jak równość dotyczącą liczb rzeczywistych*.

Wzór na całkowanie przez podstawienie zapisuje się czasem

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{=y}) \underbrace{g'(x) \, dx}_{=dy} = \int f(y) \, dy = F(y) + C = F(g(x)) + C.$$

Taki zapis być może lepiej wyjaśnia nazwę *całkowanie przez podstawienie*.

Przykład 9.11. Aby obliczyć całkę $\int x \exp(-x^2) \, dx$ podstawiamy $y = x^2$, $dy = 2x \, dx$ i rachujemy:

$$\int x \exp(-x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int \exp(-y) \, dy = -\frac{1}{2} \exp(-y) + C = -\frac{1}{2} \exp(-x^2) + C.$$

9.1.2 Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcją wymierną nazywamy każdą funkcję $W(x) = P(x)/Q(x)$, gdzie P i Q są wielomianami. Będziemy zakładać, że P i Q mają współczynniki rzeczywiste, oraz mówić, że W jest funkcją wymierną zmiennej rzeczywistej. Za dziedzinę W uznajemy – przy założeniu, że ilorazu P/Q nie można skrócić przez żaden czynnik liniowy $(x - a)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ – zbiór \mathbb{R} z usuniętymi pierwiastkami wielomianu Q .

Najwygodniej jest od razu zakładać, że wielomiany P i Q są *względnie pierwsze*, tzn. nie mają żadnego wspólnego dzielnika D , który byłby wielomianem dodatniego stopnia.

Okazuje się, że całkę z każdej funkcji wymiernej W można wyrazić przez funkcje elementarne, rozkładając W na sumę odpowiednich składników.

Definicja 9.12 (ułamki proste pierwszego rodzaju). Każdą funkcję wymierną

$$\frac{A}{(x - a)^k},$$

gdzie $a, A \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$, nazywamy *ułamkiem prostym pierwszego rodzaju*.

Definicja 9.13 (ułamki proste drugiego rodzaju). Każdą funkcję wymierną

$$\frac{Cx + D}{(x^2 + cx + d)^k},$$

gdzie $c, d, C, D \in \mathbb{R}$, $c^2 - 4d < 0$ i $k \in \mathbb{N}$, nazywamy *ułamkiem prostym drugiego rodzaju*.

Algorytm całkowania funkcji wymiernych oparty jest na następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 9.14 (rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste). Każda funkcja wymierna $W(x) = P(x)/Q(x)$ jest sumą pewnego wielomianu i skończonej liczby ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju. Mianowniki tych ułamków prostych są dzielnikami wielomianu Q .

Uwaga 9.15. Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste jest jednoznaczny (z dokładnością do kolejności składników), jeśli założyć, że składnik o danym mianowniku może występować tylko jeden raz.

Twierdzenie o rozkładzie na ułamki proste należy bardziej do algebry, niż do analizy. Dlatego nie będziemy przedstawiać jego kompletnego, szczegółowego dowodu.

SZKIC DOWODU TWIERDZENIA 9.14. Krok 1. Wykonując dzielenie P przez Q z resztą, można zapisać $W = P_1 + (P_2/Q)$, gdzie P_1 i P_2 są wielomianami i stopień P_2 jest mniejszy, niż stopień Q . Wystarczy zatem rozpatrzyć przypadek $W = P/Q$, gdzie $\deg P < \deg Q$. Najważniejszym narzędziem jest prosty fakt z algebry, który sformułujemy tu jako zadanie.

Zadanie 9.16. Jeśli wielomiany Q_1, Q_2 są względnie pierwsze, to istnieją wielomiany V_1, V_2 o współczynnikach z \mathbb{R} takie, że $V_1(x)Q_1(x) + V_2(x)Q_2(x) = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wskazówka. Niech \mathcal{W} oznacza zbiór wszystkich wielomianów $V_1(x)Q_1(x) + V_2(x)Q_2(x)$ (dla różnych V_1, V_2). Sprawdzić, że $Q_1, Q_2 \in \mathcal{W}$. Oznaczyć przez D taki wielomian w zbiorze \mathcal{W} , który ma najmniejszy stopień¹ i współczynnik 1 przy najstarszej potęgze x . Posługując się twierdzeniem Bezouta, wykazać, że D dzieli Q_1 i Q_2 . Wywnioskować, że $D \equiv 1$.

¹W każdym niepustym podzbiornie \mathbb{N} istnieje element najmniejszy.

Dalszy ciąg dowodu Twierdzenia 9.14 jest następujący: jeśli $Q = Q_1 Q_2$, gdzie Q_i są względnie pierwsze, to dobieramy V_1, V_2 , o których mówi powyższe zadanie, i piszemy

$$\frac{P}{Q} = \frac{P \cdot 1}{Q} = \frac{P(V_1 Q_1 + V_2 Q_2)}{Q_1 Q_2} = \frac{P V_1}{Q_2} + \frac{P V_2}{Q_1}.$$

Następnie powtarzamy *krok 1* dla każdego z tych ułamków. Cały zabieg kontynuujemy dopóty, dopóki mianowniki można rozkładać na czynniki, które są względnie pierwsze. (Patrz Wniosek A.13). Po skończonej liczbie kroków dojdziemy do przedstawienia

$$W(x) = P_N(x) + \sum_{j=1}^{M_1} \frac{L_{1,j}(x)}{(x - a_j)^{k_j}} + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{L_{2,j}(x)}{(x^2 + c_j x + d_j)^{n_j}} \quad (9.12)$$

gdzie $\deg L_{1,j} < k_j$ i $\deg L_{2,j} < 2n_j$.

Dzieląc liczniki $L_{1,j}$ przez $(x - a_j)$, a $L_{2,j}$ przez $(x^2 + c_j x + d_j)$, można po skończonej liczbie kroków², ewentualnie zwiększając liczbę składników po prawej stronie (9.12), dojść do sytuacji, gdy wszystkie liczniki $L_{1,j}$ są stałymi, a wszystkie liczniki $L_{2,j}$ – wielomianami liniowymi. \square

Aby scałkować funkcję wymierną, wystarczy rozłożyć ją na ułamki proste i scałkować każdy z nich. Popatrzmy na konkretne przykłady.

Przykład 9.17. Obliczmy całkę

$$I = \int \frac{x^6}{(x-1)(x+1)^2} dx.$$

Dzieląc licznik x^6 przez $(x-1)(x+1)^2 = (x^2-1)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$, otrzymujemy wynik $x^3 - x^2 + 2x - 2$ i resztę $3x^2 - 2$. Dlatego

$$\begin{aligned} I &= \int (x^3 - x^2 + 2x - 2) dx + \int \frac{3x^2 - 2}{(x-1)(x+1)^2} dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + \int \frac{3(x^2 - 1) + 1}{(x-1)(x+1)^2} dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + 3 \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + 3 \ln|x+1| + \underbrace{\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}}_{=(\text{ozn.}) J}. \end{aligned}$$

Pozostaje obliczyć całkę J . Znajdziemy w tym celu stałe $a, b, c \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}.$$

(Ogólnie, jeśli $(x-a)^k$ dzieli mianownik funkcji wymiernej, to przewidujemy, że w rozkładzie na ułamki proste znajdują się $A_j/(x-a)^j$ dla wszystkich $j = 1, 2, \dots, k$). Sprawdzając składniki lewej strony do wspólnego mianownika $(x-1)(x+1)^2$, dodając ułamki i

²Jeśli $L(x) = K(x)(x-a) + R$, gdzie $\deg K < \deg L$, to $L(x)/(x-a)^k = R/(x-a)^k + K(x)/(x-a)^{k-1}$. Potem dzielimy $K(x)$ przez $x-a$ itd. Podobnie robimy ze składnikami drugiej sumy w (9.12).

przyporównując otrzymany licznik do licznika prawej strony, otrzymujemy – z porównania współczynników przy x^2 , x i $x^0 = 1$ – układ równań:

$$a + b = 0, \quad 2a + c = 0, \quad a - b - c = 1.$$

Stąd $a = -b$ (pierwsze równanie) i $3a - b = 1$ (suma drugiego i trzeciego równania), tzn. $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = -2a = -\frac{1}{2}$. Zatem

$$J = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} \stackrel{(9.2), (9.3)}{=} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + C.$$

Ostatecznie więc

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + 3 \ln |x+1| + J \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + \frac{11}{4} \ln |x+1| + \frac{1}{4} \ln |x-1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

Przykład 9.18. Znajdziemy całkę nieoznaczoną funkcji $1/(1+x^4)$. Rozłóżmy mianownik na czynniki. Otóż, $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$. (Czytelnik może także rozwiązać równanie $x^4 + 1 = 0$ w \mathbb{C} i pogrupować w pary liczb sprzężonych jego pierwiastki, żeby wyznaczyć ten rozkład nieco inną metodą).

Spodziewamy się zatem, że

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

Jak w poprzednim przykładzie, dodając ułamki i porównując współczynniki liczników obu stron przy x^k dla $k = 3, 2, 1, 0$, otrzymujemy układ równań

$$A + C = 0, \quad B + D + \sqrt{2}(A - C) = 0, \quad A + C + \sqrt{2}(B - D) = 0, \quad B + D = 1.$$

Z pierwszego i trzeciego równania otrzymujemy $B - D = 0$, więc dzięki czwartemu równaniu jest $B = D = \frac{1}{2}$. Dalej, $A = -C$ i z równania drugiego $1 + \sqrt{2} \cdot (-2C) = 0$, a więc $C = \frac{1}{2\sqrt{2}} = -A$. Zatem

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}. \quad (9.13)$$

Scałkujemy drugi ułamek. Sprowadzając trójmian w mianowniku do postaci kanonicznej, a następnie zapisując licznik jako kombinację pochodnej mianownika i stałej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{(2x + \sqrt{2}) + \sqrt{2}}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \underbrace{\int \frac{dx}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}}_{=J}. \end{aligned}$$

Ostatnią całkę łatwo obliczamy przez podstawienie, pisząc

$$J = 2 \int \frac{dx}{\underbrace{\left(\sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2}_{=t} + 1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \sqrt{2} \cdot \arctg t + C = \sqrt{2} \cdot \arctg (x\sqrt{2} + 1) + C.$$

Dodając otrzymane wyrażenia, otrzymujemy

$$\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg (x\sqrt{2} + 1) + C.$$

Drugi z ułamków w (9.13) można albo scałkować tak samo, albo (lepiej!) zauważając, że podstawienie $-x = y$, $-dx = dy$ pozwoli skorzystać z już wykonanych rachunków:

$$\begin{aligned} \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx &= - \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}y + \frac{1}{2}}{y^2 + y\sqrt{2} + 1} dy \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(y^2 + y\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg (y\sqrt{2} + 1) + C \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg (-x\sqrt{2} + 1) + C. \end{aligned}$$

Dodając całki z obu ułamków prostych i korzystając z nieparzystości arcus tangensa, otrzymujemy wynik

$$\int \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\arctg (x\sqrt{2} + 1) + \arctg (x\sqrt{2} - 1) \right) + C. \quad (9.14)$$

Oto drugi, nieco inny sposób obliczenia tej samej całki. Mamy

$$\frac{2}{1 + x^4} = \frac{1 - x^2}{1 + x^4} + \frac{1 + x^2}{1 + x^4}.$$

Zajmijmy się drugim składnikiem. Jest

$$\frac{1 + x^2}{1 + x^4} = \frac{x^{-2} + 1}{x^{-2} + x^2} = \frac{(x - x^{-1})'}{(x - x^{-1})^2 + 2}.$$

Dlatego, stosując podstawienie $y = x - x^{-1}$, $dy = (x - x^{-1})' dx$, otrzymujemy

$$\int \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx = \int \frac{dy}{y^2 + 2} =: J.$$

Teraz, podstawiając $y = t\sqrt{2}$, znajdujemy

$$J = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg t + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{y}{\sqrt{2}} + C,$$

co, po powrocie do zmiennej x , daje wynik

$$\int \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x\sqrt{2}} \right) + C.$$

Podobnie można obliczyć całkę funkcji $(1 - x^2)/(1 + x^4)$. Tym razem warto skorzystać z podstawienia $y = x + x^{-1}$, $dy = (1 - x^{-2}) dx$. Stosując je, dostaniemy

$$\int \frac{1 - x^2}{1 + x^4} dx = - \int \frac{dy}{y^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{y + \sqrt{2}}{y - \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + C.$$

(Środkową równość otrzymujemy, rozkładając $1/(y^2 - 2)$ na sumę ułamków prostych o mianownikach $y \pm \sqrt{2}$). Dodając oba wyniki, otrzymamy tym razem

$$2 \int \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x\sqrt{2}} \right) + C. \quad (9.15)$$

Na pierwszy rzut oka, ten wzór różni się od (9.14). Formalnie biorąc, prawa strona nie jest określona dla $x = 0$, choć wyjściowa funkcja była ciągła na \mathbb{R} , a więc powinna mieć na całej prostej funkcję pierwotną.

Zadanie 9.19. Udowodnić tożsamość

$$\operatorname{arc\,tg} t + \operatorname{arc\,tg} s = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{t + s}{1 - ts} \right), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad t \cdot s \neq 1.$$

Sprawdzić, że wzory (9.14) i (9.15) dają w istocie ten sam wynik. Jak należy interpretować wzór (9.15) w punkcie $x = 0$?

Pokażemy jeszcze, jak oblicza się całki z ułamków prostych drugiego rodzaju, których mianownik jest k -tą potęgą trójmianu kwadratowego dla jakiegoś $k > 1$. Można to zrobić rekurencyjnie, w następujący sposób.

Po pierwsze, całkując przez podstawienie ($y = 1 + x^2$) otrzymujemy

$$J_k = \int \frac{2x dx}{(1 + x^2)^k} = \int \frac{dy}{y^k} = \frac{1}{(1 - k)} y^{1-k} + C = \frac{1}{(1 - k)} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^{k-1}} + C. \quad (9.16)$$

Jest

$$\int \frac{Ax + B}{(1 + x^2)^k} = \frac{A}{2} J_k + B I_k, \quad \text{gdzie} \quad I_k = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^k}.$$

Pozostaje zobaczyć, jak się oblicza I_k . Piszemy, całkując przy przejściu do drugiej linijki przez części, z wykorzystaniem wzoru (9.16),

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(1 + x^2)^k} dx = I_{k-1} - \int \underbrace{\frac{x}{2}}_{=f} \cdot \underbrace{\frac{2x}{(1 + x^2)^k}}_{=g'} dx \\ &= I_{k-1} - \underbrace{\frac{x}{2(1 - k)} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^{k-1}}}_{=f \cdot g} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1 - k)} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^{k-1}} dx \\ &= \left(1 + \frac{1}{2 - 2k} \right) I_{k-1} - \frac{x}{2(1 - k)} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^{k-1}}. \end{aligned}$$

Po skończonej liczbie takich kroków dojdziemy do całki I_1 , tzn. do całki z pochodnej arcus tangensa. Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju z mianownikiem innym,

niż $x^2 + 1$, można sprowadzić do powyższego, zapisując trójmian z mianownika w postaci kanonicznej i dokonując liniowych zamian zmiennych. Właśnie tak postępowaliśmy, całkując wzór (9.13).

Uwaga 9.20. Jak widzieliśmy, nie zawsze warto rozkładać funkcję wymierną na ułamki proste. Czasem całkowanie przez podstawienie szybciej prowadzi do wyniku. Oto jeszcze jeden przykład takiej sytuacji:

$$I = \int \frac{6x^5}{1+x^6} dx = \int \frac{dy}{1+y} = \ln|1+y| + C = \ln(1+x^6) + C.$$

Zastosowaliśmy podstawienie $x^6 = y$, $6x^5 dx = dy$.

9.1.3 Podstawienia Eulera, podstawienia trygonometryczne

Szereg całek można za pomocą odpowiednich podstawień sprowadzić do całkowania funkcji wymiernych.

Definicja 9.21. Wielomianem dwóch zmiennych o współczynnikach rzeczywistych nazywamy funkcję

$$P(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} a_{ij} x^i y^j, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(Przyjmujemy umowę $x^0 \equiv 1 \equiv y^0$.) Funkcją wymierną dwóch zmiennych nazywamy funkcję $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$, gdzie P i Q są wielomianami dwóch zmiennych.

Okazuje się, że jeśli R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, to obliczenie każdej z następujących całek:

$$\int R\left(x, \sqrt{\frac{Ax+B}{Cx+D}}\right) dx, \quad \text{gdzie } AD - BC \neq 0, \quad (9.17)$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad (9.18)$$

$$\int R(\cos x, \sin x) dx \quad (9.19)$$

można za pomocą odpowiednich podstawień sprowadzić do całkowania funkcji wymiernych jednej zmiennej.

CAŁKA (9.17). Wykonujemy podstawienie

$$\sqrt{\frac{Ax+B}{Cx+D}} = t. \quad (9.20)$$

Stąd $t^2(Cx+D) = (Ax+B)$, więc

$$x = \frac{Dt^2 - B}{A - Ct^2}; \quad (9.21)$$

różniczkując, otrzymujemy

$$dx = \frac{2Dt(A - Ct^2) + 2Ct(Dt^2 - B)}{(A - Ct^2)^2} dt = \frac{2t(AD - BC)}{(A - Ct^2)^2} dt. \quad (9.22)$$

Wstawiając (9.20)–(9.22) do całki (9.17), otrzymujemy całkę z funkcji wymiernej, którą można obliczyć, stosując algorytm opisany w poprzednim podrozdziale.

CAŁKA (9.18). Do tej całki można zastosować wiele podstawień. Najpierw opiszemy tak zwane podstawienia Eulera.

Pierwsze podstawienie Eulera. Jeśli $a > 0$, to podstawiamy

$$t \pm x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (9.23)$$

(można użyć zarówno plusa, jak i minusa). Po podniesieniu obu stron równania do kwadratu zredukuje się składnik ax^2 i wyznaczymy

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a} \cdot \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}. \quad (9.24)$$

Widać, że zarówno x , jak i pierwiastek z trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ wyrażają się przez funkcje wymierne zmiennej t ; ponadto, różniczkując prawą stronę pierwszego z równań (9.24), otrzymujemy

$$dx = \frac{2t(b \mp 2t\sqrt{a}) \pm 2\sqrt{a}(t^2 - c)}{(b \mp 2t\sqrt{a})^2} dt = \frac{\mp 2t^2\sqrt{a} + 2tb \mp 2c\sqrt{a}}{(b \mp 2t\sqrt{a})^2} dt. \quad (9.25)$$

Wstawiając (9.24) i (9.25), otrzymamy całkę z funkcji wymiernej jednej zmiennej.

Drugie podstawienie Eulera. Jeśli $c > 0$, to podstawiamy

$$tx - \sqrt{c} = \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (9.26)$$

Tym razem po podniesieniu obu stron równania do kwadratu zredukuje się wyraz wolny c , a następnie obie strony będzie można skrócić przez x . Otrzymamy po takim zabiegu

$$t^2x - 2t\sqrt{c} = ax + b, \quad \text{tzn.} \quad x = \frac{b + 2t\sqrt{c}}{t^2 - a}. \quad (9.27)$$

Dalej postępujemy tak, jak w poprzednim przypadku: widzimy, że $dx = W(t) dt$, gdzie W jest funkcją wymierną, która jest pochodną prawej strony drugiego równania (9.27). Czytelnik zechce sam uzupełnić szczegóły.

Trzecie podstawienie Eulera. Jeśli trójmian $ax^2 + bx + c$ ma pierwiastki rzeczywiste r, s , to

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm(x - r)\sqrt{a \cdot \frac{x - s}{x - r}}$$

(znak zależy od przedziału). Zatem, jak już widzieliśmy, można skorzystać z podstawienia

$$t = \sqrt{a \cdot \frac{x - s}{x - r}}. \quad (9.28)$$

Dla porządku dodajmy, że wszystkich szczegółów rachunków (9.23)–(9.28), związanych z podstawieniami Eulera, nie warto pamiętać. Dobrze jest wiedzieć, na jakiej sztuczce oparte jest działanie każdego z tych podstawień, tzn. znać wzory (9.23), (9.26) i (9.28) i rozumieć, że każdy z nich pozwala wyznaczyć x jako pewną funkcję wymierną zmiennej

t. Resztę rachunków i tak zwykle wykonuje się w razie potrzeby dla konkretnych danych liczbowych.

CAŁKA (9.18), INNA METODA. Zapisując trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem w postaci kanonicznej i używając liniowych zamian zmiennych $y = \alpha x + \beta$, można sprowadzić całkę (9.18) do postaci

$$\int R_1(y, \sqrt{\dots}) dy$$

gdzie R_1 jest funkcją wymierną, a drugim argumentem jest (w zależności od a, b i c) jeden z pierwiastków: (1) $\sqrt{1+y^2}$, (2) $\sqrt{1-y^2}$, lub wreszcie (3) $\sqrt{y^2-1}$. Można wtedy użyć funkcji trygonometrycznych, a także tzw. *funkcji hiperbolicznych*, zdefiniowanych następująco:

$$\cosh x = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (9.29)$$

$$\sinh x = -i \sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (9.30)$$

Jak łatwo sprawdzić,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}. \quad (9.31)$$

Dzięki tej tożsamości, dla $y = \sinh w$ jest $\sqrt{1+y^2} = \cosh w$. Zachodzą też wzory na pochodne

$$(\cosh w)' = \sinh w, \quad (\sinh w)' = \cosh w,$$

z których otrzymujemy $dy = \cosh w dw$. Zatem

$$I = \int R_1(y, \sqrt{1+y^2}) dy = \int R_1(\sinh w, \cosh w) \cosh w dw = \int R_2(e^w) dw,$$

gdzie R_2 jest pewną funkcją wymierną jednej zmiennej. Podstawiając teraz $z = e^w$, otrzymujemy $dz = e^w dw = z dw$, co daje wynik

$$I = \int R_2(z) \frac{dz}{z}.$$

Teraz można np. zastosować wiadomy algorytm całkowania funkcji wymiernych.

Zadanie 9.22. Podstawiając $y = \operatorname{tg} \varphi$, sprowadzić $\int R_1(y, \sqrt{1+y^2}) dy$ do całki typu (9.19).

Aby pozbyć się pierwiastka $\sqrt{y^2-1}$, stosujemy podstawienie $y = \cosh w$. Reszta rachunków jest podobna; Czytnik może wypisać je samodzielnie. Można także użyć podstawienia $y = 1/\cos \varphi$, które sprowadzi całkę $\int R_1(y, \sqrt{y^2-1}) dy$ do postaci (9.19).

W ostatnim z trzech przypadków, gdy mamy do czynienia z pierwiastkiem $\sqrt{1-y^2}$, można stosować podstawienie $y = \sin \varphi$. Pokażemy jego działanie na przykładzie.

Przykład 9.23. Obliczymy całkę

$$\int \sqrt{1-x^2} dx.$$

Dla wygody ustalmy, że funkcję podcałkową rozpatrujemy na przedziale $[0, 1]$. Niech $x = \sin \theta$, gdzie $\theta \in [0, \pi/2]$. Wtedy $dx = \cos \theta d\theta$ i $\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$. Zatem, ze wzoru na całkowanie przez podstawienie i tożsamości $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos^2 \theta d\theta = \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + C \\ &= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2 \arcsin x)}{4} + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

(Wyznaczając $\int \cos^2 \theta d\theta$, można też użyć Przykładu 9.6, tzn. całkować przez części).

Czytelnik może spróbować zastosować do obliczenia tej całki trzecie lub drugie podstawienie Eulera. Oba prowadzą do znacznie gorszych rachunków i wyniku zapisanego w innej postaci.

CAŁKA (9.19) I UNIWERSALNE PODSTAWIENIE TRYGONOMETRYCZNE. Całkę z funkcji wymiernej dwóch zmiennych $\cos x$ i $\sin x$ można zawsze sprowadzić do całki z funkcji wymiernej jednej zmiennej t , podstawiając $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Zauważmy, że wtedy

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

a ponadto

$$dt = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1+t^2}{2} dx,$$

tzn. $dx = 2(1+t^2)^{-1} dt$. Podstawiając te zależności do całki (9.19), rzeczywiście otrzymamy całkę z funkcji wymiernej jednej zmiennej. Więcej przykładów można znaleźć w drugim tomie książki Fichtenholza.

Na tym zakończymy przegląd metod obliczania całek nieoznaczonych. Więcej przykładów Czytelnik zobaczy z pewnością na ćwiczeniach.

9.2 Całka Newtona

Definicja 9.24. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Całką oznaczoną funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (9.32)$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f .

Uwaga 9.25. Definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru funkcji F pierwotnej dla f : jeśli F_1 jest inną funkcją pierwotną f , to $F_1 = F + \operatorname{const}$ (Stwierdzenie 7.33) i dlatego $F_1(b) - F_1(a) = F(b) - F(a)$.

Zgodnie z rozpowszechnioną konwencją, wzór (9.32) będziemy uznawać za definicję całki oznaczonej także w przypadku $b < a$.

Ze znanych już własności całek nieoznaczonych natychmiast otrzymujemy następującą stwierdzenia. Łatwe dowody (por. podrozdział 9.1.1) pominiemy.

Stwierdzenie 9.26 (liniowość całki oznaczonej). *Jeśli $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe, zaś $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Stwierdzenie 9.27 (wzór na całkowanie przez części dla całek oznaczonych). *Jeśli $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są klasy C^1 , to*

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Oznaczenia. Stosując ten wzór i definicję całki oznaczonej, będziemy czasem pisać

$$F \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad fg \Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Stwierdzenie 9.28 (wzór na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych). *Niech $g: [a, b] \rightarrow [g(a), g(b)]$ będzie funkcją klasy C^1 i niech f będzie ciągła na przedziale $[g(a), g(b)]$. Wówczas*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = F(g(b)) - F(g(a)),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną f .

Całka oznaczona jest szczególnie ważna z uwagi na swoją interpretację geometryczną. Zanim o niej powiemy, udowodnimy ściśle kilka kolejnych prostych własności całki.

Stwierdzenie 9.29 (addytywność całki jako funkcji przedziału). *Załóżmy, że f jest ciągła na przedziale $I \subset \mathbb{R}$ i niech $a, b, c \in I$. Wtedy*

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \tag{9.33}$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \tag{9.34}$$

Dowód. Niech F będzie funkcją pierwotną f na I . Wzór (9.34) wynika z równości

$$F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a),$$

natomiast (9.33) to kwestia interpretacji definicji całki oznaczonej. \square

Stwierdzenie 9.30 (monotoniczność całki). *Jeśli $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe i $f \geq g$ na $[a, b]$, to*

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Jeśli dodatkowo $f > g$ na (a, b) , to $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

Dowód. Niech Ψ będzie funkcją pierwotną $f - g$ na $[a, b]$. Ponieważ $\Psi' = f - g \geq 0$, więc Ψ jest niemalejąca. Dlatego

$$0 \leq \Psi(b) - \Psi(a) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Jeśli dodatkowo $f > g$ na (a, b) , to z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wnioskujemy, że Ψ jest (ściśle) rosnąca na $[a, b]$; dlatego w tym przypadku nierówność między całkami jest ostra. \square

Wniosek 9.31. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła. Wówczas

$$(b - a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) \sup_{[a,b]} f, \quad (9.35)$$

a ponadto, dla pewnego punktu $\xi \in (a, b)$, jest

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

Dowód. Nierówności (9.35) otrzymujemy, stosując dwukrotnie poprzednie twierdzenie do f i funkcji stałych $g_1 = \inf f \leq f$ oraz $g_2 = \sup f \geq f$. Trzeba tylko zauważyć, że dla dowolnej stałej $m \in \mathbb{R}$ jest $\int_a^b m dx = mx \Big|_a^b = m(b - a)$.

Drugą część wniosku otrzymujemy, zauważając, że

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

gdzie F jest funkcją pierwotną f . Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że prawa strona jest równa $f(\xi)$ dla pewnego $\xi \in (a, b)$. \square

Wniosek 9.32. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła. Wówczas

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (9.36)$$

Dowód. Ponieważ $f \leq |f|$, więc $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$ (Stwierdzenie 9.30). Podobnie,

$$-\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (-f(x)) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Stąd już wynika teza. \square

Twierdzenie 9.33 (przybliżanie całki sumami całkowymi). Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła i niech $\varepsilon > 0$. Istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad x_i - x_{i-1} < \delta \quad \text{dla wszystkich } i = 1, 2, \dots, n,$$

oraz $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, to

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon. \quad (9.37)$$

Dowód. Ze wzoru (9.34) przez indukcję otrzymujemy

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

Zatem, z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| = \Delta. \end{aligned}$$

Aby oszacować Δ , skorzystajmy z jednostajnej ciągłości f na $[a, b]$ i wybierzmy liczbę $\delta > 0$ tak, aby $|f(s) - f(t)| < \eta = \varepsilon/(b - a)$, gdy $|s - t| < \delta$. Z Wniosku 9.31 wynika, że

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{dla pewnego } \xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Ponieważ przedział $[x_{i-1}, x_i]$ jest krótszy, niż δ , więc dla dowolnego $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mamy

$$\left| f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right| = |f(t_i) - f(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) < \eta \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Przeto

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \eta \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \eta(b - a) = \varepsilon.$$

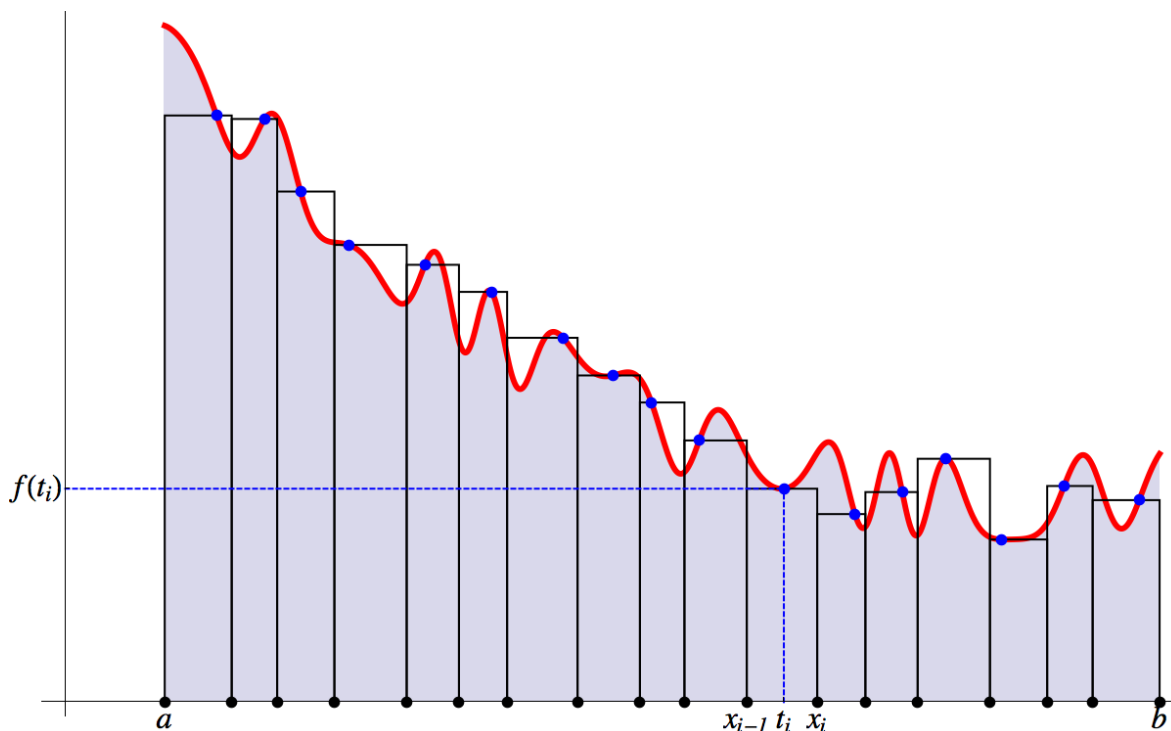
Uzyskana nierówność kończy cały dowód. \square

Interpretacja geometryczna całki jako pola

W udowodnionym twierdzeniu kryje się istota geometrycznej interpretacji całki oznaczonej jako pola pod wykresem funkcji. Przypuśćmy, że f jest ciągła i dodatnia na $[a, b]$. Suma $\sum f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ to suma pól prostokątów, które mają wysokości równe $f(t_i)$ i odcinki $[x_{i-1}, x_i]$ za podstawy. Gdy podział odcinka $[a, b]$ punktami x_i jest odpowiednio 'drobny', to intuicja podpowiada, że suma pól takich prostokątów powinna z dobrym przybliżeniem dawać pole pod wykresem f , tzn. pole figury, ograniczonej osią x -ów, prostymi $x = a$ i $x = b$ oraz wykresem funkcji (patrz rysunek).

Najpoważniejszy kłopot z pełnym uściśleniem tej intuicji jest następujący: nie dysponujemy ścisłą definicją *pola figury*. Jednak w świetle powyższych wyjaśnień można zdefiniować pole pod wykresem funkcji (ciągłej, dodatniej) jako całkę z tej funkcji po odpowiednim przedziale.

Można też postąpić odwrotnie i zdefiniować całkę oznaczoną jako granicę odpowiednich sum całkowych $\sum f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, otrzymanych dla coraz drobniejszych podziałów odcinka $[a, b]$ punktami x_i . W taki sposób określa się tzw. *całkę Riemanna*. Dla funkcji ciągłych pokrywa się ona z całką Newtona, ale nad nią pewną przewagę. Dla całki Riemanna obszerniejsza jest klasa funkcji całkownych; można wygodnie całkować także i



Suma $\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ to suma pól prostokątów. Dla dużych n , gdy podstawy wszystkich prostokątów są małe, wartość tej sumy jest dobrym przybliżeniem całki $\int_a^b f(x) dx$, tzn. pola zacieniowanego obszaru.

(niektóre) takie funkcje, które nie mają funkcji pierwotnej, np. funkcje schodkowe.³ Powiemy o tym więcej w podrozdziale 9.3.

Przykład 9.34 (pole koła). Posłużymy się geometryczną interpretacją całki i obliczymy pole P koła jednostkowego. Czwartka tego koła stanowi obszar pod wykresem funkcji $y = \sqrt{1 - x^2}$ na przedziale $[0, 1]$. Zatem

$$P = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2} \right) \Big|_0^1 = 2(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \pi.$$

(Posłużyliśmy się wzorem na całkę nieoznaczoną funkcji $y = \sqrt{1 - x^2}$, znalezionym wcześniej, w Przykładzie 9.23).

Zapiszmy jeszcze wniosek, który łatwo wynika z Twierdzenia 9.33.

Wniosek 9.35. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Dowód. Punkty $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, gdzie $k = 0, 1, \dots, n$, dzielą $[a, b]$ na n równych części. Wystarczy skorzystać z definicji granicy ciągu i zastosować Twierdzenie 9.33 właśnie dla tych konkretnych x_k , przyjmując ponadto $t_k = x_k$. \square

³Funkcja schodkowa, tzn. funkcja przedziałami stała, nie ma oczywiście własności Darboux (chyba, że w ogóle jest stała), a więc nie jest pochodną żadnej funkcji.

Przykład 9.36. Korzystając z ostatniego wniosku, można (czasem) obliczać granice ciągów, których n -ty wyraz jest sumą n składników $s_k = f(k/n)$, gdzie $1 \leq k \leq n$.

1. Niech

$$c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}.$$

Nietrudno zauważyć, że c_n jest ograniczony (z góry przez 1, z dołu przez $\frac{1}{2}$) i rosnący, więc jest zbieżny. Możemy zapisać

$$c_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = 1/(1+x)$. Na mocy Wniosku 9.35,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2.$$

2. Niech

$$d_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

Tym razem, skracając liczniki i mianowniki przez n^2 , otrzymujemy

$$d_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = 1/(1+x^2)$. Na mocy Wniosku 9.35,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

9.2.1 Całka Newtona a zbieżność jednostajna

Poniższe twierdzenie ma zarówno znaczenie teoretyczne, jak i praktyczne (pozwala przybliżać całki oznaczone z dowolnych funkcji ciągłych np. całkami oznaczonymi z wielomianów, albo z funkcji kawałkami liniowych).

Twierdzenie 9.37 (o przejściu do granicy pod znakiem całki). Załóżmy, że funkcje $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe i $f_n \rightrightarrows f$ na przedziale $[a, b]$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Dowód PIERWSZY. Dla $n = 1, 2, \dots$ wybierzmy funkcje pierwotne F_n, F funkcji f_n, f tak, aby $F_n(a) = F(a) = 0$ dla każdego n . Ponieważ ciąg pochodnych $(f_n) = (F_n')$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$, a ciąg funkcji F_n jest zbieżny w jednym punkcie $x_0 = a$, więc – na mocy Twierdzenia 7.19 o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych – ciąg F_n jest zbieżny

jednostajnie na $[a, b]$ do funkcji G , której pochodna jest równa f . Musi też być $G(a) = F_n(a) = 0 = F(a)$, a stąd $G \equiv F$. Dlatego $F_n(b) \rightarrow F(b)$ dla $n \rightarrow \infty$, a więc

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(b) - F_n(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Dowód drugi. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$ dla wszystkich $n > n_0$ i $x \in [a, b]$. Oznaczmy

$$I_n = \int_a^b f_n(x) dx, \quad I = \int_a^b f(x) dx.$$

Na mocy Wniosków 9.31 i 9.32, dla $n > n_0$ jest

$$\begin{aligned} |I_n - I| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \stackrel{(9.36)}{\leq} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n - f| < (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem, wprost z definicji granicy ciągu, $\lim I_n = I$. \square

Definicja 9.38. Powiemy, że $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest *kawałkami liniowa*, jeśli g jest ciągła na $[a, b]$ i przedział $[a, b]$ jest sumą skończenie wielu przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$, na których $g(x) = \alpha_i x + \beta_i$ dla pewnych α_i, β_i .

Zadanie 9.39. Wykazać, że każda funkcja ciągła $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest granicą jednostajnie zbieżnego na $[a, b]$ ciągu funkcji kawałkami liniowych.

9.2.2 Wzór Wallisa i wzór Stirlinga

W 1655 roku angielski matematyk John Wallis, profesor Uniwersytetu w Oksfordzie⁴ udowodnił znany wzór na liczbę π .

Twierdzenie 9.40 (wzór Wallisa). Niech

$$A_n = \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \pi$.

Dowód. Oznaczmy

$$I_k = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^k dx.$$

Całki I_k można obliczyć, całkując przez części. Wykażemy, że zachodzi wzór rekurencyjny

$$I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2} \quad \text{dla } k \geq 2, \quad I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1. \quad (9.38)$$

⁴Wallis żył w latach 1616–1703. Ciekawostka: podczas wojny domowej w Anglii pracował także jako kryptograf.

Równości $I_0 = \pi/2$ oraz $I_1 = 1$ są oczywiste. Dla $k \geq 2$ jest, na mocy wzoru na całkowanie przez części dla całek oznaczonych,

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} \cdot (-\cos x)' dx \\ &= -\cos x (\sin x)^{k-1} \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \left((\sin x)^{k-1} \right)' \cdot \cos x dx \\ &= 0 + (k-1) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-2} \cos^2 x dx \\ &= (k-1)(I_{k-2} - I_k), \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z równości $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Wyznaczając stąd niewiadomą I_k , otrzymujemy (9.38).

Z rekurencyjnej zależności (9.38) wnioskujemy, że

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \dots, \quad I_{2n} = \frac{(2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2n \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

natomiast dla nieparzystych indeksów

$$I_{2n-1} = \frac{(2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3} \cdot I_1 = \frac{(2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3}.$$

Zatem

$$\pi \cdot \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = \pi \cdot 2n \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{(2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3} \right)^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2.$$

Aby zakończyć dowód wzoru Wallisa, wystarczy więc wykazać, że ciąg $a_n = I_{2n-1}/I_{2n}$ ma granicę równą 1. Dla $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ jest $\sin x \in [0, 1]$; dlatego $(\sin x)^{k+1} \leq (\sin x)^k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Zatem ciąg I_k jest, na mocy Stwierdzenia 9.30, nierosnący. Dzieliąc nierówność

$$I_{2n} \leq I_{2n-1}$$

przez liczbę dodatnią I_{2n} , otrzymujemy

$$1 \leq a_n = \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \stackrel{(9.38)}{=} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \leq \frac{2n}{2n-1},$$

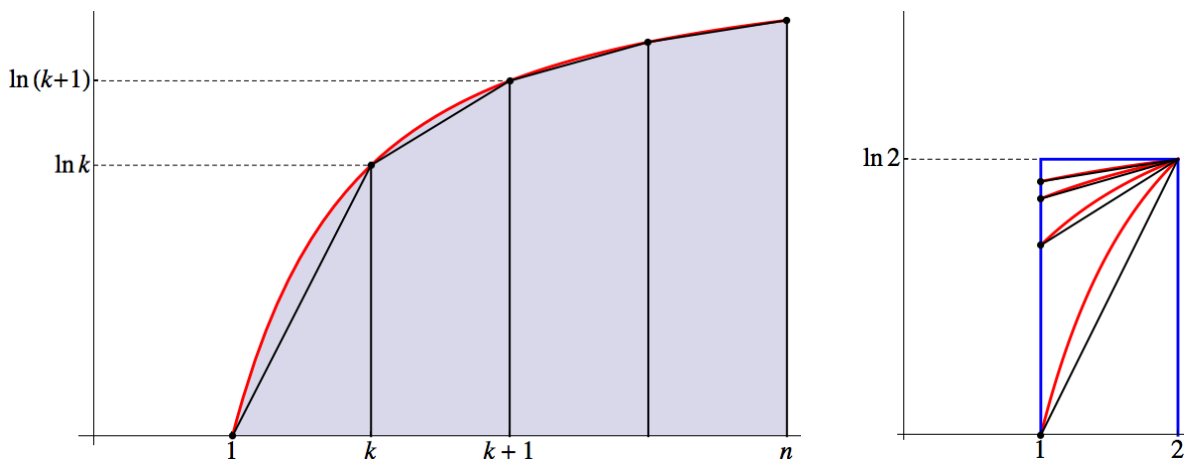
gdyż $I_{2n-1} \leq I_{2n-2}$. Wobec twierdzenia o trzech ciągach, $a_n \rightarrow 1$ dla $n \rightarrow \infty$. Dowód wzoru Wallisa jest zakończony. \square

Korzystając ze wzoru Wallisa, wyprowadzimy wzór Stirlinga,⁵ opisujący tempo wzrostu $n!$. Jest on przydatny w wielu zastosowaniach, m.in. w rachunku prawdopodobieństwa.

Twierdzenie 9.41 (wzór Stirlinga). *Istnieje taki ciąg liczb dodatnich ρ_n , że*

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \rho_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 1. \quad (9.39)$$

⁵James Stirling żył w latach 1692–1770. Wzór Stirlinga pochodzi z okolic roku 1730. Są historycy matematyki, którzy utrzymują, że mniej więcej w tym samym czasie niezależnie wykazał ten wzór inny brytyjski matematyk, Abraham de Moivre.



Pole pod wykresem logarytmu (skala na osi pionowej zniekształcona, dla większej czytelności rysunku) przybliżamy przez sumę pól trapezów o wysokości 1. Indeks k we wzorze (9.42) spełnia $1 \leq k < k+1 \leq n$. Błąd, tzn. suma pól małych “piórek”, jest ograniczony przez stałą $\ln 2$ niezależnie od liczby trapezów. To grube szacowanie.

Dowód. Krok 1. Zacniemy od wykazania, że ciąg

$$a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \quad (9.40)$$

ma skończoną granicę $g > 0$. W tym celu obliczymy dwoma sposobami całkę oznaczoną $\int_1^n \ln x \, dx$.

Sposób pierwszy. Z definicji,

$$\begin{aligned} \int_1^n \ln x \, dx &= (x \ln x - x) \Big|_1^n \\ &= n \ln n - n + 1 = \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n + 1. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Sposób drugi. Podzielmy obszar pod wykresem $\ln x$ dla $x \in [1, n]$ na $(n-1)$ pasów szerokości 1, prowadząc pionowe proste o równaniach $x = i$, gdzie $k = 1, 2, \dots, n$. Każdy z pasów składa się z trapezu⁶ o wysokości 1 i o podstawach $\ln(k-1)$ i $\ln k$ oraz z wąskiego “piórka”, ograniczonego łukiem wykresu funkcji i sieczną wykresu (patrz lewy rysunek). Dzięki geometrycznej interpretacji całki, numerując trapezy od 1 do $n-1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_1^n \ln x \, dx &= \text{suma pól } (n-1) \text{ trapezów} + \text{suma pól } (n-1) \text{ piórek} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k \\ &= \sum_{k=1}^n \ln k - \frac{1}{2} \ln n + \sum_{k=1}^{n-1} p_k = \ln \frac{n!}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k, \end{aligned} \quad (9.42)$$

⁶Pierwszy trapez jest zdegenerowany, tzn. jest trójkątem

gdzie p_k oznacza pole k -tego piórka. Porównując prawe strony (9.41) i (9.42), otrzymujemy równość

$$\ln \left(\frac{n}{e}\right)^n - \ln \frac{n!}{\sqrt{n}} = -1 + \sum_{k=1}^{n-1} p_k,$$

tzn. równoważnie, zgodnie z oznaczeniem (9.40),

$$\ln a_n = -1 + \sum_{k=1}^{n-1} p_k. \quad (9.43)$$

Zauważmy teraz, że szereg $\sum p_k$ jest zbieżny. To wynika z wklęsłości logarytmu. Istotnie, wszystkie piórka można, dokonując przesunięć równoległych (wzdłuż siecznych), umieścić w prostokącie P , ograniczonym prostymi $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ i $y = \ln 2$ jako obszary rozłączne, patrz prawy rysunek.⁷ Ponieważ przesunięcie zachowuje pole figury, więc suma pól wszystkich piórek nie przekracza pola prostokąta P i dlatego

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_k \in (0, \ln 2].$$

Wobec (9.43), ciąg a_n ma granicę $g = \exp(-1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k) > 0$.

Krok 2. Wyrazimy liczbę g w jawny sposób, posługując się wzorem Wallisa. Połóżmy $b_n = (a_n)^2/a_{2n}$. Ponieważ $\lim a_n = g > 0$, więc ciąg b_n ma granicę $g^2/g = g$. Sprawdzamy, że

$$b_n = \frac{(a_n)^2}{a_{2n}} = \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{n^{2n}}{e^{2n}} \cdot n \cdot \underbrace{\frac{(2n)!}{2^{2n}} \cdot \frac{e^{2n}}{n^{2n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{=1/a_{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 4^n} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Niech $c_n = 4^{-n}(2n)!/(n!)^2$; wtedy

$$b_n = c_n \cdot \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Mamy

$$c_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n!)}{4(n+1)^2 \cdot (n!)^2 4^n} = \frac{2n+1}{2n+2} c_n, \quad c_1 = \frac{2!}{4} = \frac{1}{2}.$$

Zatem, przez indukcję,

$$c_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2},$$

a więc

$$\frac{1}{b_n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right)^2.$$

Ze wzoru Wallisa, patrz Twierdzenie 9.40, otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/b_n^2) = 2\pi$, stąd zaś $g = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/\sqrt{2\pi}$. Ostatecznie więc

$$a_n \sqrt{2\pi} = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \rightarrow 1 \quad \text{dla } n \rightarrow \infty.$$

Kładąc $1/\rho_n = a_n \sqrt{2\pi}$, otrzymujemy wzór Stirlinga (9.39). \square

⁷Piórko o numerze k , gdzie $k = 2, 3, \dots$, należy przesunąć równoległe o wektor $(-k+1, -\ln k)$.

$$\text{rang} \left(\frac{0}{\omega} \right) = \frac{0}{\omega} - \frac{00}{3\omega} - \frac{00}{5\omega} - \frac{00}{7\omega} - \frac{00}{9\omega} - \dots$$

Skan fragmentu pracy Lamberta (źródło: Wikipedia).

9.2.3 Niewymierność liczby π . Informacje o liczbach przestępnych.

W 1761 roku niemiecki matematyk Johann Heinrich Lambert udowodnił niewymierność liczby π . Jego dowód⁸ opierał się na rozwinięciu funkcji tangens w ułamek łańcuchowy (patrz rysunek) i rzadko jest dziś przytaczany w książkach, bo wykazywanie zbieżności tego rozwinięcia do tangensa wymaga wysiłku, a znane są prostsze dowody. Opiszemy tu jeden z nich.

Zacniemy od nietrudnego, pomocniczego lematu.

Lemat 9.42. Niech $w(x) = \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$ dla $x \in [0, 1]$. Wówczas

1. $0 < w(x) \leq 4^{-n}/n! < 1/n!$ dla każdego $x \in (0, 1)$;
2. $w(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k$, gdzie wszystkie współczynniki c_k są całkowite;
3. Liczby $w^{(k)}(0)$ i $w^{(k)}(1)$ są całkowite dla każdego $k = 0, 1, \dots$; ponadto, $w^{(k)}(0) = w^{(k)}(1) = 0$ dla wszystkich $k < n$ i $k > 2n$.

Dowód. Dla $x \in (0, 1)$ jest $0 < x(1-x) \leq 1/4$. Podnosząc tę nierówność do n -tej potęgi i dzieląc przez $n!$, otrzymujemy pierwszy punkt tezy. Drugi punkt tezy wynika natychmiast z równości

$$n!w(x) = x^n(1-x)^n = x^n \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} x^l$$

(współczynniki dwumianowe Newtona są całkowite). Aby wykazać trzecią własność wielomianu w , zauważmy, że $w(x) = w(1-x)$ i dlatego $w^{(k)}(x) = (-1)^k w^{(k)}(1-x)$, tzn. $w^{(k)}(1) = \pm w^{(k)}(0)$. Wystarczy więc zbadać liczby $w^{(k)}(0)$. Z drugiego punktu tezy wynika, że $w^{(k)}(0) = 0$ dla $k < n$ i $k > 2n$ (dla $k > 2n$ funkcja $w^{(k)} \equiv 0$, gdyż w jest wielomianem stopnia $2n$). Natomiast dla $k \in \{n, n+1, \dots, 2n\}$ mamy

$$w^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k \in \mathbb{Z},$$

gdź wtedy $n!$ jest dzielnikiem $k!$. \square

Zanotujmy też oddzielnie inny nietrudny fakt, który przyda się nam nie tylko do dowodu niewymierności π .

⁸Zainteresowanych odsyłam np. do pracy: M. Laczko, Lambert's proof of the irrationality of π , *Amer. Math. Monthly* **104**, no. 5 (1997), 439–443.

Lemat 9.43 (wzór na wielokrotne całkowanie przez części). Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^N . Wówczas

$$\int_a^b f(x)g^{(N)}(x) dx = \left(fg^{(N-1)} - f'g^{(N-2)} + \dots + (-1)^{N-1} f^{(N-1)}g \right) \Big|_a^b + (-1)^N \int_a^b f^{(N)}(x)g(x) dx. \quad (9.44)$$

Dowód. Stosujemy N -krotnie wzór na całkowanie przez części, przerzucając w każdym kroku jedno różniczkowanie z g na f :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g^{(N)}(x) dx &= fg^{(N-1)} \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g^{(N-1)}(x) dx \\ &= \left(fg^{(N-1)} - f'g^{(N-2)} \right) \Big|_a^b + \int_a^b f^{(2)}(x)g^{(N-2)}(x) dx \\ &\quad \vdots \\ &= \left(fg^{(N-1)} - f'g^{(N-2)} + \dots + (-1)^{N-1} f^{(N-1)}g \right) \Big|_a^b \\ &\quad + (-1)^N \int_a^b f^{(N)}(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

Całkujemy zawsze funkcję typu $f^{(k)}g^{(N-k)}$ i dlatego pojawia się składnik $\pm f^{(k)}g^{(N-k-1)} \Big|_a^b$; nietrudno zauważyć i wypisać regułę, określającą znaki kolejnych składników. \square

Twierdzenie 9.44. Liczba π jest niewymierna.

Dowód. Będziemy dowodzić tezy przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że $\pi = l/m$ dla pewnych $l, m \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy liczbę

$$A_n = m^n \pi^{2n+1} \int_0^1 w(x) \sin \pi x dx,$$

gdzie

$$w(x) \equiv w_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n$$

oznacza wielomian z Lematu 9.42. Wykażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ i A_n jest liczbą całkowitą dodatnią dla każdego n . Ta oczywista sprzeczność zakończy dowód.

Krok 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$. Istotnie, z nierówności $0 < \sin \pi x \leq 1$, pierwszego punktu tezy Lematu 9.42 i monotoniczności całki wynika, że

$$0 < A_n \leq \pi (m\pi^2)^n \int_0^1 \frac{1}{n!} \sin \pi x dx = \pi \frac{(m\pi^2)^n}{n!} \int_0^1 \sin \pi x dx \leq \pi \frac{(m\pi^2)^n}{n!}.$$

Ciąg $y^n/n! \rightarrow 0$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$, gdyż szereg potęgowy funkcji wykładniczej jest zbieżny na całej prostej.

Krok 2. Liczby A_n są całkowite dodatnie. Wiemy już, że $A_n > 0$ dla każdego n . Aby stwierdzić, że $A_n \in \mathbb{Z}$, posłużymy się wzorem na wielokrotne całkowanie przez części, biorąc przedział $[a, b] = [0, 1]$, liczbę $N = 2n + 1$, $f(x) = w(x)$, oraz

$$g^{(N)}(x) = \pi^{2n+1} \sin \pi x = \mp (\cos \pi x)^{(N)} \quad \text{tzn.} \quad g(x) = \mp \cos \pi x.$$

(Znak nie będzie odgrywał istotnej roli w rachunkach). Ponieważ $w = w_n$ jest wielomianem stopnia $2n$, a $N = 2n + 1 > 2n$, więc $w^{(N)} \equiv 0$ i całka $\int w^{(N)} g dx$ po prawej stronie wzoru (9.44) znika. Dlatego

$$\begin{aligned} A_n &= m^n \left(w g^{(N-1)} - w' g^{(N-2)} + \dots + (-1)^{N-1} w^{(N-1)} g \right) \Big|_0^1 \\ &= m^n \left((-1)^n w^{(n)} g^{(N-n-1)} + (-1)^{n+1} w^{(n+1)} g^{(N-n-2)} + \dots + (-1)^{N-1} w^{(2n)} g \right) \Big|_0^1, \end{aligned} \quad (9.45)$$

gdyż $w^{(k)}$ znika w punktach 0 i 1 dla $k < n$ (patrz Lemat 9.42, punkt 3). Sprawdzimy teraz, że każdy składnik w nawiasie jest liczbą wymierną postaci p/m^s , gdzie $p \in \mathbb{Z}$, natomiast $s \in \{0, 1, \dots, n\}$. Stąd już wyniknie teza $A_n \in \mathbb{Z}$.

Pochodne funkcji w w punktach 0 i 1 są całkowite (Lemat 9.42). Mamy też

$$|g^{(s)}(x)| = \begin{cases} \pi^s |\sin \pi x| & \text{dla } s \text{ nieparzystych,} \\ \pi^s |\cos \pi x| & \text{dla } s \text{ parzystych.} \end{cases}$$

W drugiej linii wzoru (9.45) występują pochodne $g^{(s)}$ dla $s = 0, 1, 2, \dots, N - n - 1$, tzn. dla $s = 0, 1, 2, \dots, n$. Funkcje $\pm \sin \pi x$ i $\pm \cos \pi x$ przyjmują w punktach 0, 1 wartości 0 i ± 1 . Dlatego $g^{(s)}(x)$ przyjmuje w tych punktach wartości

$$0, \quad \pm \pi^s = \pm \frac{l^s}{m^s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Iloczyny $m^n \cdot (\pm w^{(N-1-s)}(x) g^{(s)}(x))$ są więc, dla $x \in \{0, 1\}$, całkowite. Liczba A_n , która jest sumą takich iloczynów, też więc jest całkowita. \square

Uwaga 9.45. W podobny sposób można wykazać niewymierność liczby π^2 (patrz np. książka: M. Aigner, G.M. Ziegler, *Dowody z książki*), a także niewymierność wszystkich liczb r , dla których $\cos r$ jest liczbą wymierną.

Niewymierność drugiej z najważniejszych stałych, z którymi Czytelnik spotyka się w analizie matematycznej, liczby e , można udowodnić znacznie łatwiej: gdyby $e = p/q$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{N}$, to mielibyśmy

$$x := q! \left(e - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \right) = p(q-1)! - \sum_{n=0}^q \frac{q!}{n!} \in \mathbb{Z}$$

gdyż $n!$ dzieli $q!$ dla $n \leq q$; z drugiej strony, ponieważ $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$, więc

$$0 < x = q! \left(e - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \right) = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots = \frac{1}{q} < 1.$$

To jest sprzeczność, gdyż w $(0, 1)$ nie ma żadnej liczby całkowitej.

Przytoczony dowód niewymierności π jest dużo młodszy od oryginalnego dowodu Lamberta. Podobny charakter ma dowód przestępności liczby e .

Definicja 9.46. Liczba $z \in \mathbb{C}$ nazywa się *algebraiczna*, jeśli dla pewnych $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0.$$

Liczba zespolona, która nie jest algebraiczna, nazywa się *przestępna*.

Łatwo zauważyć, że wszystkie liczby wymierne są algebraiczne: $x = p/q \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ jest rozwiązaniem równania liniowego $p - qx = 0$ o współczynnikach całkowitych p, q . Zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny, gdyż dla każdej z przeliczalnie wielu wartości $n = 1, 2, \dots$ istnieje tylko przeliczalnie wiele wielomianów $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ o współczynnikach całkowitych, a każdy z nich ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych. Jednak \mathbb{R} jest zbiorem nieprzeliczalnym, więc w \mathbb{R} istnieją liczby przestępne. Pierwszy konkretny przykład takiej liczby,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}},$$

podał w latach 40-tych XIX wieku Joseph Liouville. W 1873 roku Charles Hermite udowodnił przestępnosć e .

♠ Dodatek roboczy: resztę tego podrozdziału przy okazji spiszę nieco inaczej, w sposób bliższy przedstawionemu na wykładzie, wyodrębniając w postaci oddzielnego Lematu własności pomocniczego wielomianu W , używanego w dowodzie przestępnosć e .

Twierdzenie 9.47. *Liczba e jest przestępna.*

Dowód. Będziemy dowodzić przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n = 0$$

dla pewnych $a_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Krok 1. Niech W oznacza dowolny wielomian zmiennej rzeczywistej, stopnia m . Sprawdzimy, że jeśli całka $I(x)$ określona jest wzorem

$$I(x) = \int_0^x e^{x-u} W(u) du, \quad (9.46)$$

to

$$I(x) = e^x \sum_{j=0}^m W^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m W^{(j)}(x). \quad (9.47)$$

Istotnie, całkując przez części, przekonujemy się, że

$$I(x) = e^x \int_0^x e^{-u} W(u) du = e^x \left(-e^u W(u) \Big|_0^x + \int_0^x e^{-u} W'(u) du \right),$$

stąd zaś przez indukcję (pamiętajmy, że $W^{(m+1)} \equiv 0$)

$$I(x) = -e^{x-u} \left(W(u) + W'(u) + W''(u) + \dots + W^{(m)}(u) \right) \Big|_0^x = e^x \sum_{j=0}^m W^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m W^{(j)}(x).$$

Można również dowieść (9.47), stosując od razu wzór na wielokrotne całkowanie przez części.

Krok 2. Niech p będzie dostatecznie dużą liczbą pierwszą.⁹ Połóżmy

$$W(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdot \dots \cdot (x-n)^p \quad (9.48)$$

i rozpatrzmy całkę

$$J = \sum_{k=0}^n a_k I(k),$$

gdzie liczby a_k są całkowitymi współczynnikami wielomianu znikającego w punkcie e . Niech $m = (n+1)p - 1 = \deg W$. Ze wzoru (9.47) otrzymujemy

$$\begin{aligned} J = \sum_{k=0}^n a_k I(k) &= \sum_{k=0}^n a_k \left(e^k \sum_{j=0}^m W^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m W^{(j)}(k) \right) \\ &= - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_k W^{(j)}(k), \end{aligned} \quad (9.49)$$

gdyż $\sum a_k e^k = 0$ z założenia o algebraiczności e .

Krok 3. Aby zbadać wartość J , wyznaczmy pochodne W w punktach $0, 1, \dots, n$. Posługując się wzorem Leibniza na wyższe pochodne iloczynu dwóch funkcji, łatwo otrzymać następujące zależności:

$$W^{(j)}(k) = 0 \quad \text{dla } j < p \text{ i } k = 1, 2, \dots, n, \quad (9.50)$$

$$W^{(j)}(0) = 0 \quad \text{dla } j < p - 1. \quad (9.51)$$

Dla przykładu sprawdźmy równość (9.50). (Tak samo sprawdza się (9.51).) Jest $W(x) = f(x) \cdot g(x)$ dla $f(x) = (x-k)^p$ i $g(x)$ zdefiniowanego jako iloczyn pozostałych czynników po prawej stronie (9.48). Dlatego, ze wzoru Leibniza,

$$W^{(j)}(k) \stackrel{\text{Stw. 6.50}}{=} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} f^{(i)}(k) g^{(j-i)}(k) = 0,$$

gdyż $f^{(i)}(k) = p(p-1) \dots (p-i+1)(x-k)^{p-i} \Big|_{x=k} = 0$ dla każdego $i = 0, 1, \dots, j$, gdy $j < p$. Zauważmy jeszcze, że dla $k > 0$ jest $f^{(p)}(k) = p!$ i $f^{(j)}(k) = 0$ dla $j > p$, a więc $f^{(j)}(k)$ jest liczbą podzielną przez $p!$.

Nietrudno teraz wywnioskować, że dla $j = 0, 1, 2, \dots, m$ i $k = 0, 1, \dots, n$

$$W^{(j)}(k) \in \mathbb{Z} \text{ jest liczbą podzielną przez } p!, \text{ chyba, że } j = p - 1, k = 0; \quad (9.52)$$

natomiast

$$W^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p. \quad (9.53)$$

Ostatnią równość też można sprawdzić, posługując się wzorem Leibniza, podobnie jak (9.50). Dla liczb pierwszych $p > n$ liczba $W^{(p-1)}(0)$ jest więc podzielna przez $(p-1)!$, ale niepodzielna przez $p!$.

⁹Szereg odwrotności liczb pierwszych jest rozbieżny, więc liczb pierwszych jest nieskończenie wiele

Krok 4. Niech odąd

$$p > M := \max(n, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|).$$

Wstawiając obliczone wartości pochodnych W do wzoru (9.49) na całkę J , sprawdzamy, że J jest liczbą całkowitą podzielną przez $(p-1)!$ i niepodzielną przez $p!$. To wynika stąd, że wszystkie za wyjątkiem jednego składniki sumy w (9.49) są podzielne przez $p!$, zaś jeden, $a_0 W^{(p-1)}(0)$, wobec (9.53) dzieli się przez $(p-1)!$, ale wskutek doboru p już nie przez $p!$.

Dlatego $J \neq 0$ i $|J| \geq (p-1)!$. Z drugiej strony, posługując się monotonicznością całki i szacując dość brutalnie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |J| &\leq \sum_{k=0}^n |a_k| |I(k)| \\ &\leq M \sum_{k=0}^n |I(k)| \quad \text{z definicji } M \\ &\leq M e^n \sum_{k=0}^n k \cdot \max_{x \in [0, k]} |W(x)| \quad \text{z definicji } I(k) \text{ oraz (9.36)–(9.35)} \\ &\leq M n^2 e^n \cdot \max_{x \in [0, n]} |W(x)| \\ &\leq M n^2 e^n \cdot n^{p-1} n^{np} = A \cdot B^p, \end{aligned}$$

gdzie stałe $A = M n e^n$ i $B = n^{n+1}$ zależą od n i współczynników a_k wielomianu, zerującego się w e , ale *nie* od liczby p . Porównując uzyskane oszacowania całki J , otrzymujemy

$$(p-1)! \leq |J| \leq AB \cdot B^{p-1},$$

lub równoważnie

$$1 \leq AB \cdot \frac{B^{p-1}}{(p-1)!}.$$

To jest sprzeczność dla dużych p , gdyż $B^k/k! \rightarrow 0$ dla $k \rightarrow \infty$ i każdego $B \in \mathbb{R}$. \square

Rok po dowodzie Hermite'a Georg Cantor wprowadził pojęcie mocy zbioru i wykazał, że zbiór liczb przestępnych jest nieprzeliczalny. Niecałe 10 lat później, w roku 1882, Ferdinand von Lindemann¹⁰ wykazał, że liczba π jest przestępna. Wynika stąd, że kwadratury koła nie można przeprowadzić za pomocą cyrkla linijki. Dowód przestępności π jest zbliżony do dowodu przestępności e , choć wymaga minimalnie głębszej wiedzy z algebry. Zainteresowany czytelnik odnajdzie go w książeczce Alana Bakera *Transcendental number theory*.¹¹

Uwaga 9.48. W 1900 roku David Hilbert umieścił na swojej słynnej liście 23 problemów matematycznych (jako problem nr 7) pytanie o to, czy α^β jest przestępna, gdy $\alpha > 0$ jest liczbą algebraiczną, zaś β liczbą algebraiczną i niewymierną. Twierdzącą odpowiedź podali Gelfond i Schneider w 1934 roku.

¹⁰promotor prac doktorskich Davida Hilberta i Hermanna Minkowskiego

¹¹Cambridge University Press, 1975 r.; dostępna w bibliotece MIM.

9.2.4 Wzór Taylora z resztą w postaci całkowej

W poprzednich podrozdziałach wykorzystaliśmy wzór na wielokrotne całkowanie przez części do dowodów niewymierności π i przestępności e . Teraz wskażemy jeszcze jedno zastosowanie tego wzoru, bardzo przydatne (także do analizowania funkcji wielu zmiennych, z którymi Czytelnik wielokrotnie zetknie się w późniejszych swoich studiach).

Twierdzenie 9.49 (wzór Taylora z resztą całkową). Niech $g \in C^{k+1}([a, b])$, $a < x < b$. Wówczas

$$g(x) = g(a) + \sum_{j=1}^k \frac{g^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t) dt. \quad (9.54)$$

Dowód. Ustalmy $x \in (a, b)$. Obliczymy całkę we wzorze (9.54), posługując się wzorem (9.44) z Lematu 9.43 na przedziale $[a, x]$. Niech $N = k + 1$, $f(t) = (x-t)^k/k!$. Przy takich oznaczeniach

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t) dt &= \int_a^x f(t) g^{(N)}(t) dt \\ &= \left(f g^{(N-1)} - f' g^{(N-2)} + \dots + (-1)^{N-1} f^{(N-1)} g \right) \Big|_a^x \\ &\quad + (-1)^N \int_a^x f^{(N)}(t) g(t) dt \\ &= \left(f g^{(N-1)} - f' g^{(N-2)} + \dots + (-1)^{N-1} f^{(N-1)} g \right) \Big|_a^x \end{aligned} \quad (9.55)$$

gdyż $f^{(N)} \equiv 0$, bowiem f jest wielomianem stopnia $k < N = k + 1$. Różniczkując f , otrzymujemy

$$f^{(j)}(t) = (-1)^j \frac{(x-t)^{k-j}}{(k-j)!}, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Dlatego dla $0 \leq j < k = N - 1$ jest

$$(-1)^j f^{(j)} g^{(N-1-j)} \Big|_a^x = -\frac{(x-a)^{k-j}}{(k-j)!} g^{(N-1-j)}(a) = -\frac{(x-a)^{k-j}}{(k-j)!} g^{(k-j)}(a),$$

natomiast dla $j = k = N - 1$ otrzymujemy $f^{(k)} \equiv (-1)^k$ i

$$(-1)^j f^{(j)} g^{(N-1-j)} \Big|_a^x = g(x) - g(a)$$

Podstawiając te wyrażenia do wzoru (9.55), znajdujemy wartość ostatniej sumy i sprawdzamy, że

$$\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t) dt = g(x) - g(a) - \sum_{i=1}^k \frac{(x-a)^i}{i!} g^{(i)}(a)$$

(wygodnie jest zmienić indeks $k - j$ na i i dopasować granice sumowania). Dowód jest zakończony. \square

9.3 Całka Riemanna

Omówimy teraz inne podejście do definicji całki oznaczonej. Z grubsza biorąc, chodzi o to, że definicję można oprzeć o geometryczną interpretację całki, omówioną przez nas wcześniej, przy okazji dowodu Twierdzenia 9.33. Takie podejście pozwala rozszerzyć klasę funkcji, dla których całka jest określona, o pewne funkcje nieciągłe. Dla funkcji ciągłych oba podejścia (całka Newtona, zdefiniowana jako przyrost funkcji pierwotnej, oraz całka Riemanna) dają identyczny wynik. Definicja całki Newtona jest w teorii całki Riemanna twierdzeniem, natomiast o poprawności definicji całki Riemanna funkcji ciągłej przesądzą oszacowania sum całkowitych, które poznaliśmy właśnie w Twierdzeniu 9.33.

Ustalmy przedział $[a, b]$ osi rzeczywistej. Będziemy rozważać funkcje ograniczone (ale niekoniecznie ciągłe) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicja 9.50 (podział przedziału). Podziałem P przedziału $[a, b]$ nazwiemy każdy skończony ciąg punktów (x_0, x_1, \dots, x_n) taki, że

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b.$$

Piszemy $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Zbiór wszystkich podziałów odcinka $[a, b]$ będziemy oznaczać literą \mathcal{P} . Będziemy też milcząco przyjmować, że napis (x_0, x_1, \dots, x_n) oznacza w tym podrozdziale ciąg *niemalejący*

Definicja 9.51 (sumy całkowite Riemanna). Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną, a $P = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}$ – ustalonym podziałem $[a, b]$. Sumy

$$G(P, f) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i, \quad D(P, f) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i$$

nazywamy odpowiednio górną i dolną sumą Riemanna funkcji f dla podziału P .

Interpretacja geometryczna górnych i dolnych sum Riemanna funkcji ograniczonej, nieujemnej f jest dość oczywista: suma górna jest sumą pól prostokątów, których podstawy są odcinkami podziału P , a wysokości dobrane zostały tak, żeby suma prostokątów przykryła (jak najoszczędniej) cały zbiór $Z = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\}$ punktów pod wykresem f . Obliczając sumę dolną, dobieramy wysokości tak, aby jak najlepiej przybliżyć zbiór Z od wewnątrz.

Definicja 9.52 (górną i dolną całką Riemanna). Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Liczby

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} G(P, f), \quad \sup_{P \in \mathcal{P}} D(P, f)$$

nazywamy odpowiednio górną i dolną całką Riemanna funkcji f na odcinku $[a, b]$.

Zauważmy, że definicja jest poprawna: jeśli $M = \sup |f|$, to dla dowolnego podziału $P \in \mathcal{P}$ jest

$$-M(b-a) \leq D(P, f) \leq G(P, f) \leq M(b-a),$$

gdyż na każdym odcinku podziału $-M \leq f \leq M$; mnożąc tę nierówność przez $\Delta x_i \geq 0$ i sumując, otrzymujemy oszacowanie sum dolnych i górnych. Wobec aksjomatu ciągłości, oba kresy, o których mowa w powyższej definicji, istnieją.

Definicja 9.53 (funkcje całkowne w sensie Riemanna). Jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} G(P, f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} D(P, f),$$

to mówimy, że f jest całkowna w sensie Riemanna. Kładziemy wówczas

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{P \in \mathcal{P}} G(P, f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} D(P, f).$$

Zbiór wszystkich funkcji całkownych w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ oznaczmy $\mathcal{R}([a, b])$.

Pytanie o to, które funkcje ograniczone są całkowne w sensie Riemanna, jest dość subtelne. Zaczniemy od prostych przygotowań natury technicznej. Powiemy, że podział P_1 jest zagęszczeniem podziału P , jeśli każdy punkt podziału P jest także punktem P_1 (inaczej: P_1 powstaje z P przez dorzucenie skończenie wielu punktów).

Stwierdzenie 9.54. Jeśli P_1 jest zagęszczeniem P , a f funkcją ograniczoną na $[a, b]$, to

$$D(P, f) \leq D(P_1, f), \quad G(P_1, f) \leq G(P, f)$$

Inaczej mówiąc, zagęszczanie podziału zwiększa dolne sumy Riemanna i zmniejsza sumy górne. Dla kogoś, kto rozumie geometryczną interpretację sum całkowych, ten fakt powinien być praktycznie oczywisty.

Dowód. Dla porządku wykażemy pierwszą nierówność. Jeśli P_1 powstaje z P przez dorzucenie *jednego* punktu y do odcinka $[x_{s-1}, x_s]$, to

$$m_1 := \inf_{[x_{s-1}, y]} f \geq \inf_{[x_{s-1}, x_s]} f =: m, \quad m_2 := \inf_{[y, x_s]} f \geq \inf_{[x_{s-1}, x_s]} f =: m,$$

gdyż kres dolny funkcji nie spada, gdy zawężamy jej dziedzinę. Sumy całkowe $D(P, f)$ i $D(P_1, f)$ różnią się tylko składnikami, odpowiadającymi podzbiorem odcinka $[x_{s-1}, x_s]$. Dlatego

$$\begin{aligned} D(P_1, f) - D(P, f) &= m_1(y - x_{s-1}) + m_2(x_s - y) - m(x_s - x_{s-1}) \\ &\geq m(y - x_{s-1} + x_s - y - (x_s - x_{s-1})) = 0. \end{aligned}$$

Jeśli P_1 powstaje z P przez dorzucenie k punktów, to powyższe rozumowanie należy powtórzyć k razy. Dowód drugiej nierówności jest analogiczny. \square

Wniosek 9.55. Całka dolna Riemanna funkcji ograniczonej nie przekracza całki górnej tej funkcji.

Dowód. Niech $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ i niech P_3 będzie zagęszczeniem zarówno P_1 , jak i P_2 – np. niech P_3 składa się z punktów obu podziałów P_1 i P_2 . Wtedy, z powyższego stwierdzenia

$$D(P_1, f) \leq D(P_3, f) \leq G(P_3, f) \leq D(P_2, f),$$

stąd zaś $D(P_1, f) \leq G(P_2, f)$ dla wszystkich podziałów $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$. Biorąc najpierw – przy ustalonym P_1 – kres dolny prawej strony względem $P_2 \in \mathcal{P}$, następnie zaś kres górny lewej strony względem $P_1 \in \mathcal{P}$, otrzymujemy tezę wniosku. \square

Wniosek 9.56. *Funkcja ograniczona $f \in \mathcal{R}([a, b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje podział $P \in \mathcal{P}$ taki, że $G(P, f) - D(P, f) < \varepsilon$.*

Dowód. Niech I_g oznacza całkę górną, zaś I_d – całkę dolną funkcji f . Jeśli $I_g = I_d$ i $\varepsilon > 0$, to wobec definicji kresu górnego i dolnego znajdziemy podziały $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ takie, że

$$I_d - \frac{\varepsilon}{2} < D(P_1, f) \leq I_d = I_g \leq G(P_2, f) < I_g + \frac{\varepsilon}{2} = I_d + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech P_3 będzie zagęszczeniem zarówno P_1 , jak i P_2 . Wtedy, wobec Stwierdzenia 9.54,

$$I_d - \frac{\varepsilon}{2} < D(P_1, f) \leq D(P_3, f) \leq G(P_3, f) \leq G(P_2, f) < I_d + \frac{\varepsilon}{2}$$

zatem liczby $G(P_3, f) \geq D(P_3, f)$ należą do tego samego przedziału, krótszego niż ε . To kończy dowód implikacji \Rightarrow .

Implikacja \Leftarrow jest łatwiejsza: jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje podział P , dla którego suma górna i dolna różnią się mniej, niż o ε , to wprost z definicji kresu górnego i dolnego

$$0 \leq I_g - I_d < \varepsilon$$

dla każdego $\varepsilon > 0$. Zatem $I_d = I_g$. \square

Twierdzenie 9.57. *Każda funkcja $f \in C([a, b])$ jest całkowna w sensie Riemanna. Jej całka Riemanna i całka Newtona są równe.*

Dowód. Wykażemy najpierw, że każda funkcja ciągła spełnia równoważny warunek całkowności w sensie Riemanna, podany w poprzednim wniosku. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy, korzystając z jednostajnej ciągłości f na $[a, b]$, liczbę $\delta > 0$ tak, aby $|f(s) - f(t)| < \varepsilon/(b-a)$ dla wszystkich $|s - t| < \delta$, $s, t \in [a, b]$. Niech P będzie takim podziałem $[a, b]$, że $\Delta x_i < \delta$ dla każdego $i = 1, \dots, n$. Wtedy liczby

$$m_i := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad M_i := \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

dla każdego $i = 1, \dots, n$ różnią się mniej niż o $\varepsilon/(b-a)$, gdyż są wartościami¹² funkcji f na przedziale krótszym niż δ . Zatem

$$0 \leq G(P, f) - D(P, f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Na mocy poprzedniego wniosku, $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Pozostaje wykazać równość obu całek: Newtona i Riemanna. Oznaczmy je odpowiednio I_N i I_R . Jeśli $P = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}$, to znajdziemy $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takie, że

$$D(P, f) = \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta x_i, \quad G(P, f) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

¹²Funkcja ciągła osiąga swoje kresy na każdym odcinku domkniętym, wyznaczonym przez dwa sąsiednie punkty podziału P .

(jeszcze raz korzystamy z faktu, że funkcja ciągła f osiąga swoje kresy na każdym odcinku domkniętym). Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z Twierdzenia 9.33 o aproksymacji sumami Riemanna wynika, że jeśli podział P jest odpowiednio drobny, to

$$|I_N - D(P, f)| < \varepsilon, \quad |I_N - G(P, f)| < \varepsilon.$$

W pierwszej części dowodu sprawdziliśmy, że jeśli podział P jest odpowiednio drobny, to odpowiadające mu suma górna i dolna różnią się mniej, niż o ε . Zatem wszystkie liczby

$$D(P, f) - \varepsilon < I_N < G(P, f) + \varepsilon, \quad D(P, f), \quad G(P, f)$$

są wtedy w pewnym przedziale J krótszym niż 3ε . Liczba I_R leży między $D(P, f)$ i $G(P, f)$ dla każdego $P \in \mathcal{P}$. Stąd, także $I_R \in J$. Przeto, $|I_N - I_R| < 3\varepsilon$, a więc $I_R = I_N$ wobec dowolności ε . \square

Twierdzenie 9.58. *Jeśli f jest monotoniczna na $[a, b]$, to $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Dowód. Wykażemy, że f spełnia warunek całkowalności z Wniosku 9.56. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla ustalenia uwagi niech f będzie niemalejąca.¹³ Wybierzmy podział $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ odcinka $[a, b]$ na n równych części. Wtedy $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$. Ponieważ funkcja niemalejąca przyjmuje na każdym odcinku kres górny w prawym końcu tego odcinka, zaś kres dolny – w jego lewym końcu, więc dla podziału na równe części jest

$$0 \leq G(P, f) - D(P, f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} < \varepsilon,$$

jeśli n jest dostatecznie dużą liczbą. \square

Z ostatniego twierdzenia wynika, że jest bardzo wiele funkcji nieciągłych, które są całkowalne w sensie Riemanna. Jeśli $f = g - h$, gdzie g i h są niemalejące, to $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Taka funkcja może mieć nieskończony (przeliczalny) zbiór punktów nieciągłości. Czytelnik łatwo skonstruuje konkretne przykłady takich funkcji.

Okazuje się, że zbiór funkcji całkowalnych w sensie Riemanna jest jeszcze bogatszy. Bez dowodu przytoczymy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9.59. *Założmy, że $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną. Następujące warunki są wówczas równoważne:*

(i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$;

(ii) *Zbiór $Z \in [a, b]$ wszystkich punktów nieciągłości funkcji f ma następującą własność: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przeliczalna rodzina $\{I_j: j = 1, 2, \dots\}$ przedziałów domkniętych $I_j \subset [a, b]$ taka, że*

$$Z \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon,$$

gdzie $|I_j|$ oznacza długość przedziału I_j .

¹³Dla funkcji nierosnących dowód jest w pełni analogiczny.

Uwaga 9.60. Każdy zbiór $Z \subset \mathbb{R}$, który ma własność podaną w punkcie (ii) Twierdzenia 9.59, nazywamy *zbiorem miary Lebesgue'a zero*, lub krótko: *zbiorem miary zero*. Każdy podzbiór zbioru miary zero też oczywiście jest zbiorem miary zero.

Nietrudno zauważyć, że zbiór Cantora K , tzn. zbiór zwarty $K \subset [0, 1]$ opisany w Przykładzie 5.62, jest zbiorem miary zero. Istotnie,

$$K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j,$$

gdzie zbiory $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K$ i K_j składa się z 2^{j-1} odcinków długości 3^{j-1} . Łączna długość odcinków wchodzących w skład K_j dąży więc do zera dla $j \rightarrow \infty$ i dlatego K jest zbiorem miary zero. Zbiór Cantora jest nieprzeliczalny, a zatem zbiór miary zero może być nieprzeliczalny.

Zadanie 9.61. Skonstruować funkcję ograniczoną $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, która jest nieciągła we wszystkich punktach zbioru Cantora i ciągła poza tym zbiorem.

Wskazówka. Taka funkcja może być stała na każdym odcinku w uzupełnieniu zbioru Cantora. Określić f tak, aby (powiedzmy) $f > 2/3$ na odcinkach usuwanych w kroku $2j + 1$ i $f < 1/3$ na odcinkach usuwanych w kroku $2j$.

Wśród funkcji całkownych w sensie Riemanna są więc funkcje nieciągłe na pewnych zbiorach nieprzeliczalnych. Na drugim roku studiów Czytelnik zobaczy, że w wielu sytuacjach wygodniej jest posługiwać się jeszcze inną definicją całki, tak zwaną *całką Lebesgue'a*. W teorii tej całki twierdzenia o przejściu do granicy pod znakiem całki są znacznie wygodniejsze i mocniejsze. Naturalne uogólnienia wzoru na całkowanie przez części (obejmujące funkcje z nieciągłymi pochodnymi, a także funkcje ciągłe, które są w pewnych punktach nieróżniczkowalne), przydatne np. w teorii równań różniczkowych i jej konkretnych zastosowań, również wygodniej jest rozpatrywać w teorii całki Lebesgue'a.

Różnicę między całkami Newtona i Riemanna oraz całką Lebesgue'a można zobrazować poglądowo za pomocą następującej analogii. Przybliżając całkę Riemanna (a także nadając sens geometryczny całce Newtona), dodajemy pola kolejnych prostokątnych słupków, które mogą na przemian być wysokie i niskie. Gdy rozdrabniamy podział odcinka, wysokości słupków naśladują wszelkie wahania całkowanej funkcji. To tak, jakbyśmy obliczali sumę pieniędzy w portfelu, ułożywszy wiele banknotów w zupełnie przypadkowym porządku, mieszając nominały. Każdy wie jednak, że prościej jest ułożyć banknoty nominalami i dopiero wtedy liczyć pieniądze. Całka Lebesgue'a wykorzystuje właśnie takie podejście. Z grubsza biorąc, najpierw dzielimy dziedzinę funkcji na zbiory, na których funkcja przybiera z dobrym przybliżeniem mniej więcej tę samą wartość. Obliczamy 'sumę pól słupków', których podstawy mogą być dość dziwnymi zbiorami, a potem wykonujemy przejście graniczne. Doprecyzowanie tej nieco mętnej intuicji, a także wyznaczenie bardzo szerokiej klasy funkcji, dla których takie podejście ma sens, wymaga jednak *głębszego wnikięcia w strukturę podzbiorów prostej rzeczywistości* (i ogólniej, przestrzeni \mathbb{R}^n).

Zaletą całek Newtona i Riemanna, które wystarczają do wielu praktycznych zastosowań rachunku całkowego, jest prostota definicji. W subtelniejszych zastosowaniach, a także w teorii, bardzo przydają się silne narzędzia z teorii całki Lebesgue'a, za które trzeba jednak zapłacić dłuższym szykowaniem pojęć tak zwanej *teorii miary*.

Warto, żeby Czytelnik o tej różnicy wiedział już teraz i pamiętał o niej w przyszłości.

9.4 Geometryczne zastosowania całki

Wiemy już, że dla funkcji $f: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ ciągłej, albo ogólniej całkownej w sensie Riemanna, liczba $\int_a^b f(x) dx$ jest polem obszaru $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Opiszemy w tym rozdziale kilka innych geometrycznych zastosowań całki, m.in. do obliczania długości krzywej, a także objętości i pól powierzchni brył obrotowych.

Nie będziemy w sposób ścisły definiować objętości ani pola powierzchni brył w \mathbb{R}^3 . Poprzestaniemy na dość naturalnych intuicjach, a do tematu wrócimy podczas wykładów analizy matematycznej na drugim roku studiów. Wtedy omówimy go znacznie głębiej i ściślej, nie ograniczając się tylko do brył obrotowych.

9.4.1 Długość krzywej

Będziemy rozpatrywać krzywe płaskie, będące wykresami funkcji jednej zmiennej $y = f(x)$ na pewnym przedziale, a także krzywe opisane równaniami parametrycznymi,

$$\varphi: [a, b] \ni t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathbb{R}^n. \quad (9.56)$$

Dla $n = 2, 3$ są to krzywe na płaszczyźnie i w przestrzeni. Na przykład, obrazem przekształcenia $[0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ jest okrąg jednostkowy na płaszczyźnie z kartezjańskim układem współrzędnych.

Będziemy na razie zakładać, że funkcja (9.56) jest różnowartościowa, tzn. z geometrycznego punktu widzenia krzywa pozbawiona jest samoprzecięć. Dla prostoty, zajmiemy się szczegółowo przypadkiem $n = 2$. Przypadek $n \geq 3$ jest w pełni analogiczny.

Definicja 9.62. Łamaną wpisaną w krzywą $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazwiemy sumę ℓ odcinków o końcach $(\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$, zwanych wierzchołkami łamanej, gdzie $i = 0, 1, \dots, n$, zaś $P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ należy do zbioru \mathcal{P} wszystkich podziałów odcinka $[a, b]$.

Zbiór wszystkich łamanych wpisanych w daną krzywą będziemy oznaczać literą \mathcal{W} .

Definicja 9.63. Długością łamanej $\ell \in \mathcal{W}$ o końcach $(\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$, gdzie $i = 0, 1, \dots, n$ oraz $P = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{P}$, nazywamy liczbę

$$d(\ell) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1}))^2 + (\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1}))^2} \quad (9.57)$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że każdy składnik sumy (9.57) rzeczywiście jest długością odcinka, łączącego dwa sąsiednie wierzchołki łamanej.

Definicja 9.64 (długość krzywej). Niech $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Długością krzywej φ nazywamy kres górny długości wszystkich łamanych wpisanych w tę krzywą, tzn. liczbę

$$d(\varphi) = \sup_{\ell \in \mathcal{W}} d(\ell), \quad (9.58)$$

Proszę zauważyć, że ta definicja jest zgodna z naturalną intuicją: odpowiednio gładką krzywą można z dobrą dokładnością zmierzyć linijką, przybliżając długość krzywej długością łamanej o wielu wierzchołkach. Długość łamanej nie będzie większa od długości krzywej.

Twierdzenie 9.65 (wzór na długość krzywej). Niech $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie funkcją różnowartościową klasy C^1 . Wtedy

$$d(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt. \quad (9.59)$$

Twierdzenie wyraża jasną intuicję fizyczną: parametryzacja φ to opis sposobu, w jaki poruszamy się po danym torze ruchu, zaś φ_1' i φ_2' to składowe wektora prędkości. Liczba $v(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}$ jest długością wektora prędkości w chwili t , czyli chwilową szybkością ruchu. Dla fizyka iloczyn $v'(t) dt$ to przyrost drogi, uzyskany w czasie dt . Dla kogoś, kto tak myśli, wzór na długość krzywej to po prostu zależność między czasem, prędkością i drogą; ponieważ prędkość nie jest stała, więc dzielimy przedział czasu na mniejsze odcinki i przybliżamy całkę sumami Riemanna.

Podobnie jest w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Długość krzywej $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdzie $\varphi_k \in C^1$ dla $k = 1, 2, 3$, określona jako kres górny długości łamanych, wpisanych w tę krzywą, wynosi

$$d(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2 + \varphi_3'(t)^2} dt.$$

Dowód. Krok 1. Oznaczenia i plan dowodu. Wprowadźmy oznaczenia

$$v(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}, \quad t \in [a, b], \quad I = \int_a^b v(t) dt = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$

Wybermy dowolną łamaną $l \in W$, odpowiadający jej podział $P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ odcinka $[a, b]$, oraz liczbę $\varepsilon > 0$. Z nierówności trójkąta wynika, że jeśli podział P_1 powstaje z P przez zagęszczenie, to odpowiadająca mu łamana l_1 ma długość $d(l_1) \geq d(l)$.

Wykażemy, że podział P_1 można wybrać tak, aby uzyskać

$$d(l) \leq d(l_1) < I + \varepsilon, \quad |I - d(l_1)| < \varepsilon. \quad (9.60)$$

Następnie, przechodząc do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$, otrzymamy $d(l) \leq I$, co wobec dowolności łamanej l oznacza

$$d(\varphi) = \sup_{l \in \mathcal{W}} d(l) \leq I.$$

Z drugiej nierówności (9.60) wynika jednak, że istnieją łamane $l_1 \in \mathcal{W}$, dla których liczba $d(l_1)$ może znajdować się dowolnie blisko liczby I . Zatem nie może zachodzić ostra nierówność $d(\varphi) < I$; musi zachodzić równość $d(\varphi) = I$. Pozostaje tylko wykazać (9.60).

Krok 2. Nierówności (9.60). Niech $\eta > 0$. Liczbę η dobierzemy do $\varepsilon > 0$ później. Dokonując zagęszczenia podziału P i nie zmniejszając długości odpowiadającej mu łamanej, przyjmijmy odtąd, bez zmniejszenia ogólności, że $P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$, gdzie

$$0 < \Delta t_i = t_i - t_{i-1} < \delta, \quad i = 1, \dots, n.$$

Liczbę $\delta > 0$ dobierzemy za chwilę. Rozpatrzmy i -ty składnik we wzorze (9.57) na długość łamanej. Posługując się dwukrotnie twierdzeniem Lagrange'a o wartości średniej, dla

funkcji φ_1 i φ_2 , otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})\right)^2 + \left(\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1})\right)^2} \\ &= \Delta t_i \cdot \sqrt{\left(\frac{\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right)^2} \\ &= \Delta t_i \cdot \underbrace{\sqrt{\left(\varphi_1'(s_i)\right)^2 + \left(\varphi_2'(u_i)\right)^2}}_{=(\text{ozn.}) W(s_i, u_i)}, \quad \text{gdzie } t_{i-1} < s_i, u_i < t_i. \end{aligned}$$

Sprawdźmy teraz, że jeśli liczba $\delta > 0$ jest dostatecznie mała, to $|W(s, u) - v(s)| < \varepsilon$ dla wszystkich $s, u \in [a, b]$ takich, że $|s - u| < \delta$. Jeśli $W(s, u) = 0$, to ów fakt łatwo wynika z ciągłości φ_2' . Jeśli $W(s, u) \neq 0$, to mamy

$$\begin{aligned} |W(s, u) - v(s)| &= \frac{|\varphi_2'(u)^2 - \varphi_2'(s)^2|}{W(s, u) + v(s)} \leq |\varphi_2'(u) - \varphi_2'(s)| \cdot \underbrace{\frac{|\varphi_2'(u)| + |\varphi_2'(s)|}{W(s, u)}}_{=(\text{ozn.}) \lambda} \\ &\leq |\varphi_2'(u) - \varphi_2'(s)| \cdot \sqrt{2} \quad (\text{gdź w obec nier. Schwarz'a } \lambda \leq \sqrt{2}) \\ &< \eta \sqrt{2} \end{aligned}$$

o ile, korzystając z jednostajnej ciągłości φ_2' na $[a, b]$, dobierzemy $\delta > 0$ tak, aby $|\varphi_2'(s) - \varphi_2'(u)| < \eta$ dla wszystkich $|s - u| < \delta$. Rozważmy teraz dwie sumy,

$$d(\ell) = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot W(s_i, u_i), \quad S = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot v(s_i)$$

Z Twierdzenia 9.33 o aproksymacji całki $I = \int_a^b v(s) ds$ sumami Riemanna wynika, że $|I - S| < \varepsilon/2$, gdy $\delta > 0$ jest dostatecznie małe. Natomiast

$$|S - d(\ell)| \leq \sum_{i=1}^n \Delta t_i |W(s_i, u_i) - v(s_i)| < \eta \sqrt{2} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \eta \sqrt{2} (b - a) < \varepsilon/2$$

np. dla $\eta = \varepsilon/(4(b - a))$. Z nierówności trójkąta, $|I - d(\ell)| < \varepsilon$. Dowód jest zakończony. \square

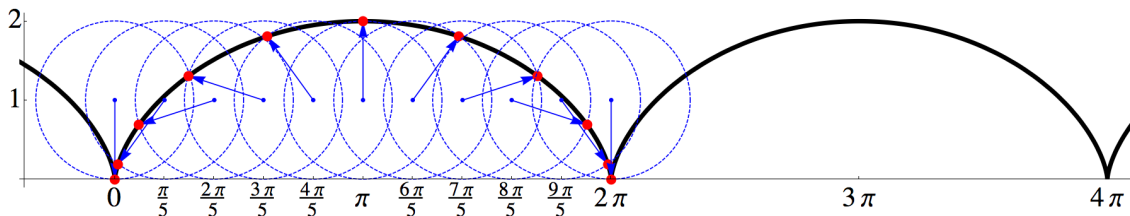
Uwaga 9.66. Kluczowej technicznej trudności w dowodzie dostarczało to, że stosując twierdzenie Lagrange'a do wyrażenia wzoru na długość łamanej za pomocą pochodnych, uzyskiwaliśmy wartości pochodnych φ_1' i φ_2' w różnych punktach s_i, u_i każdego odcinka podziału. Dlatego potrzebny był fragment z szacowaniem różnicy $W(s, u)$ i $v(s)$.

Wniosek 9.67. Jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 , to długość wykresu tej funkcji jest równa całce

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Dowód. Stosujemy twierdzenie do funkcji $\varphi_1(x) = x$ i $\varphi_2 = f$. \square ¹⁴

¹⁴Zainteresowany teorią Czytelnik zechce udowodnić ten wniosek bezpośrednio. Dowód jest prostszy, niż dowód Twierdzenia 9.65.



Zbiór punktów $\{(t - \sin t, 1 - \cos t) : t \in \mathbb{R}\}$ to cycloida. Zaznaczonych zostało 11 położenia toczącego się okręgu (z ustalonym punktem na obwodzie i promieniem o końcu w tym punkcie), odpowiadających równym odstępom czasu $\pi/5$. Widać, że punkt toczącego się okręgu nie przemieszcza się wcale po cycloidzie ze stałą szybkością. To jasne:

$$v(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} = \sqrt{2 - 2 \cos t}, \quad \inf v = 0, \quad \sup v = 2.$$

Uwaga 9.68. Warto zauważyć, że powyższe twierdzenie stosuje się także do takich krzywych, dla których obraz $\varphi([a, b])$ odcinka $[a, b]$ *nie jest* wykresem funkcji klasy C^1 , tylko ma “dziobki”. Przykład: biorąc

$$\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R},$$

otrzymujemy *cykloidę*, krzywą, jaką zakreśla ustalony punkt okręgu jednostkowego, toczącego się po linii prostej bez poślizgu i ze stałą prędkością. Pochodne parametryzacji to $\varphi_1'(t) = 1 - \cos t$ i $\varphi_2'(t) = \sin t$. W punktach $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tzn. tam, gdzie $\cos t = 1$, stosunek φ_2'/φ_1' ma granicę lewostronną równą $-\infty$, a prawostronną równą $+\infty$ (proszę spojrzeć na znak sinusa). Dlatego w tych punktach cycloida ma “dziobki.”

Przykład 9.69 (długość okręgu). Obliczymy długość okręgu jednostkowego, tzn. krzywej $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Mamy

$$v(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1; \quad \text{zatem} \quad d(\varphi) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Można postąpić inaczej. Czwartka okręgu to wykres $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $x \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$. Mamy

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(i teraz jest jasne, dlaczego wybraliśmy akurat taki przedział: na $[0, 1]$ otrzymany wzór nie określa funkcji ciągłej, z uwagi na zero mianownika w jedyńce). Dlatego

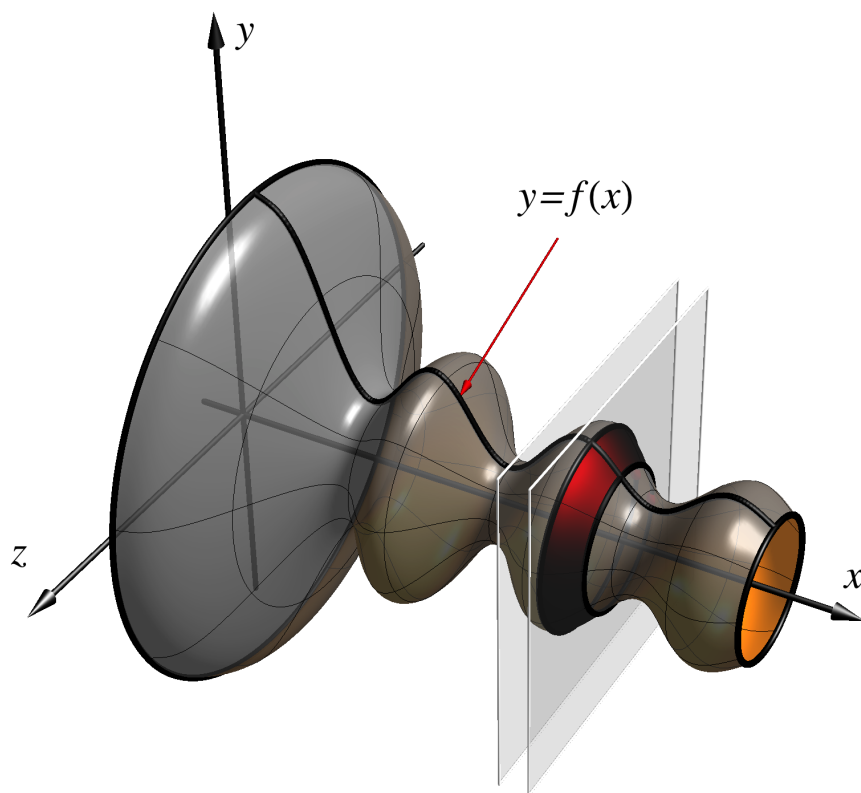
$$\frac{1}{4}d(\varphi) = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Przykład 9.70 (długość jednego łuku cycloidy). Obliczymy długość jednego łuku cycloidy. Niech $\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ dla $t \in [0, 2\pi]$. Wtedy

$$v(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} = \sqrt{2 - 2 \cos t} = 2 \sin \frac{t}{2}, \quad 0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi.$$

(Posłużyliśmy się jedyńką trygonometryczną i wzorem $\cos t = 1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2}$.) Dlatego

$$d(\varphi) = \int_0^{2\pi} v(t) dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8.$$



Obracając położony w płaszczyźnie (x, y) wykres funkcji $y = f(x)$ (klasy C^1) wokół osi x w \mathbb{R}^3 , otrzymujemy pewną powierzchnię obrotową. Bliskie, równoległe płaszczyzny $x = x_{i-1}$ i $x = x_i$ wycinają z tej powierzchni część, która jest bardzo bliska powierzchni bocznej stożka ściętego o promieniach podstaw $r_1 = f(x_{i-1})$, $r_2 = f(x_i)$ i wysokości $h = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Co ciekawe, wynik jest liczbą wymierną. Długość łuku cykloidy znali Gilles de Roberval i Christopher Wren w XVII wieku.

9.4.2 Objętość bryły obrotowej. Pole powierzchni obrotowej

Założmy, że funkcja $f: \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ jest klasy C^1 . Obracając wykres f wokół osi x -ów, otrzymujemy powierzchnię obrotową (patrz rysunek). Powiemy, nie wnikając nadmiernie w kłopotliwe szczegóły techniczne, związane z formalnym definiowaniem objętości i pola powierzchni, jak znaleźć objętość bryły, ograniczonej w \mathbb{R}^3 powstałą powierzchnią oraz dwiema płaszczyznami $x = a$, $x = b$, a także pole powierzchni bocznej tej bryły.

Objętość V takiej bryły wyraża się całką

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (9.61)$$

Z intuicyjnego punktu widzenia jest to dość jasne. Dzieląc odcinek $[a, b]$ na n równych części punktami $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$ i prowadząc płaszczyzny $x = x_k$ prostopadłe do osi x -ów, potniemy bryłę na plastry. Składnik

$$\pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

wyraża objętość walca o promieniu podstawy $f(x_i)^2$ i wysokości Δx_i . Suma objętości takich walców, czyli suma Riemanna całki $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$, tym lepiej przybliża objętość (całkę), im gęściej prowadzimy płaszczyzny cięć.¹⁵

Przykład 9.71 (objętość kuli). Niech $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dla $x \in [-1, 1]$. Wykres f jest połówką okręgu; obróciwszy go, otrzymujemy powierzchnię kuli jednostkowej. Objętość tej kuli jest równa

$$V = \pi \int_{-1}^1 f^2(x) dx = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Objętość kuli o promieniu r wynosi $4\pi r^3/3$, gdyż objętość brył podobnych jest równa sześcianowi skali podobieństwa.

Pole A powierzchni bocznej takiej bryły wyraża się całką

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx. \quad (9.62)$$

Aby to zrozumieć, zauważmy, że dwie bardzo bliskie płaszczyzny $x = x_i$ i $x = x_{i-1}$ wycinają z takiej powierzchni obrotowej fragment, który w bardzo dobrym przybliżeniu jest powierzchnią boczną stożka ściętego o promieniach podstaw $r_1 = f(x_{i-1})$, $r_2 = f(x_i)$ i wysokości $h = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (patrz rysunek). Jak widzieliśmy, obliczając długość krzywej, tworząca takiego stożka ma długość równą, z bardzo dobrym przybliżeniem, $\Delta x_i \cdot \sqrt{1+f'(x_i)^2}$. Dlatego pole powierzchni bocznej takiego stożka ściętego wynosi, z zaniedbywalnym w granicy $\Delta x_i \rightarrow 0$ błędem, tyle, co pole prostokątnego paska o bokach $2\pi f(x_i)$ (obwód okręgu) i $\Delta x_i \cdot \sqrt{1+f'(x_i)^2}$, a więc

$$2\pi f(x_i) \cdot \Delta x_i \cdot \sqrt{1+f'(x_i)^2}.$$

Sumując i przechodząc do granicy, otrzymujemy całkę (9.62).

Przykład 9.72 (Pole powierzchni sfery jednostkowej). Jak wcześniej, niech $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dla $x \in [-1, 1]$. Wtedy

$$2\pi f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} = 2\pi \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi$$

jest po prostu funkcją stałą. Wynikają stąd dwa wnioski. Po pierwsze, pole powierzchni sfery jednostkowej w \mathbb{R}^3 jest równe

$$A = 2\pi \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx = 2\pi \int_{-1}^1 1 dx = 4\pi.$$

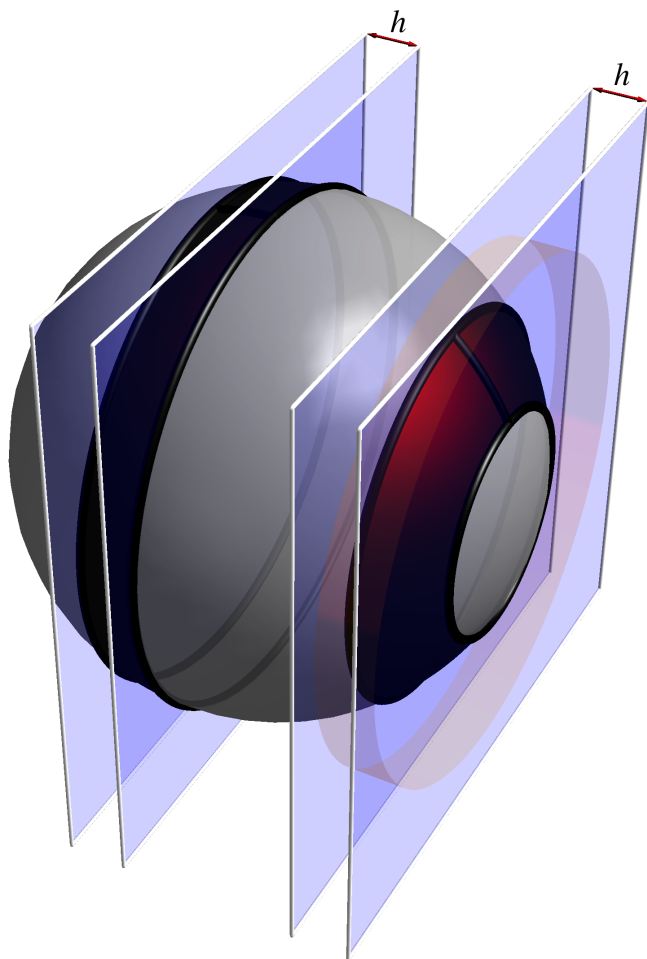
Zatem, pole sfery jest równe polu powierzchni bocznej opisanego na niej walca.

¹⁵Czytelnik powinien zdawać sobie sprawę, że to intuicja dobra i naturalna, ale jednak nie do końca ścisła, z dwóch powodów. Po pierwsze, nie powiedzieliśmy, czym jest *objętość*. Po drugie, szkolny wzór na objętość walca, będący uogólnieniem wzoru na objętość graniastopłupa, przyjęliśmy tu “na wiarę”.

Po drugie, zauważmy, że obracając łuk okręgu, krzywą $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dla $x \in [a, b]$, gdzie $-1 \leq a < b \leq 1$, otrzymujemy fragment, wycięty ze sfery dwiema równoległymi płaszczyznami $x = a$ i $x = b$. Pole powierzchni tego fragmentu,

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_a^b 1 dx = 2\pi(b - a),$$

zależy *tylko* od różnicy $b - a$, nie zaś od liczb a i b z osobna. \square



odstępu h tych płaszczyzn i jest równe $2\pi rh$. Na rysunku oba ciemne fragmenty sfery, a także jaśniejsza, półprzezroczysta obręczka, wycięta przez dwie płaszczyzny z powierzchni bocznej opisanego na sferze walca, mają równe pola.

Wiedział to wszystko już Archimedes ponad 2200 lat temu. Doszedł do tego wniosku bez użycia rachunku całkowego we współczesnej postaci, wykonując jednak *de facto* pewne przejścia graniczne i stosując metodę, nazywaną *całkowaniem starożytnych* lub *metodą wyczerpywania*. (Czytelnik może dowiedzieć się więcej o tej metodzie, czytając np. *Wykłady z historii matematyki* Marka Kordosa).

Stosowanie tej metody wymagało **znacznie** większej pomysłowości, niż proste i mechaniczne obliczenie konkretnych całek, którymi posłużyliśmy się w tym podrozdziale, żeby wyznaczyć objętość kuli oraz pole sfery. (Aby zrozumieć sens tego zdania, proszę obliczyć pole figury, ograniczonej prostą i łukiem paraboli, nie posługując się naszą dzisiejszą notacją i pojęciem całki. Można rozpatrzyć sumy Riemanna wprost, ale to nie jest szczególnie wygodne.)

Wspomniana własność sfery (patrz też rysunek obok) nazywana bywa czasem **twierdzeniem Archimedes**: pole powierzchni obręczy, którą wycięto ze sfery o promieniu r dwiema równoległymi płaszczyznami, zależy tylko od

Rozdział 10

Całki niewłaściwe. Funkcje Γ i B Eulera oraz ich zastosowania

W tym rozdziale omówimy pojęcie całki niewłaściwej. Zajmiemy się też dwoma bardzo ważnymi konkretnymi typami takich całek: funkcjami Γ (gamma) i B (beta) Eulera, które stanowią, odpowiednio, naturalne uogólnienie silni oraz współczynników dwumianowych Newtona na wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie.

10.1 Całka niewłaściwa

Definicja 10.1 (całka niewłaściwa na przedziale nieskończonym). Załóżmy, że funkcja $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Jeśli istnieje skończona granica

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x) dx, \quad (10.1)$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* funkcji f na przedziale $[a, \infty)$ (albo: od a do nieskończoności) i oznaczamy

$$\int_a^\infty f(x) dx.$$

Mówimy wtedy, że całka niewłaściwa f na $[a, \infty)$ jest *zbieżna*. Jeśli granica (10.1) nie istnieje, to mówimy, że całka $\int_a^\infty f(x) dx$ jest *rozbieżna*.

Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą funkcji $f: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$, a także całkę niewłaściwą takiej funkcji $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (odpowiednio, $f: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$), która dla każdego $a < b < \infty$ (odpowiednio, każdego $-\infty < b < a$) jest całkowna w sensie Riemanna na przedziale domkniętym o końcach a, b .

Spójrzmy na proste przykłady.

Przykład 10.2. Niech $f(x) = e^{-x}$ dla $x \in [0, \infty)$. Dla dowolnej liczby $y > 0$ jest

$$\int_0^y e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^y = 1 - e^{-y}.$$

Ponadto, $1 - e^{-y} \rightarrow 1$ dla $y \rightarrow +\infty$. Dlatego

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

Przykład 10.3. Niech $f(x) = 1/x^s$, $x \geq 1$, $s \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\int_1^y f(x) dx = \int_1^y \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \ln x \Big|_1^y = \ln y & \text{dla } s = 1, \\ \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big|_1^y = \frac{y^{1-s} - 1}{1-s} & \text{dla } s \neq 1. \end{cases}$$

Jeśli $s = 1$, to granica całek $\int_1^y f dx$ przy $y \rightarrow \infty$ jest nieskończona, gdyż $\ln y \rightarrow \infty$ dla $y \rightarrow \infty$. Całka niewłaściwa $\int_1^\infty (1/x) dx$ jest zatem rozbieżna.

Jeśli $s \neq 1$, to granica całek $\int_1^y f dx$ przy $y \rightarrow \infty$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja potęgowa y^{1-s} ma granicę skończoną dla $y \rightarrow \infty$, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy wykładnik $1 - s < 0$. Dla takich s mamy

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{1-s} - 1}{1-s} = \frac{1}{s-1} \quad (s > 1).$$

Dla wszystkich pozostałych $s \in \mathbb{R}$ całka $\int_1^\infty x^{-s} dx$ jest rozbieżna.

Przykład 10.4. Niech $f(x) = 1/(1+x^2)$, $x \geq 0$. Dla każdego $y > 0$ jest

$$\int_0^y f(x) dx = \int_0^y \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^y = \arctg y.$$

Dlatego

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \arctg y = \frac{\pi}{2}.$$

Z uwagi na parzystość funkcji podcałkowej, mamy także

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} (-\arctg y) = \frac{\pi}{2}$$

Zatem,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Uwaga 10.5. Jeśli istnieje całka $\int_a^\infty f(x) dx$, to dla każdego $b > a$ istnieje $\int_b^\infty f(x) dx$ i zachodzi równość

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^\infty f(x) dx. \quad (10.2)$$

Istotnie, dla każdego $y > b$ mamy przecież

$$\int_a^y f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^y f(x) dx.$$

Dlatego lewa strona ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy prawa strona ma granicę. Zachodzi też równość tych granic, czyli równość (10.2).

Twierdzenie 10.6 (warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych). Całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek Cauchy'ego dla całek: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $M > a$, że dla wszystkich $y_2 > y_1 > M$ zachodzi nierówność

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Dowód. Jeśli $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna, tzn. istnieje granica

$$g = \lim_{y \rightarrow \infty} I(y), \quad \text{gdzie} \quad I(y) = \int_a^y f(x) dx,$$

to zgodnie z definicją (Cauchy'ego) granicy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $M > 0$, że dla wszystkich $y > M$ jest $|I(y) - g| < \varepsilon/2$. Zatem, dla $y_2 > y_1 > M$ jest

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| = |I(y_2) - I(y_1)| \leq |I(y_2) - g| + |g - I(y_1)| < \varepsilon.$$

Na odwrót, załóżmy, że zachodzi warunek podany w twierdzeniu. Niech $(a_m) \subset [a, \infty)$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do nieskończoności. Warunek Cauchy'ego dla całek jest po prostu warunkiem Cauchy'ego dla ciągu liczbowego $I(a_m)$. Zatem, istnieje granica tego ciągu, pewna liczba $g = \lim I(a_m) \in \mathbb{R}$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy do $\varepsilon/2$ liczbę $M > a$ tak, aby warunek Cauchy'ego dla całek zachodził dla wszystkich $y_2 > y_1 > M$ z liczbą $\varepsilon/2$ zamiast ε po prawej stronie nierówności. Niech $y > M$. Wybierzmy $m \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_m > y$ oraz $|I(a_m) - g| < \varepsilon/2$. Wówczas,

$$|I(y) - g| = \left| I(a_m) - \int_y^{a_m} f(x) dx - g \right| \leq |I(a_m) - g| + \left| \int_y^{a_m} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zatem, wprost z definicji granicy $I(y) \rightarrow g$ dla $y \rightarrow \infty$. \square

Zajmiemy się teraz nieco bliżej związkiem całek niewłaściwych z szeregami.

Definicja 10.7 (całkowalność bezwzględna i całkowalność warunkowa). Niech $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że całka $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna bezwzględnie, a funkcja f jest bezwzględnie całkowalna na $[a, \infty)$, wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka

$$\int_a^\infty |f(y)| dy.$$

Jeśli całka $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna, ale nie jest zbieżna bezwzględnie, to mówimy, że jest zbieżna warunkowo. Mówimy wtedy, że f jest warunkowo całkowalna na $[a, \infty)$.

Wniosek 10.8. Jeśli $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest bezwzględnie całkowalna na $[a, \infty)$, to całka $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna.

Dowód. Stosujemy kryterium całkowalności z Twierdzenia 10.6 i nierówność trójkąta dla całek,

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| < \int_{y_1}^{y_2} |f(x)| dx.$$

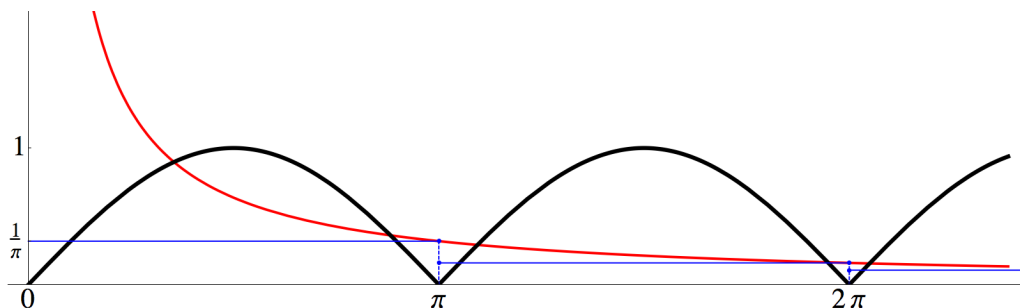
Jeśli całki z prawej strony nierówności są (dowolnie) małe dla wszystkich $y_2 > y_1$ dostatecznie dużych, to i całki z lewej strony są (dowolnie) małe dla wszystkich $y_2 > y_1$ dostatecznie dużych. \square

Jest więc podobnie, jak dla szeregów: bezwzględna zbieżność implikuje zwykłą zbieżność. Nie musi być odwrotnie: spójrzmy na klasyczny przykład.

Przykład 10.9. Niech $f(x) = x^{-1} \sin x$ dla $x > 0$ i $f(0) = 1$. Wtedy funkcja f jest ciągła na $[0, \infty)$, gdyż $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ dla $x \rightarrow 0$. Wykażemy, że całka niewłaściwa funkcji f , tzw. *całka Dirichleta*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (10.3)$$

jest zbieżna tylko warunkowo, tzn. zbieżna, ale nie bezwzględnie zbieżna.



Na przedziale $(k\pi, (k+1)\pi)$ jest $|\sin x| \geq 1/((k+1)\pi)$.

Zacznijmy od rozbieżności całki niewłaściwej z funkcji $|f(x)| = |\sin x|/x$. Niech $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Mamy

$$\frac{|\sin x|}{x} > \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} \quad \text{dla } x \in (k\pi, (k+1)\pi)$$

i dlatego

$$\begin{aligned} \int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &= \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j} \\ &\rightarrow +\infty \quad \text{dla } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gdyż szereg harmoniczny $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Zatem całka $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$ jest rozbieżna.

Oznaczmy teraz

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Aby wykazać zbieżność całki Dirichleta (10.3), sprawdzimy najpierw, że szereg liczbowy $\sum_k I_k$ jest zbieżny. Posłużymy się w tym celu kryterium Leibniza (Wniosek 4.42). Za-uważmy najpierw, że dla każdego $k = 0, 1, 2, \dots$ jest

$$I_{2k} > 0 > I_{2k+1}$$

To łatwo wynika z monotoniczności całki i faktu, że sinus jest dodatni na przedziałach $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$, a ujemny na przedziałach $(2k\pi + \pi, (2k+2)\pi)$. Ponadto, ponieważ w każdej z całek I_k funkcja podcałkowa ma stały znak, więc dla każdego $k = 0, 1, 2, \dots$ jest

$$\begin{aligned} |I_k| &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} |\sin y| dy \geq \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{|\sin y|}{y} dy = |I_{k+1}|. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z okresowości modułu sinusa (środkowa równość) oraz z nierówności

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \geq \frac{1}{y} \quad \text{dla wszystkich } 0 \leq k\pi < x \leq (k+1)\pi \leq y.$$

Zatem, znaki liczb I_k zmieniają się na przemian, zaś ciąg $|I_k|$ jest malejący. Z wypisanych oszacowań wnioskujemy ponadto, że $|I_{k+1}| \leq c/(k+1)$ dla $c = 2/\pi$. Spełnione są więc wszystkie założenia kryterium Leibniza; na mocy tego kryterium szereg $\sum I_k$ jest zbieżny. Niech S oznacza sumę tego szeregu.

Ustalmy teraz liczbę $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $M \in \mathbb{N}$, tak, aby spełnione były dwa warunki:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} I_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n > M$$

oraz

$$\frac{1}{x} < \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad \text{dla } x > M.$$

Niech $y > M\pi$ i $n = [y/\pi]$. Wtedy, z własności entier, $0 \leq y - n\pi < \pi$. Możemy więc oszacować

$$\begin{aligned} \left| \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx - S \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} I_k + \int_{n\pi}^y \frac{\sin x}{x} dx - S \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} I_k - S \right| + \int_{n\pi}^y \frac{|\sin x|}{x} dx < \frac{\varepsilon}{2} + (y - n\pi) \frac{\varepsilon}{2\pi} < \varepsilon. \end{aligned}$$

(Idea jest bardzo prosta: dla dużych y całka $\int_0^y f dx$ różni się bardzo niewiele od odpowiednio dobranej sumy częściowej szeregu całek I_k).

Otrzymaliśmy więc równość

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = S = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Uwaga 10.10. Można wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dla funkcji nieujemnych zbieżność całek niewłaściwych można bardzo wyraźnie powiązać ze zbieżnością szeregów. Dla uproszczenia przyjmijmy $a = 0$ (przedział całkowania zawsze można tak przesunąć, aby jego koniec znalazł się w zerze).

Twierdzenie 10.11. Niech $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą. Następujące warunki są wówczas równoważne:

(i) Całka niewłaściwa $\int_0^\infty f(x) dx$ jest zbieżna.

(ii) Dla każdego rosnącego ciągu liczb nieujemnych (a_m) dążącego do $+\infty$ szereg

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{a_m}^{a_{m+1}} f(x) dx$$

jest zbieżny.

(iii) Dla pewnego rosnącego ciągu liczb nieujemnych (a_m) dążącego do $+\infty$ szereg

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{a_m}^{a_{m+1}} f(x) dx$$

jest zbieżny.

Dowód. (i) \Rightarrow (ii). Niech (a_m) będzie jakimkolwiek ciągiem rosnącym liczb nieujemnych. Mamy

$$\int_0^{a_{m+1}} f(x) dx = \int_0^{a_1} f(x) dx + \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx.$$

Z warunku (i) wynika, że lewa strona ma skończoną granicę dla $m \rightarrow \infty$. Zatem prawa strona też ma skończoną granicę, a to oznacza, że ciąg sum częściowych szeregu S jest zbieżny.

(ii) \Rightarrow (iii). To jest oczywiste.

(iii) \Rightarrow (i). Załóżmy, że szereg S jest zbieżny. Niech $\varepsilon > 0$. Z kryterium Cauchy'ego dla szeregów wynika, że istnieje $M \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $N > M$ jest

$$\sum_{k=M}^N \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx = \left| \sum_{k=M}^N \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

(pamiętajmy, że $f \geq 0$). Niech teraz $y_2 > y_1 > a_M$ będą dowolne. Wybierzmy $N > M$ tak, aby $a_{N+1} > y_2$. Wówczas, dzięki monotoniczności całki,

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| = \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \leq \int_{a_M}^{a_N} f(x) dx = \sum_{k=M}^N \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx < \varepsilon.$$

Zachodzi więc warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych, podany w Twierdzeniu 10.6. Dlatego całka $\int_0^\infty f(x) dx$ jest zbieżna. \square

Czytelnik może sprawdzić, że analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji nieujemnych, które są całkowne w sensie Riemanna na każdym przedziale skończonym $[0, b]$.

Twierdzenie 10.12. Niech $f: [a, \infty) \rightarrow [a, \infty)$, gdzie $a \geq 0$, będzie funkcją nierosnącą. Następujące warunki są równoważne:

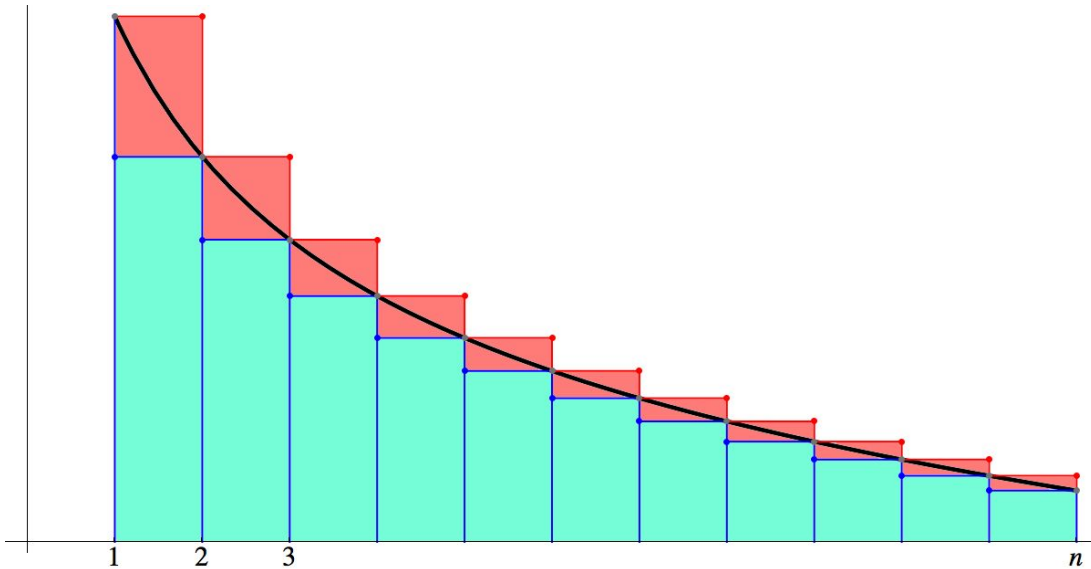
(i) Całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna.

(ii) Szereg $S = \sum_{n=[a+1]}^\infty f(n)$ jest zbieżny.

SZKIC DOWODU. Ponieważ f jest nieujemna i nierosnąca, więc dla $n \geq a + 1$ mamy

$$\int_{n-1}^n f(x) dx \geq 1 \cdot \inf_{[n-1, n]} f = f(n) = 1 \cdot \sup_{[n, n+1]} f \geq \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

Sumując takie nierówności względem n , łatwo porównujemy (z góry i z dołu, z dokładnością do stałych składników) sumy częściowe S_m szeregu S z całkami $I(m) = \int_a^m f(x) dx$. Zarówno sumy S_m , jak i całki $I(m)$, tworzą ciągi rosnące. Zatem jeden z tych ciągów jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest drugi z nich. (Patrz także rysunek). \square



Jeśli f jest funkcją malejącą np. na $[1, \infty)$, to dla każdego n jest

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=2}^n f(k).$$

Uwaga 10.13. Czytelnik zauważył być może, że w ostatnim twierdzeniu nie zakładaliśmy, że f jest ciągła (lub choćby całkowalna w sensie Riemanna na przedziałach ograniczonych). To nie jest potrzebne: zbiór punktów nieciągłości funkcji nierosnącej jest co najwyżej przeliczalny, więc z twierdzenia charakteryzującego funkcje całkowalne w sensie Riemanna wynika, że funkcja nierosnąca jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale skończonym.

Zadanie 10.14. Skonstruować przykład funkcji ciągłej $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, dla której całka niewłaściwa $\int_0^\infty f(x) dx$ jest zbieżna, ale f nie ma granicy dla $x \rightarrow +\infty$ i $\sup f = |\inf f| = +\infty$.

Aby podkreślić związki całek niewłaściwych z szeregami, sformułujemy jeszcze dwa kryteria zbieżności takich całek.

Stwierdzenie 10.15 (kryterium porównawcze dla całek niewłaściwych). *Jeśli f, g są nieujemne i ciągłe na przedziale $[a, \infty)$ i istnieją $a_1 \geq a$ i $C > 0$ takie, że $C \cdot f(x) \geq g(x)$ dla wszystkich $x > a_1$, to ze zbieżności całki $\int_a^\infty f(x) dx$ wynika zbieżność całki $\int_a^\infty g(x) dx$, natomiast z rozbieżności całki $\int_a^\infty g(x) dx$ wynika rozbieżność całki $\int_a^\infty f(x) dx$.*

Dowód pozostawiamy zainteresowanemu Czytelnikowi. Jest nietrudny i bardzo podobny do dowodu kryterium porównawczego dla szeregów.

Podamy też odpowiednik kryterium Abela i Dirichleta. W tym celu najpierw wykazemy pomocnicze twierdzenie o wartości średniej dla całek.

Twierdzenie 10.16 (drugie twierdzenie o wartości średniej dla całki).

1. Załóżmy, że $f, h \in C([a, b])$ i $h \geq 0$. Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in [a, b]$, że

$$f(\xi) \int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x)h(x) dx$$

2. Załóżmy, że $f, g \in C([a, b])$, a ponadto g jest funkcją monotoniczną. Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in [a, b]$, że

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

Dowód. Najpierw udowodnimy pierwszy punkt. Ponieważ $h \geq 0$, więc dla każdego $x \in [a, b]$ mamy $h(x) \inf f \leq f(x)h(x) \leq h(x) \sup f$. Dlatego, z monotoniczności całki,

$$\inf_{[a,b]} f \int_a^b h(x) dx \leq I = \int_a^b f(x)h(x) dx \leq \sup_{[a,b]} f \int_a^b h(x) dx.$$

Jeśli $\int_a^b h(x) dx = 0$, to $fh \equiv 0$ i jako ξ można wybrać dowolny punkt przedziału $[a, b]$. Jeśli $\int_a^b h(x) dx \neq 0$, to liczba

$$\left(\int_a^b f(x)h(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b h(x) dx \right)^{-1}$$

należy do przedziału $[\inf f, \sup f]$, a więc na mocy własności Darboux jest wartością funkcji f w pewnym punkcie $\xi \in [a, b]$. To kończy dowód punktu pierwszego.

Aby wykazać drugą część twierdzenia, połóżmy $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ dla $x \in [a, b]$. Funkcja F znika dla $x = a$ i jest funkcją pierwotną f .

Dla ułatwienia załóżmy, że g jest funkcją klasy C^1 i $g' \geq 0$ (wpp. można g pomnożyć przez -1). Całkując przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x) dx && \text{gdyż } F(a) = 0 \\ &= F(b)g(b) - F(\xi) \int_a^b g'(x) dx && \text{na mocy punktu 1.} \\ &= F(b)g(b) - F(\xi)(g(b) - g(a)) \\ &= g(b) \int_\xi^b f(x) dx + g(a) \int_a^\xi f(x) dx. \end{aligned}$$

Niech teraz g będzie dowolną funkcją ciągłą monotoniczną. Znajdziemy ciąg wielomianów g_n zbieżny do g jednostajnie na $[a, b]$. Można bez zmniejszenia ogólności zakładać, że każdy z wielomianów g_n jest monotoniczny na $[a, b]$. (To nietrudno wywnioskować np. z faktu, że wielomiany Bernsteina funkcji f zależą w sposób monotoniczny od f). Zatem, dla każdego n istnieje $\xi_n \in [a, b]$ takie, że

$$\int_a^b f(x)g_n(x) dx = g_n(a) \int_a^{\xi_n} f(x) dx + g_n(b) \int_{\xi_n}^b f(x) dx.$$

Ciąg ξ_n nie musi wprawdzie być zbieżny, lecz ma podciąg zbieżny; przyjmijmy więc, żeby nie komplikować oznaczeń, że ξ_n jest po prostu zbieżny. Przechodząc w powyższej równości do granicy $n \rightarrow \infty$ i korzystając z Twierdzenia 9.37 (o przejściu do granicy pod znakiem całki), żeby wykonać przejście graniczne po lewej stronie, otrzymujemy tezę punktu drugiego w ogólnym przypadku (bez założenia różniczkowalności g).

Dowód całego twierdzenia jest zakończony. \square

Twierdzenie 10.17 (kryterium Abela–Dirichleta dla całek). *Załóżmy, że*

$$f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

są ciągłe, a ponadto:

1. Funkcja g jest monotoniczna i ma granicę równą zero dla $x \rightarrow +\infty$.
2. Istnieje taka liczba $M > 0$, że dla wszystkich $x_2 > x_1 \geq a$ jest

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < M.$$

Wówczas całka

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x) dx$$

jest zbieżna.

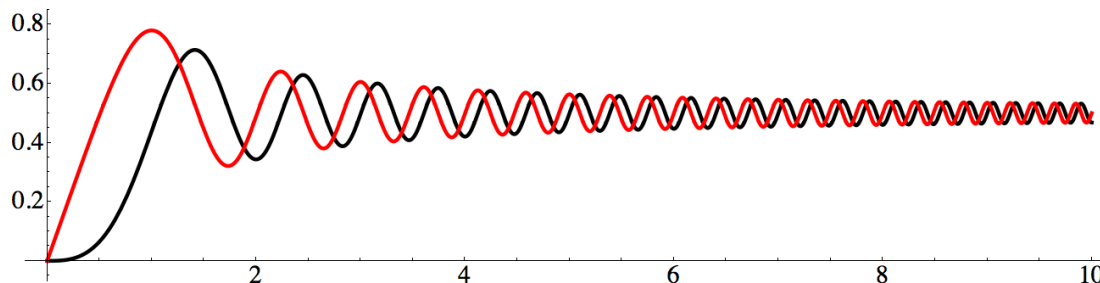
Dowód. Sprawdzimy, że spełniony jest warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $K > a$ tak, aby mieć $|g(x)| < \varepsilon/(2M)$ dla wszystkich $x > K$. Z drugiego twierdzenia o wartości średniej wnioskujemy, że dla dowolnych $y_2 > y_1 > K$ znajdzie się punkt $\xi \in [y_1, y_2]$ taki, że

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)g(x) dx \right| = \left| g(y_1) \int_{y_1}^{\xi} f(x) dx + g(y_2) \int_{\xi}^{y_2} f(x) dx \right| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon.$$

(Skorzystaliśmy po prostu z nierówności trójkąta dla sumy. Obie całki z f szacują się przez M , a wartości g w punktach y_i – przez $\varepsilon/(2M)$; są dwa takie składniki). \square

Przykład 10.18. 1. Z tego kryterium raz jeszcze można wywnioskować zbieżność całki Dirichleta

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$



Funkcje Fresnela

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt.$$

Czarny kolor odpowiada funkcji $S(x)$, gdyż $S'(0) = 0$, $C'(0) = 1 > 0$ (skale na osiach są różne).

Oczywiście można ograniczyć się do badania funkcji podcałkowej na $I = (1, \infty)$. Funkcja $g(x) = 1/x$ jest na tym przedziale ciągła i monotonicznie maleje do zera, natomiast

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \sin x dx \right| = |\cos y_2 - \cos y_1| \leq 2$$

dla wszystkich y_1, y_2 .

2. Całki Fresnela

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx, \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

są zbieżne, choć funkcje podcałkowe nie mają w ogóle granicy w nieskończoności! Znów, sprawdzimy, co się dzieje na przedziale $[1, \infty)$. Zamieniając zmienne ($t = \sqrt{x}$), otrzymujemy

$$\int_1^\infty \sin(x^2) dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt.$$

Funkcja $g(t) = 1/2\sqrt{t}$ jest monotoniczna i ma w nieskończoności granicę 0. Ograniczoność całek sinusa na dowolnym przedziale sprawdziliśmy wyżej. Tak samo można postąpić z drugą całką. (Tempo zbieżności obu całek jest powolne).

Całki niewłaściwe na przedziale skończonym

Z bardzo podobną sytuacją mamy do czynienia, gdy funkcja $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła (lub ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna) na każdym przedziale $[a + \varepsilon, b]$, gdzie $0 < \varepsilon < b - a$, ale nie można jej przedłużyć do funkcji ciągłej (odpowiednio: ograniczonej i całkowalnej w sensie Riemanna) na $[a, b]$, gdyż np. f ma w a granicę nieskończoną, lub w ogóle nie ma granicy w punkcie a , ani nie jest ograniczona w żadnym otoczeniu tego punktu. Mówimy wtedy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna, gdy istnieje skończona granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$$

Jeśli ta granica nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy, że całka jest rozbieżna.

Przykład 10.19. Całka

$$\int_0^1 x^{-s} dx$$

jest zbieżna dla $s < 1$ i rozbieżna dla $s \geq 1$. Istotnie, mamy

$$\int_0^1 x^{-s} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-s} ds = \begin{cases} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = \ln \frac{1}{\varepsilon} & \text{dla } s = 1, \\ \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{1 - \varepsilon^{1-s}}{1-s} & \text{dla } s \neq 1. \end{cases}$$

Gdy $s = 1$, to $\ln(1/\varepsilon) \rightarrow +\infty$ dla $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Dla $s \neq 1$ zbieżność rozpatrywanej całki jest równoważna istnieniu skończonej granicy ε^{1-s} przy $\varepsilon \rightarrow 0^+$, tzn. dodatniości wykładnika $1 - s$. \square

Badając zbieżność całek niewłaściwych z nieograniczonych funkcji nieujemnych na przedziale ograniczonym, wolno oczywiście posługiwać się kryterium porównawczym: jeśli $Cf(x) \geq g(x) \geq 0$ dla pewnej stałej $C > 0$ i wszystkich $x \in (a, b)$, to ze zbieżności całki $\int_a^b f(x) dx$ wynika zbieżność całki $\int_a^b g(x) dx$ i na odwrót, z rozbieżności całki z funkcji g na (a, b) wynika rozbieżność całki z f na tym przedziale.

Przykład 10.20. Całka

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^3} dx$$

jest rozbieżna. Istotnie, $1 - Cx^2 > \cos x$ na $(0, 1)$, gdy $C > 0$ jest dostatecznie małą liczbą (wystarczy np. wziąć $C = 1/\pi$; Czytelnik zechce to sprawdzić). Dlatego $1 - \cos x \geq Cx^2$ i funkcja podcałkowa jest nie mniejsza od $g(x) = C/x$, zaś całka z tej ostatniej funkcji, $\int_0^1 g(x) dx = C \int_0^1 x^{-1} dx$ jest oczywiście rozbieżna.

Uwaga 10.21 (wzory rachunkowe dla całek niewłaściwych). W poprzednim rozdziale zetknęliśmy się z kilkoma wzorami rachunkowymi dla całek oznaczonych, np. wzorem na całkowanie przez części i wzorem na całkowanie przez podstawienie. Odpowiednikami tych wzorów można się posługiwać także dla całek niewłaściwych, tylko trzeba pamiętać, że po obu stronach mamy do czynienia z granicami pewnych całek. Stosujemy po prostu odpowiedni wzór na mniejszym przedziale i przechodzimy następnie do odpowiedniej granicy z końcami przedziału. Np. mając do czynienia z wzorem na całkowanie przez części dla całek niewłaściwych, piszemy

$$\int_a^{\infty} f(x) \cdot g'(x) dx = fg \Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} f'(x) \cdot g(x) dx,$$

interpretując każdą całkę jako całkę niewłaściwą i przyjmując, że

$$fg \Big|_a^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Podobnie postępujemy z całkami niewłaściwymi na przedziałach skończonych: stosujemy odpowiedni wzór nie na $[a, b]$, tylko na mniejszym przedziale $[a + \varepsilon, b]$, a następnie przechodzimy do granicy $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Przy pewnej dozie ostrożności można po prostu całkować przez części i przez podstawienie *praktycznie tak samo*, jak dla zwykłych całek oznaczonych. Spotkamy się kilkakrotnie z taką sytuacją w następnym podrozdziale.

10.2 Funkcje Γ i B

Definicja 10.22. Dla $a > 0$ kładziemy

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (10.4)$$

Całkę (10.4) nazywamy funkcją gamma Eulera.

Nietrudno przekonać się, że definicja jest poprawna, tzn. całka jest zbieżna dla każdego parametru $a > 0$. Istotnie, ponieważ $e^{-t} \leq 1$ dla $t \geq 0$, więc

$$\int_0^1 t^{a-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{a-1} dt = \left. \frac{t^a}{a} \right|_0^1 = \frac{1}{a} < \infty. \quad (10.5)$$

Dla $t > 1$ i $k > a - 1$ jest też

$$e^{t/2} \geq \frac{(t/2)^k}{k!} \geq \frac{t^{a-1}}{k! \cdot 2^k}$$

(porównujemy funkcję e^t z k -tym wyrazem jej szeregu potęgowego, a następnie korzystamy z monotoniczności funkcji wykładniczej o podstawie $t > 1$). Dlatego

$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \leq k! \cdot 2^k \int_1^{\infty} e^{-t} e^{t/2} dt = k! \cdot 2^k \int_1^{\infty} e^{-t/2} dt = k! \cdot 2^{k+1} e^{-1/2} < \infty. \quad (10.6)$$

Całka określająca funkcję gamma jest sumą całek (10.5) i (10.6), więc jest zbieżna.

Stwierdzenie 10.23. Funkcja Γ ma następujące własności:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad \text{dla wszystkich } a > 0, \quad (10.7)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}. \quad (10.8)$$

Dowód. Liczbę $\Gamma(1)$ wyznaczamy wprost z definicji (patrz także Przykład 10.2):

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Całkując przez części, sprawdzamy, że

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = \left. \frac{t^a}{a} e^{-t} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{t^a}{a} \cdot (-e^{-t}) dt = 0 + \frac{\Gamma(a+1)}{a}.$$

Otrzymaliśmy więc (10.7). Równość (10.8) łatwo udowodnić przez indukcję: dla $n = 1$ wzór (10.8) zachodzi, i jeśli $\Gamma(n) = (n-1)!$, to $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$. \square

Widzimy więc, że funkcja $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ jest jednym z możliwych przedłużeń funkcji $n \mapsto n!$ ze zbioru liczb naturalnych na liczby dodatnie. Oczywiście wszystkich takich przedłużeń jest nieskończenie wiele. Funkcję Γ wyróżnia spośród nich jedna własność: okazuje się, że $\ln \Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą. Wyjaśnijmy ten fakt możliwie starannie.

Definicja 10.24. Niech I będzie przedziałem w \mathbb{R} i niech $f: I \rightarrow (0, \infty)$. Mówimy, że f jest logarytmicznie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $\ln f: I \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą.

Równoważnie, $f: I \rightarrow (0, \infty)$ jest logarytmicznie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in I$ oraz $\lambda \in [0, 1]$ zachodzi nierówność

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}.$$

Logarytmując tę nierówność stronami, co wolno zrobić, gdyż \ln jest funkcją rosnącą, otrzymujemy nierówność Jensena dla funkcji $\ln f$ (patrz Definicja 5.66).

Stwierdzenie 10.25. *Iloczyn funkcji logarytmicznie wypukłych jest funkcją logarytmicznie wypukłą.*

Dowód. Suma funkcji wypukłych jest wypukła. Dlatego, jeśli $\ln f_i$ jest funkcją wypukłą dla $i = 1, 2$, to $\ln(f_1 f_2)$ też jest funkcją wypukłą. \square

Logarytmiczną wypukłość funkcji Γ można sprawdzić na kilka sposobów. My przypomnimy w tym celu nierówność Höldera dla sum skończonych, a następnie wyprowadzimy z niej łatwy wniosek: nierówność Höldera dla całek. Jak pamiętamy (patrz Twierdzenie 5.72), jeśli $p, q > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \geq 0$ oraz $y_1, \dots, y_n \geq 0$ jest

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}. \quad (10.9)$$

Łatwo stąd otrzymać

Stwierdzenie 10.26 (nierówność Höldera dla całek). *Jeśli $p, q > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to dla dowolnych funkcji f, g całkownych na przedziale $[a, b]$ zachodzi nierówność*

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}. \quad (10.10)$$

SZKIC DOWODU. Z nierówności Höldera dla sum wynika, że dla każdego podziału $P = (t_0, \dots, t_n)$ odcinka $[a, b]$ i punktów pośrednich $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ jest

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f(s_i)g(s_i)\Delta t_i \right| &\leq \sum_{i=1}^n |f(s_i)|(\Delta t_i)^{1/p} \cdot |g(s_i)|(\Delta t_i)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |f(s_i)|^p \cdot \Delta t_i \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |g(s_i)|^q \cdot \Delta t_i \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

gdzie $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ dla $i = 1, \dots, n$. Z takich nierówności dla sum całkowych otrzymujemy po przejściu granicznym nierówność Höldera dla całek. \square

Uwaga 10.27. Nierówność Höldera (10.10) zachodzi także dla całek niewłaściwych. Wystarczy wypisać ją na mniejszych przedziałach (tam, gdzie całki oznaczone są właściwe), a następnie przejść do granicy z odpowiednim końcem (lub dwoma końcami) przedziału.

Wniosek 10.28. *Funkcja Γ jest logarytmicznie wypukła.*

Dowód. Ustalmy $x, y > 0$ i liczbę $\lambda \in (0, 1)$. Posłużymy się nierównością Höldera z wykładnikami $p = 1/\lambda$ i $q = 1/(1 - \lambda)$. Wtedy $1/p = \lambda$, $1/q = 1 - \lambda$ i warunek $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ jest spełniony. Prosty rachunek daje

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \int_0^\infty t^{\lambda x + (1 - \lambda)y - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty t^{\lambda(x-1)} e^{-\lambda t} \cdot t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-(1-\lambda)t} dt \\ &\leq \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right)^\lambda \cdot \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \right)^{1-\lambda} = \Gamma(x)^\lambda \cdot \Gamma(y)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Dowód jest zakończony. \square

Uwaga 10.29. Nieco inny dowód logarytmicznej wypukłości funkcji Γ przebiega według następującego schematu.

1. Najpierw trzeba sprawdzić, że suma (dwóch) funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła. Można w tym celu skorzystać z kryterium wypukłości funkcji ciągłych podanego w Twierdzeniu 5.69. Przez indukcję wynika stąd, że suma n funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła.
2. Następnie, sprawdza się, że sumy całkowe Riemanna,

$$\sum_{i=1}^n t_i^{a-1} e^{-t_i} \Delta t_i$$

przybliżające całkę

$$I_N(a) = \int_0^N t^{a-1} e^{-t} dt$$

są funkcjami logarytmicznie wypukłymi zmiennej a .

3. Łatwo jest wykazać, że granica punktowo zbieżnego ciągu funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła. Stąd i z logarytmicznej wypukłości sum Riemanna wnioskujemy najpierw o logarytmicznej wypukłości całek $I_N(a)$, a następnie – logarytmicznej wypukłości funkcji $\Gamma(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N(a)$.

Zainteresowany Czytelnik zechce samodzielnie uzupełnić wszystkie szczegóły takiego rozumowania.

Okazuje się, że własność (10.7) funkcji Γ , połączona z jej logarytmiczną wypukłością, jednoznacznie identyfikuje tę funkcję.

Twierdzenie 10.30 (H. Bohr). *Jeśli funkcja $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ jest logarytmicznie wypukła, a ponadto $f(1) = 1$ i $f(x+1) = xf(x)$ dla wszystkich $x > 0$, to wówczas $f(x) = \Gamma(x)$ dla wszystkich $x > 0$.*

Dowód. Krok 1. Ponieważ $f(1) = 1$ i $f(x+1) = xf(x)$, więc po pierwsze $f(n) = (n-1)!$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, po drugie zaś funkcja f jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości na odcinku $(0, 1]$. Podobną własność ma funkcja Γ : warunek (10.7) pozwala wyznaczyć jej wszystkie wartości, jeśli znamy $\Gamma(x)$ dla $x \in (0, 1]$. Dlatego wystarczy sprawdzić, że

$$f(x) = \Gamma(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in (0, 1].$$

Krok 2. Ustalmy $x \in (0, 1]$. Skorzystamy teraz z logarytmicznej wypukłości f . Niech $n \geq 2$ będzie dowolne. Ponieważ $\ln f$ jest funkcją wypukłą, więc na mocy Twierdzenia 5.75 o monotoniczności ilorazów różnicowych otrzymujemy

$$\frac{\ln f(n) - \ln f(n-1)}{1} \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{x} \leq \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{1}.$$

Upraszczając te wyrażenia z wykorzystaniem warunku $f(k+1) = k!$, a następnie mnożąc obie strony przez $x > 0$, otrzymujemy

$$\ln(n-1)^x = x \ln(n-1) \leq \ln f(x+n) - \ln(n-1)! \leq x \ln n = \ln n^x.$$

Przeto

$$\ln\left((n-1)!(n-1)^x\right) \leq \ln f(x+n) \leq \ln\left((n-1)!n^x\right),$$

stąd zaś

$$(n-1)!(n-1)^x \leq f(x+n) \leq (n-1)!n^x.$$

Jednak $f(x+n) = (x+n-1)f(x+n-1) = \dots = (x+n-1) \cdot \dots \cdot (x+1)xf(x)$. Podstawiając tę równość wyżej, otrzymujemy przybliżenie f z góry i z dołu:

$$\frac{(n-1)!(n-1)^x}{(x+n-1) \cdot \dots \cdot (x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{(n-1)!n^x}{(x+n-1) \cdot \dots \cdot (x+1)x}$$

Ponieważ takie nierówności zachodzą dla każdego $n \geq 2$, więc możemy po lewej stronie zastąpić n przez $n+1$. Zatem

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &:= \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \cdot \dots \cdot (x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{(n-1)!n^x}{(x+n-1) \cdot \dots \cdot (x+1)x} \\ &= \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \cdot \dots \cdot (x+1)x} \cdot \frac{x+n}{n} = \Gamma_n(x) \cdot \frac{x+n}{n}. \end{aligned}$$

Równoważnie, dla $n \geq 2$ i $x \in (0, 1]$ liczba $\Gamma_n(x)$ spełnia

$$f(x) \cdot \frac{n}{n+x} \leq \Gamma_n(x) \leq f(x).$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach, granica $\Gamma_n(x)$ dla $n \rightarrow \infty$ istnieje i jest równa $f(x)$. Otrzymaliśmy więc konkretny wzór na funkcję f :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \cdot \dots \cdot (x+1)x}, \quad 0 < x \leq 1.$$

Jednak funkcja Γ też spełnia założenia twierdzenia i dlatego musi wyrażać się tym samym wzorem. Zatem $f \equiv \Gamma$ na przedziale $(0, 1]$, a więc (jak stwierdziliśmy wcześniej) także na całym zbiorze liczb dodatnich. \square

Analizując powyższy dowód, nietrudno stwierdzić następujący fakt.

Wniosek 10.31. *Wzór*

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x), \quad \text{gdzie} \quad \Gamma_n(x) = \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \cdot \dots \cdot (x+1)x}, \quad (10.11)$$

zachodzi dla wszystkich $x > 0$.

Dowód. Ponieważ

$$\Gamma_n(x+1) = \frac{n! \cdot n^{x+1}}{(x+1+n) \cdot \dots \cdot (x+1+1)(x+1)} = x\Gamma_n(x) \cdot \frac{n}{x+1+n}, \quad (10.12)$$

więc jeśli granica w (10.11) istnieje dla liczby x , to istnieje także dla $x+1$. Widać także, że $g(x) = \lim_n \Gamma_n(x)$ spełnia tożsamość $g(x+1) = xg(x)$. Widzieliśmy już, że $g(x) = \Gamma(x)$ dla $x \in (0, 1]$. Z równości $g(x+1) = xg(x)$ i $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ wynika, że (10.11) zachodzi dla wszystkich $x > 0$. \square

Wniosek 10.32. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Dowód. Stosujemy poprzedni wniosek;

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{1/2}}{\left(\frac{1}{2} + n\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} n! \cdot n^{1/2}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{2\sqrt{n}}{2n+1} \\ &\rightarrow \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

na mocy wzoru Wallisa (patrz Twierdzenie 9.40). \square

Jak widać, w ostatnim dowodzie obliczamy po prostu granicę pewnego konkretnego ciągu. Jednak interpretacja tej granicy – tzn. umiejętność zauważenia jej związku z funkcją Γ z jednej strony i ze wzorem Wallisa z drugiej strony – wymaga solidnej znajomości rachunku całkowego.

Wniosek 10.33 (całka Poissona). *Całka niewłaściwa*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx$$

jest zbieżna i równa $\sqrt{\pi}$.

Dowód. Sprawdźmy najpierw zbieżność całki. Dla $x > 1$ jest $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$, więc

$$\int_1^{\infty} \exp(-x^2) dx < \int_1^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e}.$$

Przez symetrię,

$$\int_{-\infty}^{-1} \exp(-x^2) dx < \frac{1}{e}.$$

Stąd już wynika zbieżność rozważanej całki (na przedziale $[-1, 1]$ funkcja e^{-x^2} jest ciągła). Ponadto, dokonując na przedziale $(0, \infty)$ zamiany zmiennych $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2}t^{-1/2} dt$, otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = 2 \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

To jest żądany wynik. \square

Zamieniając zmienne ($x = t/\sqrt{2}$, $dx = (1/\sqrt{2}) dt$) w równości $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2) dt = 1. \quad (10.13)$$

Funkcja $g(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$ nazywa się *gęstością standardowego rozkładu normalnego*. Czytelnik spotka ją na studiach wielokrotnie, na zajęciach z Rachunku Prawdopodobieństwa i ze Statystyki, a także w opisie rozwiązań równania przewodnictwa cieplnego.

Teraz zdefiniujemy funkcję B (beta Eulera) i omówimy związek, łączący Γ i B .

Definicja 10.34. Dla $a, b > 0$ kładziemy

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt. \quad (10.14)$$

Całkę (10.14) nazywamy funkcją beta Eulera.

Zauważmy, że całka $B(a, b)$ jest zbieżna dla wszystkich $a, b > 0$. Dla $a, b \geq 1$ funkcja podcałkowa jest po prostu ciągła na $[0, 1]$. Dla pozostałych a, b piszemy

$$\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \int_0^{1/2} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt + \int_{1/2}^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

W pierwszej całce osobliwość jest tylko w zerze. Mamy

$$\int_0^{1/2} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \leq \int_0^{1/2} t^{a-1} (1-t)^{-1} dt \leq 2 \int_0^{1/2} t^{a-1} dt = 2 \cdot \frac{t^a}{a} \Big|_0^{1/2} < \infty.$$

Rozpatrywanie drugiej całki sprowadzamy do powyższego, zamieniając zmienne:

$$[1/2, 1] \ni t \mapsto s = 1-t \in [0, 1/2],$$

zatem

$$\int_{1/2}^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \int_{1/2}^0 (1-s)^{a-1} s^{b-1} (-ds) = \int_0^{1/2} s^{b-1} (1-s)^{a-1} ds < \infty$$

dla wszystkich $b > 0$ (szacujemy jak poprzednio, zamieniając a i b rolami).

Lemat 10.35. Dla wszystkich $a, b > 0$ jest $B(a, b) = B(b, a)$. Ponadto, przy ustalonym $a > 0$ funkcja $B(a, \cdot): (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ jest logarytmicznie wypukła.

Szkic dowodu. O równości $B(a, b) = B(b, a)$ przekonujemy się łatwo, dokonując zamiany zmiennych $t \mapsto s = 1-t$. Logarytmicznej wypukłości $B(a, \cdot)$ dowodzi się tak samo, jak logarytmicznej wypukłości funkcji Γ – korzystając z nierówności Höldera. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi jako zadanie. \square

Twierdzenie 10.36. Zachodzą następujące wzory:

$$B(a+1, b) + B(a, b+1) = B(a, b) \quad \text{dla } a, b > 0, \quad (10.15)$$

$$B(a, b+1) = \frac{b}{a+b} B(a, b) \quad \text{dla } a, b > 0, \quad (10.16)$$

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad \text{dla } a, b > 0. \quad (10.17)$$

Uwaga. Wzór (10.17) bywa nazywany podstawowym związkiem między funkcjami Γ i B .

Dowód. Najpierw sprawdzimy wzory (10.15) i (10.16). Ustalmy liczby $a, b > 0$. Dodając całki, otrzymujemy

$$\begin{aligned} B(a+1, b) + B(a, b+1) &= \int_0^1 \left(t^a(1-t)^{b-1} + t^{a-1}(1-t)^b \right) dt \\ &= \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} (t + (1-t)) dt = B(a, b). \end{aligned}$$

To jest wzór (10.15). Aby sprawdzić (10.16), całkujemy najpierw przez części, zauważając, że funkcja $g(x) = x^a(1-x)^b$ ma granicę równą zero zarówno dla $x \rightarrow 0$, jak i dla $x \rightarrow 1$. Dlatego w poniższym rachunku można zaniedbać wartości funkcji na końcach przedziału:

$$\begin{aligned} B(a, b+1) &= \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^b dt = \int_0^1 \left(\frac{t^a}{a} \right)' (1-t)^b dt \\ &= -\frac{1}{a} \int_0^1 t^a (-b)(1-t)^{b-1} dt \\ &= \frac{b}{a} \int_0^1 t^a(1-t)^{b-1} dt = \frac{b}{a} B(a+1, b). \end{aligned}$$

Zatem,

$$B(a, b+1) = \frac{b}{a} B(a+1, b) \stackrel{(10.15)}{=} \frac{b}{a} (B(a, b) - B(a, b+1)),$$

lub równoważnie $(a+b)B(a, b+1) = bB(a, b)$. To jest wzór (10.16).

Zajmijmy się teraz wzorem (10.17). Ustalmy $a > 0$. Niech

$$f(b) = \frac{B(a, b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \quad \text{dla } b > 0.$$

Ponieważ iloczyn funkcji logarytmicznie wypukłych jest funkcją logarytmicznie wypukłą, więc f jest logarytmicznie wypukła. Mamy

$$f(1) = \frac{B(a, 1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} \stackrel{(10.7)}{=} aB(a, 1) = a \int_0^1 t^{a-1} dt = 1.$$

Wreszcie, dzięki znanym już własnościom funkcji Γ i B ,

$$\begin{aligned} f(b+1) &= \frac{B(a, b+1)\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a)} \stackrel{(10.7)}{=} \frac{B(a, b+1)(a+b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \\ &\stackrel{(10.16)}{=} \frac{b}{a+b} \cdot \frac{B(a, b)(a+b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \\ &= b \cdot \frac{B(a, b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} = bf(b). \end{aligned}$$

Zatem funkcja f spełnia założenia Twierdzenia 10.30, charakteryzującego funkcję Γ . Mamy więc

$$\Gamma(b) = f(b) = \frac{B(a, b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \quad \text{dla każdego } b > 0.$$

Ponieważ $a > 0$ było w całym rozumowaniu dowolne, więc dowód jest zakończony. \square

Przykład 10.37. Sprawdźmy powtórnie, że $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Na mocy wzoru podstawowego, zastosowanego dla $a = b = 1/2$, $a + b = 1$, jest

$$\Gamma(1/2)^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Aby obliczyć ostatnią całkę, dokonajmy zamiany zmiennych $t = (1+u)/2$. Zmiennej $t \in (0, 1)$ odpowiadają wartości $u \in (-1, 1)$; jest $dt = \frac{1}{2} du$, a ponadto

$$\sqrt{t(1-t)} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-u)(1+u)} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{2}.$$

Dlatego

$$\Gamma(1/2)^2 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u \Big|_{-1}^1 = \pi.$$

(Jak widać, w ostatnim kroku obliczamy tę samą całkę, którą trzeba obliczyć, żeby wyznaczyć długość półokręgu o promieniu równym 1. To świadczy o tym, że całki niewłaściwe służą nie tylko do teoretycznych rachunków, ale także pojawiają się w prostych i naturalnych zagadnieniach geometrycznych).

10.3 Wzór iloczynowy Weierstrassa i kilka innych własności funkcji Γ

Zasadniczym celem tego i następnego podrozdziału jest po pierwsze uzyskanie pewnej liczby ciekawych wzorów, po drugie zaś – i to jest cel ważniejszy – przekonanie Czytelnika, że funkcjami, które są zdefiniowane jako całki zależne od parametru, lub granice wyrażeń zależnych od parametru, można operować niemal tak samo, jak dobrze znanymi funkcjami elementarnymi, prowadząc swobodnie najróżniejsze obliczenia.

To ilustracja tego, jaką rolę odgrywa w analizie pojęcie granicy i twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych oraz własnościach szeregów potęgowych. Cały ten aparat, łącznie z prostymi elementami rachunku różniczkowego, będzie obecny w dowodach i obliczeniach, jakie niżej przeprowadzimy. Tekst byłby znacznie krótszy, gdyby nie wyjaśniać, *dłaczego* można wykonać poszczególne kroki we wzorach, które z formalnego punktu widzenia są dość jasne.

Funkcja Γ , ważna w analizie, znakomicie się nadaje do przeprowadzenia takiej ilustracji. Zbieżność jednostajną ciągów i szeregów funkcyjnych oraz własności takich ciągów i szeregów wprowadza się i bada między innymi właśnie po to, żeby móc bez przeszkód operować funkcjami zdefiniowanymi w sposób nieelementarny.

Twierdzenie 10.38 (wzór iloczynowy Weierstrassa). *Dla wszystkich $x > 0$ zachodzi wzór*

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}} = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}}, \quad (10.18)$$

gdzie γ oznacza tzw. stałą Eulera, tzn.

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

Dowód. Dokonamy prostych przekształceń wzoru (10.11), uzyskanego we Wniosku 10.31. Mamy

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \cdot \dots \cdot (x+1)x} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot e^{x \ln n}}{(x+n) \cdot \dots \cdot (x+1)x} \\
 &= \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x \ln n}}{\left(1 + \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n})} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}}. \tag{10.19}
 \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ ma granicę skończoną. Istotnie, nietrudno zauważyć, że dla $n > 1$ jest

$$\begin{aligned}
 b_n = a_n - \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \int_1^n \frac{1}{x} dx \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx.
 \end{aligned}$$

Zatem b_n jest ciągiem rosnącym; ponadto, dzięki monotoniczności $1/x$, zachodzi nierówność¹

$$b_n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Dlatego ciąg b_n jest zbieżny; liczba $\lim a_n = \lim(b_n + \frac{1}{n}) = \lim b_n = \gamma$ nazywa się *stałą Eulera* lub *stałą Eulera-Mascheroniego*. Możemy więc skorzystać we wzorze (10.19) z twierdzenia o granicy iloczynu ciągów zbieżnych i napisać

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n})} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}} = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}}.$$

(Zauważmy: ostatnia granica istnieje, bo istnieje granica pierwszego czynnika, równa $\exp(-\gamma x)$ oraz granica iloczynu obu czynników.) \square

Stwierdzenie 10.39 (wzór Legendre’a). Dla każdego $x > 0$ jest

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x). \tag{10.20}$$

¹Czytelnik zechce porównać ten argument z dowodem całkowego kryterium zbieżności szeregów, patrz Twierdzenie krytyczniejsze i towarzyszący mu rysunek – to takie samo rozumowanie!

Dowód. Raz jeszcze wykorzystujemy wzór (10.11). Rozszerzając ułamek tak, aby zauważyć wyrażenie $\Gamma_{2n}(x)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 \cdot n^{x/2} \cdot n^{x/2} \cdot \sqrt{n}}{\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right) \cdots \left(\frac{x}{2}+n\right) \cdot \frac{x+1}{2}\left(\frac{x+1}{2}+1\right) \cdots \left(\frac{x+1}{2}+n\right)} \\ &= \frac{1}{2^x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+2}(n!)^2 \cdot (2n)^x \sqrt{n}}{x(x+2) \cdots (x+2n) \cdot (x+1)(x+3) \cdots (x+2n+1)} \\ &= \frac{1}{2^x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! \cdot (2n)^x \sqrt{n}}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+2n)} \cdot \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \frac{4n}{x+2n+1}, \end{aligned} \quad (10.21)$$

gdyż

$$2^{2n+2}(n!)^2 \sqrt{n} = 4n \cdot (2n)! \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

W ostatnim wyrażeniu we wzorze (10.21) mamy granicę trzech czynników. Pierwszy z nich, $\Gamma_{2n}(x) \rightarrow \Gamma(x)$ dla $n \rightarrow \infty$ – por. wzór (10.11). Drugi czynnik, rozważany już wcześniej w dowodzie Wniosku 10.32, na mocy wzoru Wallisa ma granicę $\sqrt{\pi}$. Ostatni czynnik, $4n/(x+2n+1)$, ma granicę 2. Dlatego

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2^{-x}\Gamma(x) \cdot 2\sqrt{\pi}.$$

Ta obserwacja kończy cały dowód. \square

Dotychczas rozważaliśmy funkcję Γ tylko dla $x > 0$. Definicja $\Gamma(x)$ jako całki niewłaściwej $\int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt$ ma sens *tylko* dla takich x . Gdy $x \leq 0$, całka jest rozbieżna, z uwagi na zachowanie funkcji podcałkowej w pobliżu zera.

Wiemy już jednak (patrz Wniosek 10.31), że

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x), \quad \text{gdzie} \quad \Gamma_n(x) = \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \cdots (x+1)x}.$$

Przypomnijmy: aby wykazać tę równość, skorzystaliśmy z tego, że granica istnieje dla $x \in (0, 1]$ oraz z równości (10.12):

$$\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x) \cdot \frac{n}{x+1+n}.$$

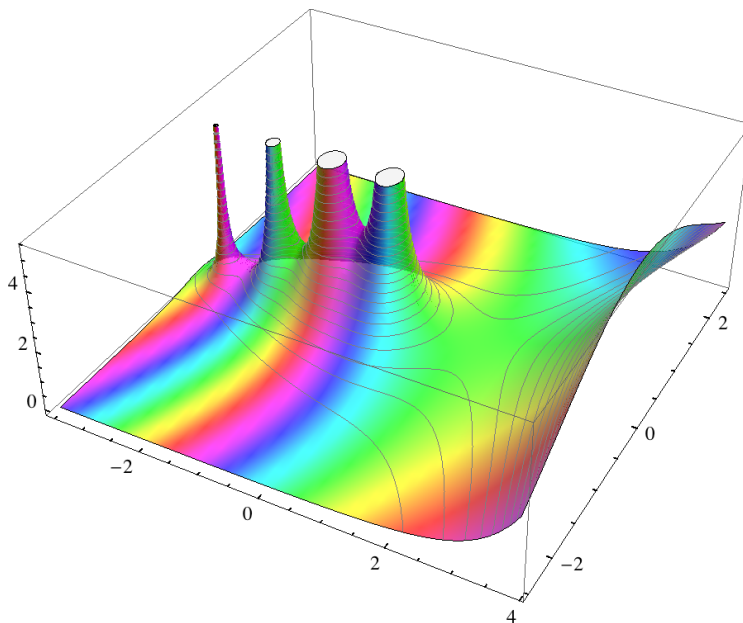
Podstawmy $x = t - 1$. Otrzymamy

$$\Gamma_n(t-1) = \frac{\Gamma_n(t)}{t-1} \cdot \frac{t+n}{n}$$

Wzór określający $\Gamma_n(t)$ ma sens *dla wszystkich* $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Dlatego z powyższej równości wynika, że jeśli $t \neq 0, -1, -2, \dots$ i $\Gamma_n(t)$ ma granicę dla $n \rightarrow \infty$, to $\Gamma_n(t-1)$ też ma granicę dla $n \rightarrow \infty$. Wiemy już jednak, że granica $\lim_n \Gamma_n(t)$ istnieje dla wszystkich $t > 0$ i jest równa funkcji Γ . Dlatego następująca definicja jest poprawna i pozwala rozszerzyć funkcję Γ na cały zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Definicja 10.40 (alternatywna definicja funkcji Γ). Dla $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0, -1, -2, \dots$ przyjmujemy

$$\Gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(t).$$



Wykres funkcji $z = (x, y) \mapsto |\Gamma(x + iy)|$, tzn. zbiór punktów $(x, y, |\Gamma(x + iy)|)$ w \mathbb{R}^3 , gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0, -1, -2, \dots$. Widoczne są osobliwości (tzw. bieguny) funkcji Γ w punktach $0, -1, -3$. Kolor powierzchni odpowiada argumentowi liczby $\Gamma(x + iy)$.

Dla $t > 0$ definicja ta jest równoważna wcześniejszej, wykorzystującej wzór (10.4).

Uwaga. W istocie, funkcję Γ można zdefiniować tak, jak wyżej (albo wzorem iloczynowym Weierstrassa) dla wszystkich zespolonych $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Nie będziemy jednak badać zachowania Γ dla argumentów spoza prostej rzeczywistej.

Stwierdzenie 10.41. Dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ jest $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. \square

Ponieważ w dowodzie wzoru iloczynowego Weierstrassa i wzoru Legendre'a korzystaliśmy jedynie z istnienia granicy $\Gamma_n(x)$ oraz z ciągłości funkcji wykładniczej, więc oba te wzory zachodzą dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ z wyjątkiem liczb całkowitych niedodatnich.

Stwierdzenie 10.42. Dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0, -1, -2, \dots$ zachodzą wzory Weierstrassa i Legendre'a:

$$\Gamma(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{t} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(t/k)}{1 + \frac{t}{k}}, \quad (10.22)$$

$$\Gamma\left(\frac{t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{t-1}}\Gamma(t). \quad (10.23)$$

Wniosek 10.43. $\Gamma: \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 .

Dowód. Dla $x > 0$ mamy $\Gamma(x) > 0$ wobec definicji (10.4) (gdyż $\Gamma(x)$ jest całką dodatniej funkcji na niezerowym przedziale). Na mocy wzoru Weierstrassa dla $x > 0$, dzięki ciągłości

ści logarytmu naturalnego, jest

$$\begin{aligned}\ln \Gamma(x) &= -\gamma x - \ln x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{k} - \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right) \\ &= -\gamma x - \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k} - \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right)\end{aligned}\quad (10.24)$$

Zauważmy: mamy pewność, że ostatni szereg jest zbieżny, gdyż zbieżny był iloczyn nieskończony występujący we wzorze Weierstrassa.

Sprawdźmy teraz w standardowy sposób, że $g(x) = \ln \Gamma(x)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły na $(0, \infty)$. Wystarczy w tym celu sprawdzić, czy szereg pochodnych, otrzymany przez różniczkowanie szeregu w (10.24) wyraz po wyrazie, jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale $(0, M]$, gdzie $M < \infty$. Po zróżniczkowaniu otrzymujemy szereg o wyrazach

$$a_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{k}{x+k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{x}{k(x+k)}.$$

Jeśli $x \in (0, M]$, to

$$0 < a_k(x) = \frac{x}{k(x+k)} < \frac{x}{k^2} \leq \frac{M^2}{k}.$$

Z kryterium Weierstrassa wynika zatem jednostajna zbieżność szeregu $\sum_k a_k(x)$ na każdym przedziale $(0, M]$, a z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych – równość

$$g'(x) = (\ln \Gamma(x))' = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(x+k)}.$$

i ciągłość g' na $(0, \infty)$. Oczywiście $\Gamma = e^{\ln \Gamma} = \exp \circ g$ też jest klasy C^1 na przedziale $(0, \infty)$. Dla $x < 0$, $x \notin \mathbb{Z}$ różniczkowalność Γ i ciągłość jej pochodnej Γ' w punkcie x wynika łatwo z tożsamości $\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$. \square

Korzystając ze wzorów Weierstrassa i Legendre'a wykażemy teraz dość prosty (choć dla niewtajemniczonych zupełnie nieoczekiwany) związek między funkcją Γ i sinusem. Okazuje się, że zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10.44. *Dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ połóżmy*

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \Gamma(x) \Gamma(1-x) \sin \pi x.$$

Wówczas funkcja $\phi: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ jest stała i równa 1.

Dowód. Plan postępowania jest następujący. Sprawdzimy, że funkcję ϕ można dookreślić w punktach $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby otrzymać funkcję okresową klasy $C^1(\mathbb{R})$, o okresie 1. Wzór Legendre'a pozwoli wypisać pewne równanie funkcyjne na ϕ . W końcu sprawdzimy, że z tego równania wynika łatwo, że $\ln \phi(x)$ jest funkcją stałą (bo ma pochodną zero). Oto szczegóły.

Krok 1. Funkcja ϕ jest okresowa i ma okres równy 1. Istotnie, niech

$$f(x) = \Gamma(x) \Gamma(1-x), \quad h(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

Dzięki równościom $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ oraz $\sin(y+\pi) = -\sin y$, otrzymujemy dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ związki

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \Gamma(x+1)\Gamma(1-(x+1)) = x\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\Gamma(x)\Gamma(-x+1) = -f(x), \\ h(x+1) &= \frac{\sin \pi(x+1)}{\pi} = -\frac{\sin \pi x}{\pi} = -h(x). \end{aligned}$$

Stąd oczywiście $\phi(x+1) = f(x+1)h(x+1) = (-1)^2 f(x)h(x) = \phi(x)$.

Krok 2. Dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ zachodzi tożsamość

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right)\phi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \phi(x). \quad (10.25)$$

Aby się o tym przekonać, skorzystamy (dwa razy: dla $t = x$ i $t = 1-x$) ze wzoru Legendre'a:

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{x}{2}\right)\phi\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{1}{\pi^2} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right) \sin \frac{\pi x}{2} \\ &\quad \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{x+1}{2}\right) \sin \frac{\pi(x+1)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{(1-x)+1}{2}\right) \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \Gamma(x) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(1-x)-1}} \Gamma(1-x) \cdot \frac{1}{2} \sin \pi x \\ &= \frac{1}{\pi} \Gamma(x) \Gamma(1-x) \sin \pi x \\ &= \phi(x). \end{aligned}$$

Krok 3. Istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 1. \quad (10.26)$$

Istotnie,

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \Gamma(x) \Gamma(1-x) \sin \pi x = x\Gamma(x)\Gamma(1-x) \cdot \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \Gamma(1+x)\Gamma(1-x) \cdot \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

Wiemy jednak, że Γ jest ciągła w 1, $\Gamma(1) = 1$ i $(\sin y)/y \rightarrow 1$ dla $y \rightarrow 0$. Stąd już wynika równość (10.26).

Krok 4. Funkcję ϕ można przedłużyć do dodatniej funkcji klasy $C^1(\mathbb{R})$, mającej okres 1. Będziemy tę funkcję oznaczać nadal tą samą literą.

Wystarczy po prostu przyjąć

$$\phi(k) = \lim_{x \rightarrow k} \phi(x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Z okresowości ϕ na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ oraz (10.26) wynika, że ta granica istnieje i jest równa 1 dla każdego $k \in \mathbb{Z}$. Otrzymana funkcja jest różniczkowalna w punktach $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, a jej pochodna ϕ' jest na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ciągła, gdyż $\Gamma(x)$ i $\Gamma(1-x)$ są na tym zbiorze różniczkowalne w sposób ciągły. Ciągłość ϕ w punktach \mathbb{Z} i jej okresowość na \mathbb{R} wynika wprost z definicji.

Pozostaje sprawdzić istnienie i ciągłość ϕ' w punktach całkowitych. Korzystając (jak wyżej) z tożsamości $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, a następnie rozwijając w szereg potęgowy funkcję $(\phi x)^{-1} \sin \pi x$, piszemy

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{\pi} \Gamma(x) \Gamma(1-x) \sin \pi x = \Gamma(1+x) \Gamma(1-x) \cdot \frac{\sin \pi x}{\pi x} \\ &= \Gamma(1+x) \Gamma(1-x) \cdot \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \dots \right)\end{aligned}\quad (10.27)$$

Ostatni wzór ma sens dla wszystkich $x \in (-1, 1)$. Każdy z trzech czynników prawej strony jest na tym przedziale funkcją różniczkowalną w sposób ciągły (korzystamy z własności Γ i z twierdzenia o pochodnej sumy szeregu potęgowego). Dlatego $\phi'(0)$ istnieje i ϕ' jest ciągła w zerze. Dzięki okresowości, $\phi' \in C(\mathbb{R})$.

Krok 5. Jest $\phi'(0) = 0$. Istotnie, różniczkując prawą stronę wzoru (10.27), otrzymujemy ze wzoru na pochodną iloczynu

$$\phi'(0) = \Gamma'(1) \cdot \Gamma(1) \cdot 1 - \Gamma(1) \cdot \Gamma'(1) \cdot 1 + \Gamma(1)^2 \cdot 0 = 0.$$

(pochodna szeregu potęgowego w (10.27) znika w zerze, gdyż nie ma wyrazu liniowego).

Krok 6. Wykażemy, że

$$L(x) = (\ln \phi(x))', \quad x \in \mathbb{R}$$

jest funkcją stałą, równą zero.

Funkcja L ma okres 1 i jest ciągła. Osiąga zatem swój kres górny

$$M = \sup_{\mathbb{R}} L = \sup_{[0,1]} L = L(a)$$

w pewnym punkcie $a \in [0, 1]$. Z (10.25) po zlogarytmowaniu, a następnie po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\ln \phi\left(\frac{x}{2}\right) + \ln \phi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \ln \phi(x), \quad \frac{1}{2} L\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} L\left(\frac{x+1}{2}\right) = L(x).$$

Zatem

$$M = \sup L = L(a) = \frac{1}{2} L\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2} L\left(\frac{a+1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} M = M.$$

Nierówność oczywiście nie może być ostra. Dlatego, w szczególności, $L(a/2) = M$. Przez indukcję $L(a/2^n) = M$. Stąd

$$L(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} L\left(\frac{a}{2^n}\right) = M.$$

Z drugiej strony,

$$L(0) = (\ln \phi(x))' \Big|_{x=0} = \frac{\phi'(0)}{\phi(0)} = \phi'(0) = 0.$$

Przeto, $M = \sup L = 0$.

W pełni analogiczne rozumowanie pozwala sprawdzić, że $m = \inf L = 0$. Dlatego $L(x) = (\ln \phi(x))' \equiv 0$, tzn. $\ln \phi(x) \equiv \text{const} = \ln \phi(1) = \ln 1 = 0$. Stąd już $\phi \equiv 1$. \square

Wniosek 10.45. Dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ zachodzi wzór

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \quad (10.28)$$

Dowód. Sprawdziliśmy, że

$$\phi(x) := \frac{1}{\pi} \Gamma(x)\Gamma(1-x) \sin \pi x \equiv 1 \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Stąd i z równości $x\Gamma(x) = \Gamma(1+x)$ dla $x \notin \mathbb{Z}$ wynika teza wniosku. \square

Uwaga. Wzór (10.28) ma sens także w punktach $x \in \mathbb{Z}$. Wystarczy umówić się, że $\Gamma = \infty$ w punktach $\{0, -1, -2, \dots\}$ i $1/\infty = 0$. Co więcej, można sprawdzić (co wykracza poza ramy tego wykładu) że przy takiej umowie obie strony mają sens dla wszystkich punktów płaszczyzny zespolonej i są funkcjami analitycznymi zmiennej zespolonej na całej płaszczyźnie.

Wniosek 10.46. Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór

$$\sin \pi x = \pi x \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right). \quad (10.29)$$

Mówiąc nieformalnie, powyższy wzór pozwala patrzeć na funkcję $\sin \pi x$ tak, jakby była wielomianem o nieskończonej liczbie miejsc zerowych w punktach całkowitych, równym (nieskończonemu) iloczynowi czynników $1 \pm \frac{x}{k}$ (znikających w punktach $x = \mp k$, $k \in \mathbb{N}$) oraz czynnika πx . Podobne przedstawienia funkcji w postaci iloczynów nieskończonych, zawierających czynniki liniowe, znikające tam, gdzie dana funkcja ma zera, odgrywają ważną rolę w analizie zespolonej.

Dowód Wniosku 10.46 pozostawimy jako zadanie, łatwe przy obecnej wiedzy Czytelnika. Trzeba skorzystać ze wzoru na dopełnienie podanego w poprzednim wniosku i wyrazić funkcję $1/\Gamma(t)$ wzorem iloczynowym Weierstrassa 10.22, biorąc $t = 1 \pm x$.

Przykład 10.47. Sprawdźmy po raz trzeci, że $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Ze wzoru (10.28) i własności $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ łatwo otrzymujemy

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Dla $x = 1/2$ dostajemy stąd $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. \square

10.4 Rozwinięcie cotangensa w szereg ułamków prostych

Z rozważań poprzedniego rozdziału wyprowadzimy teraz tożsamość, jaką spełnia funkcja $\text{ctg } \pi x$ w punktach $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, a następnie zastosujemy tę tożsamość do obliczenia sum szeregów

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Twierdzenie 10.48. Dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ zachodzi równość

$$\pi \operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right). \quad (10.30)$$

Dowód. Niech $M > 0$. Mamy

$$\left| \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right| = \left| \frac{2x}{x^2 - n^2} \right| \leq \frac{4M}{n^2} \quad \text{dla } |x| \leq M, \quad n^2 > 2M^2 \geq 2|x|^2. \quad (10.31)$$

Dlatego na zbiorze $[-M, M] \setminus \mathbb{Z}$ szereg w (10.30) określa funkcję ciągłą (korzystamy z kryterium Weierstrassa). Z dowolności M wynika, że wzór (10.30) ma sens na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Oznaczmy

$$S_N(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Nietrudno sprawdzić, że dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ jest

$$\begin{aligned} S_N(x+1) &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)+N} + \frac{1}{(x+1)+N-1} + \cdots + \frac{1}{(x+1)+1} \\ &\quad + \frac{1}{(x+1)-1} + \frac{1}{(x+1)-2} + \cdots + \frac{1}{(x+1)-N} \\ &= S_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N+1} + \frac{1}{x+N}. \end{aligned}$$

Dlatego $\lim_N S_N(x+1) = \lim_N S_{N-1}(x) = \lim_N S_N(x)$. Prawa strona (10.30) jest więc na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ funkcją okresową o okresie 1. Lewa strona (10.30) też ma tę własność. Dlatego wystarczy sprawdzić równość z tezy dla $x \in (0, 1)$.

Wobec Wniosku 10.46 i nierówności $\sin \pi x > 0$, która zachodzi dla $x \in (0, 1)$, możemy dla takich x napisać

$$\ln \sin \pi x = \ln \pi + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) + \ln \left(1 - \frac{x}{k} \right) \right).$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny.² Pochodna lewej strony jest równa $\pi \operatorname{ctg} \pi x$. Różniczkując prawą stronę wyraz po wyrazie, otrzymujemy

$$\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k} \right).$$

Korzystając z wykazanej wcześniej jednostajnej zbieżności tego szeregu oraz twierdzenia o różniczkowaniu ciągów i szeregów funkcyjnych, kończymy dowód. \square

Przykład 10.49 (liczby Bernoullego i wartości funkcji dzeta Riemanna). Opierając się na Twierdzeniu 10.48, można wyznaczyć liczby

$$\zeta(2m) = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \cdots, \quad m = 1, 2, \dots,$$

²Można to sprawdzić bezpośrednio, ale można też po prostu odwołać się do udowodnionego już Wniosku 10.46 i ciągłości logarytmu naturalnego.

tzn. wartości w liczbach naturalnych parzystych funkcji *dzeta Riemanna*, wspomnianej przelotnie w Przykładzie 4.21.

Trzeba w tym celu dwoma sposobami rozwinąć funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \pi x \operatorname{ctg} \pi x, & x \in (-1, 1), x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

w szereg potęgowy wokół zera i porównać otrzymane współczynniki. (Zauważmy, że f jest ciągła w zerze).

Posługując się Twierdzeniem 10.48, wzorem na sumę szeregu geometrycznego i Lematem 8.20 o zmianie kolejności sumowania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \pi x \operatorname{ctg} \pi x &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x+n} + \frac{x}{x-n} \right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{1}{(1 - (x^2/n^2))} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2} \right)^k \\ &= 1 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} x^{2m} \zeta(2m). \end{aligned} \quad (10.32)$$

(przechodząc do ostatniej linijki, zmieniliśmy kolejność sumowania, a następnie wprowadziliśmy nowy indeks $m = k + 1 = 1, 2, \dots$).

Aby uzyskać rozwinięcie f w szereg inną metodą, wykorzystamy wiedzę o funkcjach trygonometrycznych i funkcji wykładniczej, oraz ich związek, określony w Definicji 4.58. Otóż,

$$\begin{aligned} \pi x \operatorname{ctg} \pi x &= \pi x \cdot \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} \stackrel{\text{Def. 4.58}}{=} i\pi x \cdot \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \quad (\text{niech } z = 2\pi i x) \\ &= \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \\ &= \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Zauważmy, że funkcja

$$g(z) = f\left(\frac{z}{2i}\right) - \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z - 1}$$

jest dobrze określona na zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\pi\}$. To wynika z faktu, że f nie ma osobliwości w zerze, a funkcja wykładnicza przyjmuje wartość 1 tylko w punktach $z = 2\pi i k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (patrz Wniosek 4.72).

Sprawdźmy teraz, że

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m=2}^{\infty} b_m z^m, \quad (10.34)$$

gdzie współczynniki b_m spełniają zależność

$$\sum_{m=0}^N \frac{b_m}{(N+1-m)!} = \begin{cases} 1, & N=0, \\ 0, & N=1, 2, \dots \end{cases} \quad (10.35)$$

Istotnie, pierwsza równość (10.34) jest równoważna innej,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{e^z - 1}{z} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \right) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^N \frac{b_m}{(N-m+1)!} \right) z^N. \end{aligned}$$

Przechodząc do drugiej linii, wypisaliśmy iloczyn Cauchy'ego dwóch szeregów. Równość (10.35) wynika z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy i porównania współczynników. Wypada się tylko upewnić, że szereg potęgowy $\sum b_m z^m$ ma dodatni promień zbieżności.³ Jednak z (10.35) otrzymujemy $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, a następnie

$$b_N = -\frac{b_{N-1}}{2!} - \frac{b_{N-2}}{3!} - \dots - \frac{b_0}{(N+1)!}.$$

Łatwo wykazać przez indukcję, że $|b_N| \leq 1$. Istotnie, dla $N = 0, 1$ teza zachodzi, a z nierówności trójkąta i założenia indukcyjnego $|b_k| \leq 1$ dla $k = 0, 1, \dots, N-1$ otrzymujemy

$$|b_N| \leq \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(N+1)!} < e - 2 < 1.$$

Zatem promień R zbieżności szeregu, występującego we wzorze (10.34), spełnia zależność $R^{-1} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{|b_N|} \leq 1$, tzn. $R \geq 1$. Podstawiając rozwinięcie (10.34) do wzoru (10.33), otrzymujemy

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} b_m (2\pi i x)^m.$$

Jednak lewa strona jest parzystą funkcją zmiennej $x \in (-1, 1)$. Dlatego $b_{2s+1} = 0$ dla wszystkich $s \in \mathbb{N}$ (pochodne nieparzystego rzędu funkcji parzystej są funkcjami nieparzystymi, a więc znikają w zerze). Możemy zatem napisać

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} (2\pi)^{2m} (-1)^m x^{2m} = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m} (2\pi)^{2m}}{2 \cdot (2m)!} (-1)^{m+1} x^{2m}, \quad (10.36)$$

gdzie

$$B_k = k! b_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10.37)$$

Liczby B_k nazywają się *liczbami Bernoullego*. Można je wyznaczać rekurencyjnie, korzystając z zależności (10.35). Porównując prawe strony wzorów (10.32) i (10.36), otrzymujemy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m} (2\pi)^{2m}}{2 \cdot (2m)!} (-1)^{m+1} x^{2m} = \sum_{m=1}^{\infty} \zeta(2m) x^{2m}.$$

³To wynika z ogólnego twierdzenia, orzekającego, że jeśli g jest nieznikającą funkcją analityczną zmiennej rzeczywistej lub zespolonej, to $1/g$ też jest funkcją analityczną. Nie dowodziliśmy jednak tego twierdzenia. Dlatego wskażemy prosty argument, dostosowany do rozważanego przypadku.

n	B_n	n	B_n	n	B_n
2	$\frac{1}{6}$	18	$\frac{43\,867}{798}$	34	$\frac{2\,577\,687\,858\,367}{6}$
4	$-\frac{1}{30}$	20	$-\frac{174\,611}{330}$	36	$-\frac{26\,315\,271\,553\,053\,477\,373}{1\,919\,190}$
6	$\frac{1}{42}$	22	$\frac{854\,513}{138}$	38	$\frac{2\,929\,993\,913\,841\,559}{6}$
8	$-\frac{1}{30}$	24	$-\frac{236\,364\,091}{2730}$	40	$-\frac{261\,082\,718\,496\,449\,122\,051}{13\,530}$
10	$\frac{5}{66}$	26	$\frac{8\,553\,103}{6}$	42	$\frac{1520\,097\,643\,918\,070\,802\,691}{1806}$
12	$-\frac{691}{2730}$	28	$-\frac{23\,749\,461\,029}{870}$	44	$-\frac{27\,833\,269\,579\,301\,024\,235\,023}{690}$
14	$\frac{7}{6}$	30	$\frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322}$	46	$\frac{596\,451\,111\,593\,912\,163\,277\,961}{282}$
16	$-\frac{3617}{510}$	32	$-\frac{7\,709\,321\,041\,217}{510}$	48	$-\frac{5\,609\,403\,368\,997\,817\,686\,249\,127\,547}{46\,410}$

Liczby B_2, B_4, \dots, B_{48} . Tabelkę wykonano w programie Mathematica, korzystając z wbudowanej funkcji BernoulliB[.].

Oba szeregi mają dodatni promień zbieżności; wobec jednoznaczności rozwinięcia w szeregi potęgowe,

$$\zeta(2m) = \frac{B_{2m}(2\pi)^{2m}}{2 \cdot (2m)!} (-1)^{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (10.38)$$

Ten wzór znał około 1750 roku Leonard Euler. Wyznaczył też wartości $\zeta(2m)$ dla $1 \leq m \leq 15$, obliczając odpowiednie liczby Bernoullego. My zauważmy, że

$$b_2 = -\frac{b_1}{2} - \frac{b_0}{3!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}, \quad B_2 = 2! b_2 = \frac{1}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{B_2(2\pi)^2}{2 \cdot 2!} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Jest także

$$b_4 = -\underbrace{\frac{b_3}{2!}}_{=0} - \frac{b_2}{3!} - \frac{b_1}{4!} - \frac{b_0}{5!} = -\frac{1}{72} + \frac{1}{48} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}, \quad B_4 = -\frac{1}{30},$$

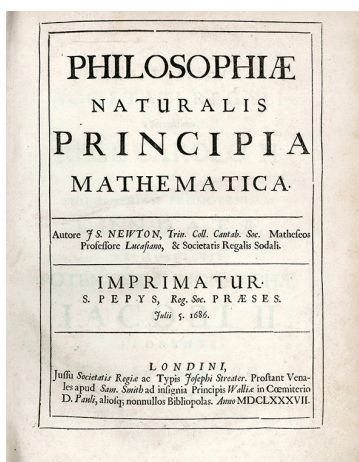
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(4) = -\frac{B_4(2\pi)^4}{2 \cdot 4!} = \frac{16\pi^4}{30 \cdot 2 \cdot 24} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Na tych dwóch wzorach poprzestaniemy, zamieszczając tabelkę z wartościami B_{2k} dla $2k \leq 48$, którą program Mathematica produkuje, zużywając około 10^{-4} sekundy.

Warto podkreślić, że o liczbach $\zeta(2m+1)$ wiadomo znacznie mniej. Dopiero w 1978 roku niewymierność $\zeta(3)$ wykazał Roger Apéry. Wśród liczb $\zeta(2m+1)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, jest nieskończenie wiele liczb niewymiernych, ale tożsamości podobne do (10.38) nie są znane.

Rozdział 11

Zakończenie: eliptyczność orbit



Opiszmy na zakończenie jeden z największych historycznych sukcesów rachunku różniczkowego: *dowód*, że pod działaniem siły grawitacji planety poruszają się po elipsach.

Zgodnie z prawem grawitacji, dwa ciała o masach M i m przyciągają się z siłą skierowaną wzdłuż łączącej je prostej i proporcjonalną do iloczynu mas oraz odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości ciał. Ciało o masie M (Słońce) umieścimy w początku układu współrzędnych w \mathbb{R}^3 . Zmienna $t > 0$ to czas. Milcząco założymy, że wszystkie funkcje występujące w rachunkach są różniczkowalne.

W chwili $t > 0$ planeta o masie m jest w punkcie $y(t) \in \mathbb{R}^3$. Słońce przyciąga ją z siłą

$$F = -\frac{GMm}{|y|^3}y,$$

gdzie $|y|$ oznacza długość wektora $y \in \mathbb{R}^3$. Z drugiej zasady dynamiki wiadomo, że siła F nadaje przyspieszenie $a = y''$ i zachodzi równość $F = ma$. Dlatego

$$y'' = -\frac{GM}{|y|^3}y.$$

Matematykowi wolno przyjąć, że wskutek doboru jednostek iloczyn $GM = 1$. Równanie różniczkowe, opisujące ruch planety wokół Słońca ma wtedy postać

$$y'' = -\frac{y}{|y|^3}. \quad (11.1)$$

Twierdzenie 11.1 (Newton). *Wszystkie rozwiązania równania (11.1) są krzywymi płaskimi. Jedyne krzywe zamknięte, spełniające (11.1), to elipsy (o ognisku w zerze).*

Dowód. Najpierw wykażemy, że ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie. W tym celu rozpatrzmy iloczyn wektorowy $y \times y'$ i obliczymy jego pochodną:

$$\frac{d}{dt}(y \times y') = y' \times y' + y \times y'' = y \times y'' \stackrel{(11.1)}{=} 0.$$

(Łatwo sprawdzić, że wzór na pochodną iloczynu wektorowego funkcji $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest taki sam, jak zwykły wzór na pochodną iloczynu; ponadto $a \times a = 0$ i dlatego otrzymujemy kolejne równości). Zatem

$$y \times y' \equiv \text{const} =: h \in \mathbb{R}^3, \quad (11.2)$$

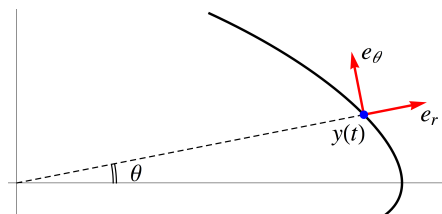
to zaś oznacza, że płaszczyzna rozpięta na wektorach y, y' jest w każdej chwili prostopadła do wektora h . Zatem $y, y' \perp h$ i ruch odbywa się w ustalonej płaszczyźnie.

Odtąd więc, obróciwszy układ współrzędnych, mamy prawo zakładać, że $y = y(t) \in \mathbb{R}^2$. Wprowadźmy w \mathbb{R}^2 współrzędne biegunowe r, θ . Będziemy pisać

$$e_r = (\cos \theta, \sin \theta), \quad e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta),$$

oraz

$$y = r \cdot e_r, \quad \text{gdzie } r = |y|. \quad (11.3)$$



Współrzędne biegunowe. Wektor $y(t)$ jest iloczynem wektora jednostkowego e_r i liczby $r = |y|$. Siła i przyspieszenie są równoległe do e_r .

Oczywiście, $r, \theta: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami czasu t , określonymi tak długo, jak długo odbywa się ruch. Wyraźmy przyspieszenie w tym układzie współrzędnych.

Ze wzorów na pochodne sinusa i cosinusa wynika, że $(e_r)' = \theta' e_\theta$ i $(e_\theta)' = -\theta' e_r$. Dlatego po prostym rachunku, różniczkując dwukrotnie, otrzymujemy

$$y' = r' e_r + r(e_r)' = r' e_r + r\theta' e_\theta, \quad (11.4)$$

$$y'' = (r'' - r(\theta')^2) e_r + (r\theta'' + 2r'\theta') e_\theta. \quad (11.5)$$

Jednak z równania (11.1) wynika, że wektor y'' jest równoległy do y , tzn. do wektora jednostkowego e_r . Współrzędna w kierunku e_θ musi więc znikać. Przeto

$$r\theta'' + 2r'\theta' = 0, \quad r^2 + 2rr'\theta' = \frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0, \quad r^2\theta' \equiv \text{const} = L. \quad (11.6)$$

Wspomnijmy o interpretacji geometrycznej ostatniej równości: wynika z niej, że całka

$$A(t) = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{r^2(\theta)}{2} d\theta$$

ma stałą pochodną $A'(t) = L/2$. Jest to tzw. *drugie prawo Keplera* – prędkość połowa planety jest stała (inaczej: w równych odcinkach czasu promień wodzący planety zamiata figury o równych polach). Czytelnik zechce samodzielnie pomyśleć, dlaczego całka $A(t)$ jest równa polu odpowiedniej figury.¹

Z równań (11.5) i (11.6) otrzymujemy $y'' = (r'' - r(\theta')^2) e_r = (r'' - r(\theta')^2) \frac{y}{|y|}$. Porównując to wyrażenie z równaniem (11.1), sprawdzamy, że

$$r'' - r(\theta')^2 = -\frac{1}{|y|^2} = -\frac{1}{r^2}.$$

Jednak wobec równości (11.6) jest $r(\theta')^2 = L^2/r^3$, więc

$$r'' = r^{-3}L^2 - r^{-2}. \quad (11.7)$$

¹Trzeba znać wzór na pole trójkąta i umieć posługiwać się sumami Riemanna.

Aby rozwiązać to równanie, użyjemy sztuczki. Niech $u(\theta) := 1/r(t(\theta))$, gdzie $t = t(\theta)$ jest funkcją odwrotną do $\theta = \theta(t)$. Ze wzorów na pochodną złożenia i (11.6) otrzymujemy

$$\frac{d}{d\theta}u = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{L}r', \quad \frac{d^2}{d\theta^2}u = -\frac{1}{L} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -\frac{r^2}{L^2}r''. \quad (11.8)$$

Stąd

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{r^2}{L^2}r'' + \frac{1}{r} \stackrel{(11.7)}{=} \frac{1}{L^2}.$$

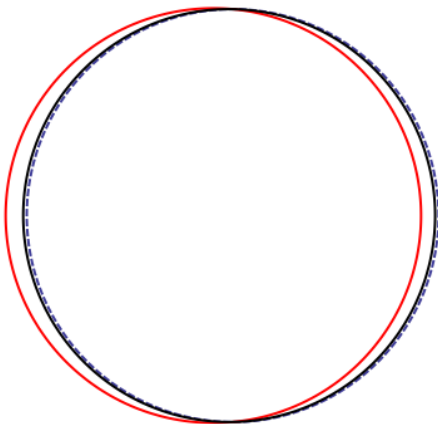
Można wykazać – proszę spróbować zrobić to samodzielnie – że jedynymi rozwiązaniami równania $u'' + u = L^{-2}$ są funkcje

$$u(\theta) = A \cos(\theta + B) + \frac{1}{L^2}, \quad \text{tzn.} \quad r = \frac{1}{u} = \frac{L^2}{1 + AL^2 \cos(\theta + B)}.$$

Gdy stała $AL^2 \in (0, 1)$, ostatnie równanie jest parametrycznym równaniem elipsy. Czytelnik zdoła to sam sprawdzić. Dla $AL^2 \geq 1$ funkcja $r = r(\theta)$ nie jest ograniczona. Trajektoria jest wtedy parabolą lub hiperbolą. \square

W swoich *Principia Mathematica* Newton wykazał także, że jeśli wszystkie orbity zamknięte są elipsami, to wielkość siły musi być odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciał. Stała AL^2 jest *mimośrodkiem elipsy*.

Przybliżone mimośrodki orbit planet w Układzie Słonecznym są następujące:



Merkury	Wenus	Ziemia	Mars
0,205	0,007	0,017	0,093
Jowisz	Saturn	Uran	Neptun
0,048	0,054	0,047	0,009

Orbity odbiegają więc od kołowych bardzo nieznacznie. Mimo to, na podstawie danych obserwacyjnych, które zgromadził astronom Tycho Brahe, Kepler zdołał w 1609 roku wysunąć przypuszczenie, że orbity planet są elipsami.

Okrąg (linia przerywana), elipsa o mimośrodku takim, jak orbita Ziemi (ciągła linia czarna) i elipsa o mimośrodku orbity Marsa (linia czerwona). Środek okręgu i jedno z ognisk każdej elipsy są w tym samym punkcie.

Czytelnik zgodzi się jednak, że czym innym jest *supozycja*, wysnuta z obserwacji, czym innym zaś *dowód*, stwierdzający, że przy pewnych założeniach orbity *muszą* być elipsami. (To zresztą tylko rozsądne przybliżenie rzeczywistości, gdyż naprawdę na ruch każdej z planet wokół Słońca wpływa siła przyciągania pozostałych planet, znikoma w porównaniu z przyciąganiem Słońca, ale przecież niezerowa. Dlatego orbity są elipsami jedynie w pewnym przybliżeniu, a ich mimośrodki podlegają wahaniom.)

* * *

Siła Analizy Matematycznej tkwi więc zarówno w zastosowaniach, jak i w subtelnej teorii. Warto o tym pamiętać.

Dodatek A

Dygresje: dodatkowy materiał, omawiany na wykładzie

A.1 Twierdzenie Stolza

Poniższe twierdzenie pozwala w wielu przypadkach obliczać granice ciągów a_n/b_n , gdy $a_n, b_n \rightarrow +\infty$, i stanowi dla ciągów odpowiednik tak zwanej reguły de l'Hospitala.¹

Twierdzenie A.1 (Twierdzenie Stolza). *Założmy, że ciąg (b_n) jest ściśle monotoniczny oraz $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $(a_n) \subset \mathbb{R}$ i istnieje granica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = g,$$

a ponadto zachodzi któryś z następujących warunków:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$,

to wówczas ciąg (a_n/b_n) jest zbieżny, a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g.$$

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności założymy, że ciąg b_n jest rosnący (zawsze można rozpatrzyć $-a_n$ i $-b_n$). Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\eta \in (0, 1/2]$; konkretną wartość η dobierzemy do ε później. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$g - \eta < \frac{a_{s+1} - a_s}{b_{s+1} - b_s} < g + \eta \quad \text{dla wszystkich } s \geq k.$$

Ciąg (b_n) jest rosnący, więc $b_{s+1} - b_s > 0$. Mnożąc obie nierówności przez tę liczbę, otrzymujemy

$$(b_{s+1} - b_s)(g - \eta) < a_{s+1} - a_s < (b_{s+1} - b_s)(g + \eta), \quad s \geq k.$$

¹Jeśli Czytelnik nie zna tej nazwy, niech się nie martwi; jeśli zaś zna ją ze słyszenia, to niech nie stosuje bezmyślnie nieodpowiednich narzędzi, szczególnie wtedy, gdy nie jest pewien, skąd się one właściwie wzięły.

Niech $n > m \geq k$. Dodając powyższe nierówności dla $s = m, m + 1, \dots, n - 1$, a następnie dzieląc wynik przez liczbę dodatnią $b_n - b_m$, sprawdzamy, że

$$g - \eta < \frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} < g + \eta \quad \text{dla wszystkich } n > m \geq k. \quad (\text{A.1})$$

Od tego momentu rozumowanie jest nieco inne w każdym z dwóch przypadków.

Przypadek (i): $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Ustalmy w nierównościach (A.1) liczbę $m \geq k$ i przejdźmy do granicy $n \rightarrow \infty$. Korzystając ze Stwierdzenia 2.13 i arytmetycznych własności granicy, otrzymujemy

$$g - \eta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} = \frac{a_m}{b_m} \leq g + \eta.$$

Jeśli więc $\eta > 0$ jest jakąkolwiek liczbą z przedziału $(0, \varepsilon)$, powiedzmy $\eta = \varepsilon/2$, to

$$\left| \frac{a_m}{b_m} - g \right| \leq \eta < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } m \geq k,$$

co kończy dowód twierdzenia Stolza w przypadku (i).

Przypadek (ii): $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. Ustalmy w nierównościach (A.1) liczbę $m = k$

Uwaga. Cała reszta dowodu w tym przypadku jest formalizacją następującego intuicyjnego i nieścisłego spostrzeżenia: $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n) \approx g$ dla dużych n , więc przyrosty ciągu a_n są z grubsza, z dokładnością do stałego czynnika, takie, jak przyrosty ciągu b_n . Zatem ułamek a_n/b_n , który dopiero chcemy zbadać, powinien różnić się mało od ułamka $(a_n - a_k)/(b_n - b_k)$; spodziewamy się, że dla n znacznie większych od k liczby a_k i b_k są mało istotnymi dodatkami do a_n i b_n .

Spróbujmy tę intuicję doprecyzować. Obliczmy w tym celu różnicę liczb a_n/b_n oraz $(a_n - a_k)/(b_n - b_k)$. Prosty rachunek daje

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| &= \left| \frac{a_n(b_n - b_k) - b_n(a_n - a_k)}{b_n(b_n - b_k)} \right| = \left| \frac{-a_n b_k + b_n a_k}{b_n(b_n - b_k)} \right| \\ &= \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \cdot \left| \frac{b_k}{b_n - b_k} \right| + \left| \frac{a_k}{b_n - b_k} \right| \\ &\leq \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \eta + \eta \quad \text{dla } n > n_1 = n_1(k, \eta) > k. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

(Proszę zauważyć: $b_n \rightarrow +\infty$, więc przy ustalonym k mamy $b_k/(b_n - b_k), a_k/(b_n - b_k) \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$, zatem wartości bezwzględne obu tych ułamków są małe, gdy n jest dostatecznie duże). Zatem dla dostatecznie dużych n

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| + \left| \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| \leq \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \eta + \eta + |g| + \eta,$$

stąd zaś

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \frac{|g| + 2\eta}{1 - \eta} \leq 2|g| + 4\eta \leq 2|g| + 2 =: M, \quad n > n_1.$$

Możemy więc nierówność (A.2) przepisać w postaci

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| \leq (M + 1)\eta, \quad n > n_1.$$

Zatem, dzięki warunkowi (A.1), dla $n > n_1$ jest

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - g \right| \leq \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| + \left| \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} - g \right| \leq (M + 1)\eta + \eta = (2|g| + 4)\eta.$$

Wystarczy teraz dobrać $\eta < \min(\frac{1}{2}, \varepsilon/(2|g| + 4))$; otrzymamy wtedy $|(a_n/b_n) - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > n_1$. \square

Ćwiczenie A.2. Analizując starannie powyższe rozumowanie, sprawdzić, że ostatnie twierdzenie wolno stosować także wtedy, gdy $g = \pm\infty$ (tzn. do obliczania granic niewłaściwych).

Przykład A.3. Wykażemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Zastosujemy Twierdzenie Stolza dla $a_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ i $b_n = n^{k+1}$. Ciąg b_n jest rosnący i rozbieżny do $+\infty$; to połowa założeń twierdzenia. Sprawdźmy więc jeszcze, że $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n) \rightarrow 1/(k+1)$, gdy $n \rightarrow \infty$. Mamy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}}$$

Korzystając ze wzoru na różnicę $(k+1)$ -szych potęg, a następnie dzieląc licznik i mianownik przez n^k , otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^k + (n+1)^{k-1}n + \dots + n^k} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} + \dots + 1}.$$

Z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy nietrudno wywnioskować, że dla $n \rightarrow \infty$ licznik ostatniego ułamka jest zbieżny do 1, a mianownik (w którym jest $k+1$ składników) do $k+1$. \square

Przykład A.4. Jeśli ciąg x_n jest zbieżny do granicy x , to ciąg średnich arytmetycznych

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

też jest zbieżny do granicy x . Istotnie, biorąc w twierdzeniu Stolza $a_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $b_n = n$, otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{x_{n+1}}{(n+1) - n} = x_{n+1} \rightarrow x,$$

a zatem także

$$A_n = \frac{a_n}{b_n} \rightarrow x.$$

Przykład A.5. Jeśli ciąg liczb dodatnich x_n jest zbieżny do granicy $x \geq 0$, to ciąg średnich geometrycznych

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

też jest zbieżny do granicy x . Szczegóły dowodu, który można przeprowadzić, korzystając z poprzedniego przykładu oraz ciągłości funkcji wykładniczej i logarytmu, pozostawimy Czytelnikom. \square

Zadanie A.6. Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Wskazówka. Zauważyć, że $x_n = n^n / (1+n)^n$ ma granicę $1/e$ i skorzystać z poprzedniego przykładu.

Przykład A.7. Implikacji, która jest treścią twierdzenia Stolza, *nie można odwrócić*. Jeśli np. $a_n = 3n - (-1)^n$, $b_n = 3n + (-1)^n$, to łatwo zauważyć, że b_n rośnie monotonicznie do $+\infty$ i, oczywiście,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3 - \frac{(-1)^n}{n}}{3 + \frac{(-1)^n}{n}} \rightarrow \frac{3}{3} = 1,$$

ale nietrudno sprawdzić, że $a_{n+1} - a_n = 3 + 2 \cdot (-1)^n$, $b_{n+1} - b_n = 3 - 2 \cdot (-1)^n$, więc ciąg $(a_{n+1} - a_n) / (b_{n+1} - b_n)$ ma na przemian wyrazy równe $1/5$ i 5 , a to znaczy, że jest rozbieżny. Nie należy więc bez zastanowienia pisać $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \dots$, gdyż może się okazać, że pierwsza granica istnieje, a druga – nie.

A.2 Zasadnicze twierdzenie algebry

Bardzo ważnym twierdzeniem, wykorzystywanym w różnych działach matematyki, jest następujący wynik.

Twierdzenie A.8 (zasadnicze twierdzenie algebry). *Każdy różny od stałej wielomian zmiennej zespolonej o współczynnikach zespolonych ma w ciele \mathbb{C} co najmniej jeden pierwiastek.*

Podamy tu — opowiedziany we współczesnym języku — dowód tego twierdzenia, wykorzystujący własności funkcji ciągłych i podany przez C.F. Gaussa na przełomie XVIII i XIX wieku. Dowód wykorzystuje dwa lematy. Pierwszy z nich orzeka, że każdy wielomian zespolony osiąga kres dolny swojego modułu. To nie jest fakt całkowicie oczywisty, gdyż płaszczyzna \mathbb{C} nie jest zbiorem zwartym.

Lemat A.9. *Jeśli $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ dla $z \in \mathbb{C}$, gdzie $n \geq 1$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$, to istnieje punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ taki, że*

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$$

Dowód Lematu A.9. Bez zmniejszenia ogólności, mnożąc w razie potrzeby wielomian przez stałą, przyjmiemy, że $a_n = 1$. Niech $R > 1$ będzie dużą liczbą, której konkretną wartość dobierzemy za chwilę. Niech $M = 1 + n \max_{j=0, \dots, n-1} |a_j|$. Dla wszystkich $|z| \geq R$ otrzymujemy po prostym rachunku, korzystając z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z|^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \\ &\geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}| + \dots + |a_0|}{R} \right) \quad \text{gdyż } |z|^n > |z|^{n-1} > \dots > |z| \geq R > 1 \\ &> R^n \left(1 - \frac{M}{R} \right) \quad \text{gdyż } |z| \geq R \text{ i } M > |a_{n-1}| + \dots + |a_0| \\ &> \frac{R^n}{2} > |a_0| + 1 = |P(0)| + 1, \end{aligned}$$

pod warunkiem, że liczba $R > 1$ została wybrana tak, aby

$$\frac{M}{R} < \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad R > \sqrt[n]{2(|a_0| + 1)},$$

co łatwo można zagwarantować. Zatem, poza kołem domkniętym $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ funkcja $|P|$ przyjmuje wartości większe od liczby $|P(0)| + 1$. Ponieważ $0 \in K_R$, więc

$$\inf_{z \in K_R} |P(z)| \leq |P(0)| < |P(0)| + 1 \leq \inf_{z \in \mathbb{C} \setminus K_R} |P(z)|$$

i dlatego

$$\inf_{z \in K_R} |P(z)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

Koło domknięte K_R jest zbiorem zwartym, a $|P|: K_R \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów (patrz Twierdzenie 5.63 i Uwaga 5.65) wynika, że istnieje taki punkt $z_0 \in K_R$, iż

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in K_R} |P(z)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|. \quad \square$$

Lemat A.10. *Jeśli $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ dla $z \in \mathbb{C}$, gdzie $n \geq 1$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$, a $z_0 \in \mathbb{C}$ jest punktem takim, że*

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|,$$

to wówczas $P(z_0) = 0$.

DOWÓD LEMATU A.10. Dla wielomianów stopnia 1 lemat jest oczywisty: każdy taki wielomian ma pierwiastek z_0 i w nim osiąga kres dolny swojego modułu.

Niech więc P będzie wielomianem zespolonym stopnia $n > 1$. Przypuśćmy, że

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| > 0$$

Rozpatrzmy wielomian pomocniczy $Q(z) = P(z + z_0) \cdot \overline{P(z_0)}$ (przesuwamy wielomian P i mnożymy go przez stałą). Mamy $Q(0) = P(z_0) \cdot \overline{P(z_0)} = |P(z_0)|^2 > 0$, więc Q spełnia zależność

$$|Q(0)| = Q(0) = \inf_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)| > 0. \quad (\text{A.3})$$

Wyróżnijmy teraz najniższą dodatnią potęgę z , która w Q występuje ze współczynnikiem różnym od zera, tzn. wybierzmy $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tak, aby

$$Q(z) = b_0 + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \dots + b_n z^n = b_0 + b_k z^k + z^k q(z),$$

gdzie $b_0 = Q(0) > 0$ i $q(z) = b_{k+1}z + b_{k+2}z^2 + \dots + b_n z^{n-k}$. Gdy $k = n$, to po prostu $q(z) = 0$.

Oszacujemy $|Q(z)|$, starając się wskazać punkt z tak, aby otrzymać $|Q(z)| < |Q(0)| = Q(0) = b_0$ i uzyskać sprzeczność, która zakończy dowód. Na mocy nierówności trójkąta

$$|Q(z)| \leq |b_0 + b_k z^k| + |z|^k |q(z)|.$$

Niech $z = re^{it}$, gdzie $r = |z| > 0$ i $t = \arg z \in \mathbb{R}$. Ustalmy małą liczbę $\varepsilon > 0$, której wartość dobierzemy później.

Ponieważ q jest (jak każdy wielomian) funkcją ciągłą i $q(0) = 0$, więc istnieje $\delta > 0$ takie, że dla wszystkich $|z| = r \in (0, \delta)$ jest $|q(z)| < \varepsilon$. Wtedy

$$|Q(z)| < |b_0 + b_k z^k| + r^k \varepsilon.$$

Argument t liczby z wybierzemy tak, aby $b_k z^k = b_k r^k \exp(itk)$ było liczbą rzeczywistą ujemną. Zapiszmy b_k w postaci $b_k = |b_k| \exp(is)$, gdzie $s = \arg b_k$. Wtedy

$$b_k z^k = |b_k| \exp(is) \cdot r^k \exp(itk) = |b_k| r^k \exp(i(s + tk)) = -|b_k| r^k < 0$$

np. dla $s + tk = \pi$, tzn. dla

$$t = \frac{\pi - s}{k} = \frac{\pi - \arg b_k}{k}.$$

Zatem, dla $z = r e^{it}$, gdzie $r \in (0, \delta)$ i $t = \frac{\pi - \arg b_k}{k}$, jest

$$\begin{aligned} |Q(z)| &< \left| b_0 - |b_k| r^k \right| + r^k \varepsilon \\ &= b_0 - |b_k| r^k + r^k \varepsilon \quad \text{gdy } r < \delta_1 := \min \left(\frac{b_0}{\sqrt[k]{|b_k|}}, \delta \right) \\ &= b_0 - \frac{|b_k|}{2} r^k \quad \text{gdy } r < \delta_1 \text{ oraz } \varepsilon = \frac{|b_k|}{2} \\ &< b_0 = Q(0) = |Q(0)|. \end{aligned}$$

To jest sprzeczność, gdyż $|Q(0)| = \inf |Q|$. Musi więc być $Q(0) = |P(z_0)|^2 = 0$. \square

Czytelnik–koneser zauważył być może, że w ostatnim dowodzie posługiwaliśmy się w gruncie rzeczy rozwinięciem Taylora–Maclaurina wielomianu Q w zerze, wyodrębniwszy zeń najważniejszy składnik $b_k z^k$. Wielomian $q(z)$ to wynik dzielenia reszty przez z^k .

DOWÓD ZASADNICZEGO TWIERDZENIA ALGEBRY. Niech P będzie różnym od stałej wielomianem zespolonym. Na mocy Lematu A.9, istnieje $z_0 \in \mathbb{C}$ takie, że

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

Z Lematu A.10 wynika, że $P(z_0) = 0$. \square

Definicja A.11. Niech $k \in \mathbb{N}$. Liczba z_0 nazywa się k -krotnym pierwiastkiem wielomianu P wtedy i tylko wtedy, gdy P jest podzielny przez jednomian $(z - z_0)^k$, ale nie jest podzielny przez $(z - z_0)^{k+1}$.

Wniosek A.12 (rozkład wielomianu zespolonego na czynniki liniowe). Jeśli P jest wielomianem zespolonym stopnia $n \geq 1$, $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, to istnieją liczby $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ takie, że z_j jest k_j -krotnym pierwiastkiem P dla $j = 1, \dots, m$ oraz

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Zachodzi równość

$$P(z) = a_n \cdot \prod_{j=1}^m (z - z_j)^{k_j}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dowód. Dla $n = 1$ teza wniosku jest oczywista. Dla $n > 1$ tezy dowodzimy przez indukcję, posługując się zasadniczym twierdzeniem algebry. \square

Wniosek A.13 (rozkład wielomianu rzeczywistego na czynniki). *Każdy wielomian rzeczywisty P stopnia $n \geq 1$, $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ (gdzie $a_j \in \mathbb{R}$ dla $j = 0, 1, \dots, n$ i $a_n \neq 0$) jest iloczynem czynników liniowych i takich trójmianów kwadratowych o współczynnikach rzeczywistych, które nie mają pierwiastków rzeczywistych. Niektóre z tych czynników mogą być równe.*

Dowód. Na mocy poprzedniego wniosku,

$$P(x) = a_n \cdot \prod_{j=1}^m (x - z_j)^{k_j}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.4})$$

gdzie z_j są zespolonymi pierwiastkami wielomianu P . Ponieważ wszystkie współczynniki wielomianu są rzeczywiste, więc mamy także

$$P(x) = \overline{P(x)} = a_n \cdot \prod_{j=1}^m (x - \overline{z_j})^{k_j}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zatem: jeśli $z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem P , to i $\overline{z_j}$ jest pierwiastkiem P . Ponieważ

$$(x - z_j)(x - \overline{z_j}) = x^2 - 2\operatorname{Re} z_j \cdot x + |z_j|^2$$

jest trójmianem kwadratowym o współczynnikach rzeczywistych, którego nie można w \mathbb{R} rozłożyć na czynniki liniowe (bo pierwiastki są w $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$!), więc łącząc w pary odpowiednie czynniki prawej strony (A.4), rozłożymy P na pewną liczbę czynników liniowych (odpowiadających rzeczywistym pierwiastkom P , liczonym z krotnościami) i pewną liczbę czynników kwadratowych (odpowiadającym parom pierwiastków $z_j, \overline{z_j} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ wielomianu P , również liczonym z krotnościami). Żaden czynnik kwadratowy nie ma pierwiastków w \mathbb{R} . \square

Zadanie A.14. Wykazać, że $x_0 \in \mathbb{R}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu P o współczynnikach rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(x_0) = P'(x_0) = \dots = P^{(k-1)}(x_0), \quad P^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Wskazówka. Posłużyć się definicją, twierdzeniem Bezout (znanym ze szkolnego kursu matematyki) i wzorem Leibniza na wyższe pochodne iloczynu dwóch funkcji.

Zadanie A.15. Niech

$$Q(z_1, \dots, z_m) = \sum_{\text{skończ.}} a_{k_1 k_2 \dots k_m} z^{k_1} \cdot z^{k_2} \cdot \dots \cdot z^{k_m}$$

będzie różnym od stałej wielomianem $m > 1$ zmiennych zespolonych o współczynnikach $a_{k_1 k_2 \dots k_m} \in \mathbb{C}$. Wykazać, że Q ma co najmniej jeden pierwiastek. Czy zbiór pierwiastków takiego wielomianu może być skończony?

A.3 Metoda stycznych (Newtona)

Omówimy w tym podrozdziale prostą wersję tak zwanej metody stycznych Newtona, służącej do przybliżonego rozwiązywania równań typu $f(x) = 0$.

Zacznijmy od przytoczenia zadania, które w połowie lat 90-tych dwudziestego wieku pojawiło się na zawodach drugiego etapu Olimpiady Matematycznej.

Zadanie A.16. Dane są dwa ciągi liczb rzeczywistych, $x_1 = y_1 = 1$ oraz

$$y_{n+1} = \frac{y_n + 2}{y_n + 1}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykazać, że $x_{n+1} = y_{2^n}$ dla wszystkich $n = 1, 2, 3, \dots$

Zadanie ma kilka rozwiązań. To, które przedstawimy, nie jest najkrótsze, ale ma tę zaletę, że pozwala głębiej zrozumieć, skąd pochodzi problem i co jest w nim istotne.

ROZWIĄZANIE. Wypiszmy tabelkę z początkowymi wyrazami obu ciągów.

n	1	2	3	4	5
y_n	1	1,5	1,4	1,416...	1,41379...
y_n^2	1	2,25	1,96	2,006...	1,9988...
x_n	1	1,5	1,416...	1,4142...	1,4142135...
x_n^2	1	2,25	2,006...	2,000006...	2,000000000004...

Widać, że kwadraty liczb x_n są coraz bliższe 2 (podobnie zresztą jak kwadraty liczb y_n). Łatwo jest zauważyć, że *gdyby ciąg x_n był zbieżny, to jego granicą byłaby liczba $g = \sqrt{2}$* . Dlaczego? Jeśli $\lim x_n = g$ istnieje, to musi spełniać równość² $2g \cdot g = g^2 + 2$, lub równoważnie $g^2 = 2$. Ponieważ wszystkie x_n są dodatnie, więc możliwość $g = -\sqrt{2}$ odrzucamy.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla ciągu y_n . Jeśli $\lim y_n = g$, to liczba g spełniałaby równość $g = (g + 2)/(g + 1)$ i była nieujemna, więc byłoby $g = \sqrt{2}$.

Pokażemy, że oba ciągi są zbieżne do $\sqrt{2}$. W tym celu wyrazimy zarówno x_n , jak i y_n , jawnymi wzorami.

Zbadajmy, jak zmieniają się różnice $y_n - \sqrt{2}$ i $x_n - \sqrt{2}$, gdy zmienia się liczba n . Ze wzoru na y_{n+1} wynika, że

$$\begin{aligned} y_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{y_n + 2}{y_n + 1} - \sqrt{2} = \frac{y_n + 2 - y_n\sqrt{2} - \sqrt{2}}{y_n + 1} \\ &= \frac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + 1} (1 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Gdy do y_{n+1} dodamy pierwiastek z dwóch, otrzymamy

$$y_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{y_n + \sqrt{2}}{y_n + 1} (1 + \sqrt{2}).$$

²Mnożymy obie strony wzoru rekurencyjnego przez $2x_n$ i przechodzimy do granicy, korzystając z twierdzenia o granicy sumy i iloczynu ciągów zbieżnych

(Wystarczy przepisać poprzedni rachunek, zastępując wszystkie minusy plusami). Krótko mówiąc,

$$y_{n+1} \pm \sqrt{2} = \frac{y_n \pm \sqrt{2}}{y_n + 1} (1 \pm \sqrt{2}).$$

Można te dwa równania podzielić stronami,

$$\frac{y_{n+1} - \sqrt{2}}{y_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}},$$

i wywioskować stąd, że ciąg

$$z_n = \frac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + \sqrt{2}}$$

jest geometryczny, a jego iloraz jest równy $a = (1 - \sqrt{2})/(1 + \sqrt{2})$; dlatego

$$z_{n+1} = a \cdot z_n = a \cdot (a \cdot z_{n-1}) = \dots = a^n \cdot z_1 = a^{n+1}.$$

Stąd łatwo wyliczamy (rozwiązując równanie z jedną niewiadomą):

$$y_n = \sqrt{2} \cdot \frac{1 + a^n}{1 - a^n}, \quad \text{gdzie } a = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}. \quad (\text{A.5})$$

Ponieważ $|a| < 1$, więc $a^n \rightarrow 0$, a zatem $y_n \rightarrow \sqrt{2}$.

Z ciągiem x_n postępujemy tak samo: obliczamy $x_{n+1} \pm \sqrt{2}$, posługując się w tym celu zależnością x_{n+1} od x_n . Otrzymujemy tym razem

$$\begin{aligned} x_{n+1} \pm \sqrt{2} &= \frac{x_n^2 - 2x_n \cdot \sqrt{2} + 2}{2x_n} \\ &= \frac{(x_n \pm \sqrt{2})^2}{2x_n}. \end{aligned}$$

Jak wcześniej, dzielimy te dwa równania stronami, żeby pozbyć się niewygodnego mianownika:

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} \right)^2.$$

Krótko mówiąc, jeśli $w_n = (x_n - \sqrt{2})/(x_n + \sqrt{2})$, to

$$w_{n+1} = w_n^2 = (w_{n-1}^2)^2 = \dots = w_1^{2^n}.$$

Zachodzi więc równość

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = w_1^{2^n} = a^{2^n}.$$

Stąd

$$x_{n+1} = \sqrt{2} \cdot \frac{1 + a^{2^n}}{1 - a^{2^n}}, \quad \text{gdzie } a = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}. \quad (\text{A.6})$$

Teza zadania jest prostym wnioskiem z otrzymanych wzorów (A.5), (A.6). \square

Wykazaliśmy więcej, niż wymagał autor zadania. Znaleźliśmy konkretne wzory na x_n i y_n . Sprawdziliśmy też, że każdy z tych ciągów składa się z wymiernych przybliżeń $\sqrt{2}$. Które przybliżenia są lepsze? Oczywiście te, które daje ciąg x_n . Wszak $x_{n+1} = y_{2n}$. Z równości $w_{n+1} = w_n^2$, którą spełniają liczby $w_n = (x_n - \sqrt{2})/(x_n + \sqrt{2})$, można wywnioskować, że liczba cyfr znaczących przybliżenia $x_n \approx \sqrt{2}$ ulega z grubsza *podwojeniu*, gdy zwiększamy n o 1. (Intuicyjnie biorąc, powód jest taki: $w_n \approx 0$ z dużą dozą dokładności; przechodząc do w_{n+1} , błąd przybliżenia podnosimy do kwadratu. Proszę sprawdzić, jak zmienia się przy takiej operacji liczba zer po przecinku.) Postawmy teraz naturalne pytanie: *no dobrze, ale skąd właściwie wzięły się oba ciągi?* Czy to tylko przypadkowy temat jakiegoś olimpijskiego zadania?

Otóż nie. Ciąg y_n to kolejne przybliżenia $\sqrt{2}$ za pomocą *ułamków łańcuchowych*. Co to znaczy? Ponieważ $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1$, więc

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}.$$

Postępując dalej podobnie, tzn. zastępując różnicę $\sqrt{2} - 1$ ułamkiem $1/(2 + (\sqrt{2} - 1))$, otrzymamy coraz bardziej fantazyjne piętrowe ułamki:

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}, \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}}, \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}}}, \quad \dots$$

Gdybyśmy usunęli nawiasy $(\sqrt{2} - 1)$ i zostawili tylko jedynki w kolejnych licznikach, dwójki, plusy i kreski ułamkowe, otrzymalibyśmy liczby $y_n - 1$ (z przesunięciem numeracji i zapisane w niewygodnej postaci). Można to udowodnić przez indukcję.

Natomiast ciąg x_n to kolejne przybliżenia $\sqrt{2}$ otrzymywane *metodą stycznych*.³ Jest to bardzo użyteczny sposób, który pozwala szybko i wygodnie znajdować przybliżone rozwiązania bardzo wielu równań – także i takich, których nie potrafimy rozwiązać jawnie.

Sformułujmy teraz precyzyjny, ogólny wynik.

Twierdzenie A.17 (metoda stycznych). *Założmy, że $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i dwukrotnie różniczkowalną w (a, b) . Założmy także, że $f(a) < 0 < f(b)$ oraz istnieją stałe $m_1 > 0$ i $M_2 > 0$ takie, że*

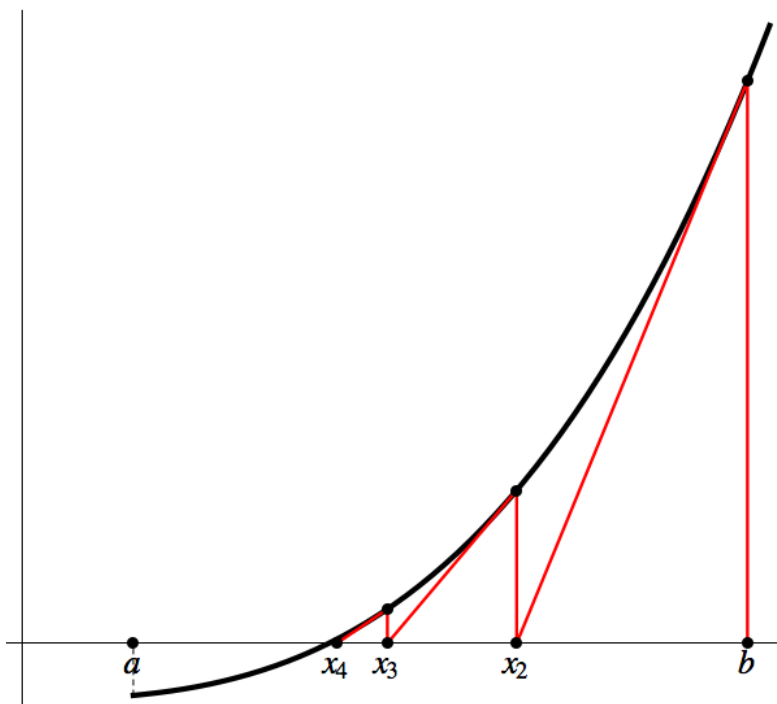
$$f'(x) > m_1 > 0, \quad 0 < f''(x) < M_2 \quad \text{dla wszystkich } x \in (a, b). \quad (\text{A.7})$$

Wówczas ciąg rekurencyjny

$$x_1 = b, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

jest malejący, a jego granica $c = \lim x_n$ jest jedynym punktem przedziału $[a, b]$ takim, że $f(c) = 0$. Ponadto, zachodzi oszacowanie

$$|c - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1} |c - x_n|^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.8})$$



Metoda stycznych: f jest rosnąca i wypukła na (a, b) , wewnątrz tego przedziału ma jedno miejsce zerowe.

Uwaga A.18. Nietrudno zauważyć, że x_{n+1} jest miejscem zerowym stycznej do wykresu f , poprowadzonej w punkcie $(x_n, f(x_n))$; ma ona równanie

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

a zatem $y = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - x_n = -f(x_n)/f'(x_n)$, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy $x = x_{n+1}$. (Patrz także zamieszczony rysunek, który ułatwia zrozumienie całej sytuacji).

Dowód. Z założeń wynika, że f jest rosnąca i ściśle wypukła na $[a, b]$. Ponieważ $f(b) > 0 > f(a)$, więc f ma w (a, b) dokładnie jedno miejsce zerowe c (jedyność wynika z monotoniczności, a istnienie z własności Darboux).

Funkcja f jest ściśle wypukła, więc jej wykres leży nad dowolną swoją styczną. Korzystając z tej obserwacji i z założenia $f(x_1) = f(b) > 0$, łatwo dowodzimy przez indukcję, że $f(x_n) > 0$ $c < x_{n+1} < x_n \leq b$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Istotnie, $b = x_1$, więc $f(x_1) > 0$, a stąd $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) < x_1$, gdyż $f' > 0$. Wykres f leży nad styczną poprowadzoną w punkcie $(x_1, f(x_1))$, a x_2 jest miejscem zerowym tej stycznej, zatem $f(x_2) > 0$ i $c < x_2$. To jest początek indukcji; krok indukcyjny wygląda praktycznie tak samo – szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

Ponieważ (x_n) jest malejący i ograniczony z dołu (przez c), więc ma granicę. Z ciągłości f i f' (zagwarantowanej przez istnienie f'') wynika, że $g = \lim x_n$ spełnia równość $g =$

³Wg. historyków matematyki, metodę stycznych Newton obmyślił ok. roku 1670.

$g - f(g)/f'(g)$. Stąd $f(g) = 0$, tzn. $g = c$, gdyż wiemy, że c jest jedynym miejscem zerowym funkcji f w przedziale (a, b) .

Pozostaje wykazać nierówność (A.8). Wykorzystamy w tym celu wzór Taylora z resztą Lagrange'a (patrz Wniosek 6.60). Wynika z niego, że

$$0 = f(c) = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(c - x_n)^2 \quad \text{dla pewnego } \xi_n \in (c, x_n).$$

Dzieląc przez $f'(x_n)$, otrzymujemy

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + c - x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2,$$

lub równoważnie

$$c - x_{n+1} = c - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2.$$

Ponieważ prawa strona jest ujemna, więc

$$|c - x_{n+1}| = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2 < \frac{M_2}{2m_1}|c - x_n|^2.$$

(Skorzystaliliśmy z oszacowań $0 < f'' < M_2$ i $f' > m_1 > 0$). Dowód jest zakończony. \square

Uwaga A.19. Ciąg x_n jest nie tylko zbieżny do c , ale spełnia zależność

$$|c - x_{n+1}| \leq A \cdot |c - x_n|^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie A jest stałą; dlatego tempo zbieżności jest bardzo szybkie. Aby to zrozumieć, przypuśćmy na chwilę bez zmniejszenia ogólności, że $A > 1$. Gdy już wiemy, że dla pewnego n jest $|c - x_n| < 1/A^2$, to wówczas

$$|c - x_{n+1}| < \frac{1}{A^3}, \quad |c - x_{n+2}| < \frac{1}{A^5}, \quad |c - x_{n+3}| < \frac{1}{A^9}, \quad \dots, \quad |c - x_{n+k}| < \frac{1}{A^{2k+1}}, \quad \dots$$

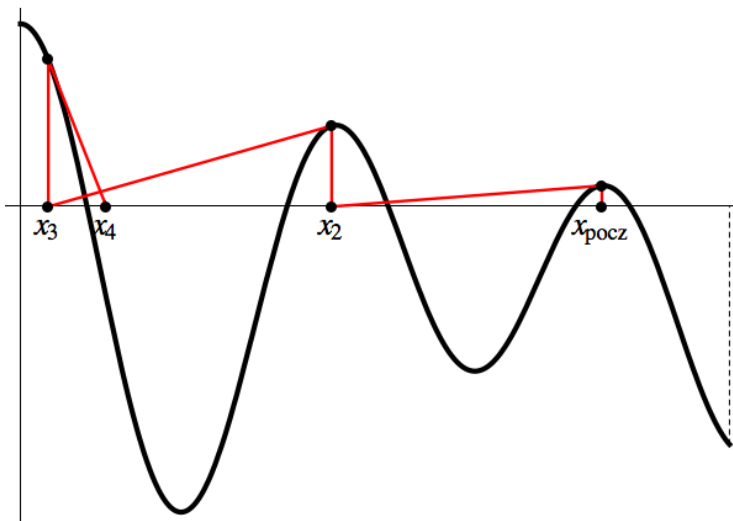
Zatem od pewnego momentu $n = n_0$ odstęp $|c - x_{n+k}|$ maleje wraz ze wzrostem k w takim tempie, jak $1/A^{2k+1}$, czyli znacznie szybciej, niż np. ciąg geometryczny $1/A^k$.

Przykład A.20. Niech $f(x) = x^2 - 2$ dla $x \in [a, b]$, gdzie $a = 1$ i $b = 2$. Mamy $f'(x) = 2x > 2$ na (a, b) i $f''(x) \equiv 2$, a ponadto $f(a) = -1 < 0 < f(b) = 2$, więc f spełnia wszystkie założenia Twierdzenia A.17. W tym przypadku mamy

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - 2)}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

Zatem, począwszy od x_2 , otrzymujemy właśnie ciąg (x_n) z Zadania A.16. Tylko pierwszy wyraz jest inny, wszystkie następne są identyczne

Uwaga A.21. Założenie o monotoniczności i wypukłości f jest niezwykle istotne. Analogiczne twierdzenia można sformułować i udowodnić dla funkcji rosnących i wklęsłych, malejących i wypukłych, oraz malejących i wklęsłych. Czytelnik zechce zastanowić się nad



Metoda stycznych: f ma kilka minimów i maksimów, nie jest ani wklęsła, ani wypukła.

sformułowaniami i zmianami w dowodzie. Ważna jest ogólna reguła: “rysowanie stycznych należy zaczynać od tego końca przedziału, gdzie $|f'|$ jest większy (tzn. wykres ma większe nachylenie”.

Jeśli f ma minima i maksima, a także przedziały wklęsłości i wypukłości, to nie ma żadnej gwarancji, że ciąg wyprodukowany metodą stycznych (1) w ogóle będzie zbieżny, (2) będzie zbieżny akurat do tego pierwiastka równania $f(c) = 0$, który leży najbliżej punktu x_1 . Jeden z możliwych prostych przykładów takiej sytuacji przedstawiony jest na rysunku. Pełna i kompletna analiza zachowań takich ciągów dla różnych wyborów x_1 i dowolnych funkcji f dwukrotnie różniczkowalnych jest, w ogólności, zagadnieniem wykraczającym poza możliwości współczesnej matematyki. Takimi problemami zajmuje się dziedzina, nazywana *teorią układów dynamicznych*.