Rozdział 1

Definicje i przykłady

1.1 Definicja równania różniczkowego

1.1 DEFINICJA. ***Równaniem różniczkowym zwyczajnym*** *rzędu n nazywamy równanie*

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

W równaniu tym t jest zmienną niezależną, a x zmienną zależną. Zmienną zależną $x(t)$ oraz funkcję F traktujemy jako funkcje wektorowe o wartościach w przestrzeni $\mathbb{R}^m$. ***Rozwiązaniem równania*** *(1.1) nazywamy funkcję $\varphi(t)$ klasy C^n, która podstawiona do równania w miejsce x, odpowiednio φ' w miejsce $\dot{x}, \ldots, \varphi^{(n)}$ w miejsce $x^{(n)}$, zmienia to równanie w tożsamość.*

1.2 DEFINICJA. *Wykres funkcji $\varphi(t)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^{m+1}$ zmiennych (t, x) nazywamy* ***krzywą całkową*** *równania (1.1).*

Posługiwanie się równaniami różniczkowymi w postaci (1.1) jest dość niewygodne. Jeśli funkcja F spełnia lokalnie względem najwyższej pochodnej $x^{(n)}$ założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej, równanie (1.1) można rozwikłać względem najwyższej pochodnej

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

Równanie n-tego rzędu w postaci (1.2) można łatwo sprowadzić do **równania pierwszego rzędu**. Wystarczy wprowadzić nowe zmienne

$$x_0(t) = x(t),\ x_1(t) = \dot{x}(t), \ldots,\ x_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t),$$

oraz wektor

$$y(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Wtedy równanie (1.2) zapisuje się jako równanie pierwszego rzędu

$$\dot{y} = g(t, y), \tag{1.4}$$

gdzie $g(t, y)$ jest wektorem

$$g(t, y) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ f(t, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Przedmiotem naszego zainteresowania będą równania pierwszego rzędu (dokładniej układy równań pierwszego rzędu)

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1.6}$$

Zbiór $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$ będziemy nazywać **rozszerzoną przestrzenią fazową** równania (1.6), jeśli G jest spójny i prawa strona równania (1.6) jest w nim dobrze określona. Niech D będzie rzutem G na przestrzeń $\mathbb{R}^m$ zmiennych x, wtedy D będziemy nazywać **przestrzenią fazową** tego równania. W zbiorze G istnieje zwykle bardzo wiele krzywych całkowych równania (1.6). Krzywe te tworzą wieloparametrowe rodziny rozwiązań. Jeśli $\varphi(t; c_1, \ldots, c_m) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ jest rodziną funkcji, sparametryzowaną m parametrami $c_1, c_2, \ldots, c_m$, taką że dla każdego $(c_1, \ldots, c_m) \in A \subset \mathbb{R}^m$, funkcja $\varphi(t; c_1, \ldots, c_m)$ jest krzywą całkową równania (1.6) i dla każdego $(t_0, x_0) \in G$ istnieje parametryzacja $(c_1^0, \ldots, c_m^0) \in A$, taka że $\varphi(t; c_1^0, \ldots, c_m^0)$ jest krzywą całkową przechodzącą przez punkt (t_0, x_0), to rodzinę $\varphi(t; c_1, \ldots, c_m)$ nazywamy **rozwiązaniem ogólnym** równania (1.6). **Całką ogólną** nazywać będziemy uwikłane przedstawienie rozwiązania ogólnego

$$\Phi(t, x; c_1, \ldots, c_m) = 0.$$

1.3 DEFINICJA. *Równanie (1.6), w którym prawa strona nie zależy jawnie od zmiennej niezależnej, nazywa się **równaniem autonomicznym**. Równanie to ma formę*

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.7}$$

Każde równanie postaci (1.6) można sprowadzić do równania autonomicznego. W tym celu należy wprowadzić nową zmienną niezależną s daną równaniem $s = t$, a zmienną t potraktować jako kolejną składową wektora x. Wtedy równanie (1.6) można zapisać w postaci

$$\dot{y} = g(y), \tag{1.8}$$

gdzie $y = \binom{x}{t}$, $g = \binom{f}{1}$, a różniczkowanie oznacza różniczkowanie względem nowej zmiennej niezależnej s.

1.2 Zagadnienie początkowe

1.4 DEFINICJA. *Załóżmy, że rozwiązanie równania (1.6) spełnia warunek*

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.9}$$

Warunek ten nazywa się ***warunkiem początkowym*** *(****warunkiem Cauchy'ego****).*

Równanie (1.6) uzupełnione warunkiem (1.9)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

nazywa się ***zagadnieniem początkowym*** *(****zagadnieniem Cauchy'ego****).*

1.5 DEFINICJA. ***Rozwiązaniem zagadnienia początkowego*** *(1.10) na przedziale $[t_0, t_0 + a)$ nazywamy funkcję $\varphi(t)$ klasy C^1 na tym przedziale, spełniającą równanie (1.6) na przedziale $(t_0, t_0 + a)$ oraz warunek początkowy (1.9).*

Pokażemy teraz jak warunek początkowy formułuje się dla równania rzędu n. Jak pamiętamy, równanie rzędu n

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

sprowadziliśmy do równania pierwszego rzędu dla funkcji

$$y(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

gdzie $x_i(t) = x^{(i)}(t)$. Wobec tego, warunek początkowy dla funkcji y

$$y(t_0) = X,$$

gdzie X jest stałym wektorem, wyraża się układem równości

$$x(t_0) = X_0,\ \dot{x}(t_0) = X_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = X_{n-1},$$

przy czym X_i oznaczają składowe wektora X.

Prowadzi to do następującej definicji zagadnienia początkowego dla równania rzędu n.

1.6 DEFINICJA. *Jeśli dane jest równanie różniczkowe rzędu n, postaci (1.2) w przestrzeni $\mathbb{R}^m$, to* ***zagadnienie początkowe*** *(****zagadnienie Cauchy'ego****) dla tego równania przyjmuje formę*

$$\begin{aligned} &x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}), \\ &x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = x_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

gdzie $x_0, \ldots, x_{n-1}$ są wektorami m-wymiarowymi.

1.7 Przykład. Ze zbiornika o dowolnym kształcie wypływa ciecz przez otwór w dnie. Należy znaleźć prawo opisujące wysokość poziomu cieczy w zbiorniku, jeśli znane jest pole otworu S oraz pole przekroju zbiornika w funkcji wysokości $F(h)$ (oczywiście zakładamy, że $F(h) \neq 0$ dla każdego h).

Aby rozwiązać do zadanie musimy skorzystać ze znanego faktu z fizyki, że słup cieczy o wysokości h wypływa przez otwór z szybkością

$$v = k\sqrt{2gh},$$

gdzie g jest stała przyspieszenia ziemskiego, a k jest współczynnikiem proporcjonalności. Wtedy ilość cieczy jaka wypływa ze zbiornika w ciągu czasy Δt wynosi $k\sqrt{2gh}S\Delta t$. W tym czasie poziom cieczy obniży się o $-\Delta h$, więc

$$k\sqrt{2gh}S\Delta t = -F(h)\Delta h.$$

Po przejściu do granicy otrzymujemy równanie

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2g}S\frac{\sqrt{h}}{F(h)}.$$

Dla tego równania można sformułować kilka różnych zagadnień Cauchy'ego:

a. w chwili początkowej wysokość cieczy wynosi H, wtedy warunek ma postać $h(0) = H$;

b. po t_0 sekundach zbiornik opróżnił się, wtedy warunek ma postać $h(t_0) = 0$.

1.3 Interpretacja geometryczna

W celu zrozumienia geometrycznego sensu rozwiązać równania (1.6) rozpatrzmy to równanie w przypadku skalarnym $(m = 1)$. Niech funkcja $x(t)$ będzie rozwiązaniem tego równania. Narysujmy wykres tej funkcji na płaszczyźnie (t, x) i rozważmy wektory styczne do tego wykresu. Jak wiadomo, wektor styczny do wykresu funkcji $x(t)$ ma postać $[1, \dot{x}(t)] = [1, f(t, x)]$. Zatem równanie (1.6) można odczytać następująco. Na płaszczyźnie (t, x) zadane jest pole kierunków $[1, f(t, x)]$. Należy znaleźć krzywe będące wykresami funkcji $x(t)$ i mające tę własność, że w każdym punkcie (t, x) leżącym na jednej z tych krzywych wektor styczny do niej jest równy $[1, f(t, x)]$. Oczywiście tę interpretację można przenieść na przypadek wektorowego równania (1.6), zastępując płaszczyznę (t, x) przestrzenią $\mathbb{R}^{m+1}$.

1.8 Przykład. Ten przykład pokazuje, że rozwiązując równanie nie zawsze możemy znaleźć wszystkie krzywe całkowe styczne do danego pola wektorowego. Rozważmy równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Łatwo można odgadnąć funkcję $y(x)$, która jest rozwiązaniem tego równania

$$y = \ln|x| + c,$$

gdzie c jest dowolną stałą. Różne wartości stałej c wyznaczają krzywe całkowe tego równania. Zapiszmy to równanie w postaci

$$\frac{dx}{dy} = x,$$

czyli jako równanie na funkcję $x(y)$. Rozwiązaniem jest teraz funkcja

$$\ln|x| = y + c, \quad \text{czyli } x = c_1 e^y.$$

Może się wydawać, że obie rodziny krzywych całkowych są identyczne. Nie jest to prawda – druga rodzina jest bogatsza o krzywą całkową $x \equiv 0$ odpowiadającą stałej $c_1 = 0$.

1.9 Przykład. Okazuje się, że poszukiwanie krzywych całkowych jako krzywych stycznych pola wektorowego może dać lepszy obraz rozwiązania równania różniczkowego, niż znaleziony analityczny wzór na rozwiązanie. Rozważmy równanie

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x}{y}$$

w obszarze $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ y \neq 0\}$ i znajdźmy jego krzywe całkowe.

Zaczniemy od znalezienia izoklin, tj. krzywych stałego nachylenia krzywych całkowych, albo stałego nachylenia odpowiadającego im pola wektorowego. Linie te wyznaczyć można z równania $x + \frac{x}{y} = k$, co po przekształceniach daje równanie

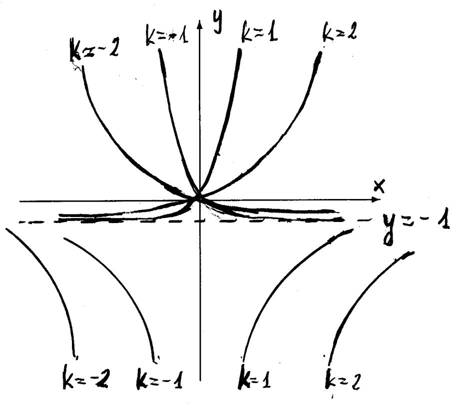
$$y + 1 = \frac{k}{k - x}.$$

Jest to równanie hiperbol (patrz rys. 1.1).

Następnie znajdziemy punkty ekstremalne krzywych całkowych. Jeśli poszukujemy punktów ekstremalnych krzywych całkowych jako funkcji $y(x)$, to są one rozwiązaniami równania $x + \frac{x}{y} = 0$. Rozwiązanie tego równania daje nam dwie proste, na których położone są punkty ekstremum $x = 0$ oraz $y = -1$. Jeśli poszukujemy punktów ekstremalnych krzywych całkowych jako funkcji $x(y)$, to są one rozwiązaniami równania $\frac{y}{xy+x} = 0$. Z rozwiązania tego równania otrzymujemy prostą $y = 0$, na której położone są punkty ekstremalne.

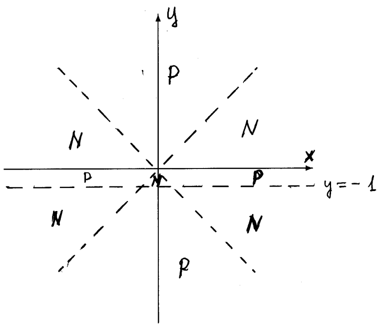
Zbadamy teraz obszary wypukłości oraz wklęsłości krzywych całkowych. W tym celu obliczymy drugą pochodną

$$\begin{aligned} y'' = & y^{-2}\Big(\Big(y + 1 + x\frac{xy + x}{y}\Big)y - (xy + x)^2 y^{-1}\Big) = \\ & y^{-3}\Big(y^3 + y^2 + xy(xy + x) - (xy + x)^2\Big) = \\ & y^{-3}\Big(y^2(y + 1) + x^2 y(y + 1) - x^2(y + 1)^2\Big) = \\ & y^{-3}(y + 1)(y^2 - x^2) = y^{-3}(y + 1)(y - x)(y + x). \end{aligned}$$



Rysunek 1.1: Izokliny dla równania z przykładu 1.9

Z postaci drugiej pochodnej łatwo można wyznaczyć obszary wypukłości i wklęsłości krzywych całkowych. Na rys. 1.2 zaznaczono te obszary odpowiednio literami P (dla obszarów wypukłości $y'' > 0$) oraz N (dla obszarów wklęsłości $y'' < 0$).



Rysunek 1.2: Obszary wypukłości i wklęsłości dla równania z przykładu 1.9

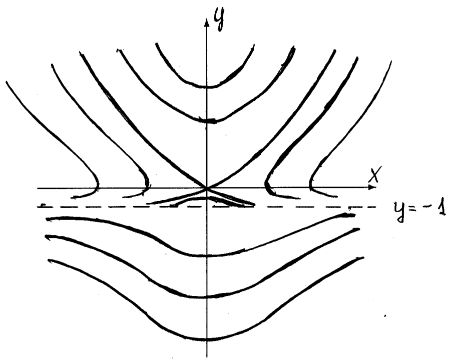
Łącząc informacje o izoklinach z informacją o położeniu punktów ekstremalnych oraz informacją o obszarach wypukłości i wklęsłości można już łatwo naszkicować przebieg krzywych całkowych (patrz rys. 1.3).

W następnym rozdziale zobaczymy, że nasze wyjściowe równanie

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x}{y}$$

jest równaniem, dla którego można znaleźć rozwiązanie analityczne. Rozwiązanie to dane jest wzorem

$$y - \ln|y + 1| = \frac{1}{2}x^2 + c$$



Rysunek 1.3: Krzywe całkowe dla równania z przykładu 1.9

dla dowolnej stałej c. Z postaci rozwiązania analitycznego nie jest bynajmniej łatwo odtworzyć skomplikowaną postać krzywych całkowych uwidocznionych na rys. 1.3. Dodatkowo z rysunku widać, że krzywą całkowa jest też prosta $y \equiv -1$, co nie wynika z postaci rozwiązania analitycznego (aby znaleźć to rozwiązanie należy rozpatrzeć równanie $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{xy+x}$ podobnie jak to było w przykładzie 1.8).