Rozdział 3

Podstawowe twierdzenia

3.1 Istnienie rozwiązań lokalnych

Rozpocznijmy od odpowiedzi na ogólne pytanie: jakie warunki musi spełniać równanie różniczkowe zwyczajne, aby istniało jego rozwiązanie i kiedy rozwiązanie to jest jednoznaczne?

Rozpatrywać będziemy równanie

$$\dot{x} = f(t, x)$$

w przestrzeni wektorowej. Przypomnijmy, że $x = x(t) \in \mathbb{R}^m$, a f jest funkcją działającą z podzbioru $\mathbb{R}^{m+1}$ do $\mathbb{R}^m$.

3.1 TWIERDZENIE. (Picarda-Lindelöfa) *Niech funkcja $f(t, x)\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ będzie ciągła w zbiorze $Q = \{(t, x)\colon\ |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\}$. Zakładamy ponadto, że $\sup_{(t,x)\in Q} |f(t, x)| = M$ oraz f spełnia w zbiorze Q warunek Lipschitza względem zmiennej x*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|,$$

dla pewnej stałej L. Wtedy zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie na przedziale $|t - t_0| \leqslant \alpha$, $\alpha < \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L})$.

Dowód. Rozważmy podzbiór przestrzeni metrycznej funkcji ciągłych

$$E = \{x(t)\colon\ x(t_0) = x_0, |x(t) - x_0| \leqslant b, |t - t_0| \leqslant \alpha\}.$$

E jako domknięty podzbiór przestrzeni funkcji ciągłych jest przestrzenią metryczną zupełną. W przestrzeni E rozważamy odwzorowanie

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big) ds.$$

Jeśli istnieje punkt stały tego odwzorowania

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds, \tag{3.2}$$

to spełnia on równanie (3.1). Z ciągłości funkcji f i własności całki wynika bowiem, że funkcja $x(t)$ dana równaniem (3.2) jest funkcją klasy C^1. Po zróżniczkowaniu (3.2) otrzymujemy równanie (3.1) (spełnienie warunku początkowego wynika z definicji całki). Wystarczy więc wykazać, że odwzorowanie F ma punkt stały w przestrzeni E. W tym celu pokażemy najpierw, że F odwzorowuje przestrzeń E w siebie.

Ponieważ

$$\begin{aligned}\sup_{|t-t_0|\leqslant\alpha} |F(x)(t) - x_0| &= \sup_{|t-t_0|\leqslant\alpha} \left|\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds\right| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{|t-t_0|\leqslant\alpha} \int_{t_0}^{t} \sup_{s\in[t_0,t]} \big|f\big(s, x(s)\big)\big|ds \leqslant M\alpha \leqslant b,\end{aligned}$$

więc

$$|F(x)(t) - x_0| \leqslant b,$$

czyli F odwzorowuje przestrzeń E w siebie.

Pokażemy teraz, że F jest odwzorowaniem zwężającym. W wyniku prostego rachunku dostajemy

$$\begin{aligned}\sup_{|t-t_0|\leqslant\alpha} |F(x_1)(t) - F(x_2)(t)| &\leqslant \sup_{|t-t_0|\leqslant\alpha} \int_{t_0}^{t} \big|f\big(s, x_1(s)\big) - f\big(s, x_2(s)\big)\big|ds \leqslant \\ &\leqslant \sup_{|t-t_0|\leqslant\alpha} \int_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_2(s)|ds \leqslant \\ &\leqslant \sup_{|t-t_0|\leqslant\alpha} L \int_{t_0}^{t} \sup_{|s-t_0|\leqslant\alpha} |x_1(s) - x_2(s)|ds \leqslant \\ &\leqslant L\alpha \sup_{|t-t_0|\leqslant\alpha} |x_1(t) - x_2(t)|,\end{aligned}$$

czyli dla $\alpha L < 1$ odwzorowanie F jest zwężające. Z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika, że F ma punkt stały będący granicą ciągu $x^{n+1}(t) = F(x^n)(t)$, gdzie $x^0(t) = x_0$ i jest to jedyny punkt stały odwzorowania F w E. Dowodzi to istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (3.1). ■

Istnienie rozwiązań można udowodnić przy nieco słabszych założeniach. Traci się jednak wtedy własność jednoznaczności rozwiązania.

3.2 TWIERDZENIE. (Peano) *Niech funkcja* $f(t,x) : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ *będzie ciągła w zbiorze* $Q = \{(t,x)\colon\ t \in [t_0, t_0 + a],\ |x - x_0| \leqslant b\}$. *Zakładamy także, że* $\sup_{(t,x)\in Q} |f(t,x)| = M$. *Wtedy zagadnienie Cauchy'ego*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t,x),\\ x(t_0) &= x_0\end{aligned} \tag{3.3}$$

ma rozwiązanie na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$, *gdzie* $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$.

Dowód. W dowodzie wykorzystamy **metodę łamanych Eulera**. W tym celu przedział $[t_0, t_0 + \alpha]$ dzielimy na n_1 mniejszych przedziałów o końcach $t_i^{(1)}$

$$t_0 = t_0^{(1)} < t_1^{(1)} < \cdots < t_{n_1}^{(1)} = t_0 + \alpha$$

oraz konstruujemy funkcję kawałkami liniową przybliżającą rozwiązanie równania (3.3) (łamaną Eulera)

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t_0) = x_0, \\ &\varphi_1(t) = \varphi_1(t_i^{(1)}) + f\big(t_i^{(1)}, \varphi_1(t_i^{(1)})\big)(t - t_i^{(1)}), \quad \text{dla } t \in (t_i^{(1)}, t_{i+1}^{(1)}]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Jak łatwo zauważyć, funkcja ta powstaje przez połączenie odcinkami punktów $\big(t_i^{(1)}, \varphi_1(t_i^{(1)})\big)$. Funkcja $\varphi_1(t)$ jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania zagadnienia (3.3). Funkcję φ_k będącą k-tym przybliżeniem, otrzymujemy dzieląc przedział $[t_0, t_0 + \alpha]$ na n_k części $t_0 = t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < \cdots < t_{n_k}^{(k)} = t_0 + \alpha$ i definiując φ_k analogicznie do φ_1, jako funkcję kawałkami liniową przechodzącą przez punkty $\big(t_i^{(k)}, \varphi_k(t_i^{(k)})\big)$.

Funkcje φ_k mają następujące własności:

1) są ciągłe na przedziale $[t_0, t_0+\alpha]$ i różniczkowalne wszędzie poza punktami $t_i^{(k)}$. Wynika to z faktu, że φ_k są funkcjami kawałkami liniowymi.

2) są wspólnie ograniczone na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$, mamy bowiem oszacowanie
$$|\varphi_k(t)| \leqslant |x_0| + M\alpha,$$
które wynika z definicji funkcji φ_k.

3) są jednakowo ciągłe, bo jeśli $t', t'' \in (t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)}]$, to z definicji funkcji $\varphi_k(t)$ dostajemy oszacowanie
$$|\varphi_k(t'') - \varphi_k(t')| \leqslant M|t'' - t'|.$$
Oszacowanie to jest niezależne od k. Jak łatwo zauważyć, można je rozszerzyć z zachowaniem tej samej stałej M na przypadek, gdy $t' \in (t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)}]$ a $t'' \in (t_j^{(k)}, t_{j+1}^{(k)}]$.

Z własności tych wynika, że ciąg φ_k spełnia założenia twierdzenia Arzeli-Ascoliego. Istnieje zatem podciąg $\varphi_{k_j}(t)$ jednostajnie zbieżny do funkcji $\varphi(t)$ na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Wystarczy teraz udowodnić, że $\varphi(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.3). Ponieważ wszystkie funkcje $\varphi_k(t)$ spełniały warunek $\varphi_k(t_0) = x_0$, więc także $\varphi(t)$ spełnia warunek początkowy. Należy pokazać, że funkcja $\varphi(t)$ spełnia także równanie różniczkowe, czyli

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = f\big(t, \varphi(t)\big) \quad \text{dla} \;\; t \in (t_0, t_0 + \alpha). \tag{3.5}$$

Aby udowodnić to przejście graniczne, dokonajmy następującego oszacowania (wybieramy h mniejsze od pewnego h_0, tak aby odpowiednie funkcje były dobrze określone)

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} - f\big(t,\varphi(t)\big)\right| = \\
&\left|\Big(f\big(t,\varphi_{k_j}(t)\big) - f\big(t,\varphi(t)\big)\Big) + \frac{\varphi(t+h)-\varphi_{k_j}(t+h)}{h} - \frac{\varphi(t)-\varphi_{k_j}(t)}{h} + \right. \\
&\qquad\qquad\left. \frac{\varphi_{k_j}(t+h)-\varphi_{k_j}(t)}{h} - f\big(t,\varphi_{k_j}(t)\big)\right| \leqslant \\
&\left|f\big(t,\varphi_{k_j}(t)\big) - f\big(t,\varphi(t)\big)\right| + \left|\frac{\varphi(t+h)-\varphi_{k_j}(t+h)}{h}\right| + \left|\frac{\varphi(t)-\varphi_{k_j}(t)}{h}\right| + \\
&\qquad\qquad\left|\frac{\varphi_{k_j}(t+h)-\varphi_{k_j}(t)}{h} - f\big(t,\varphi_{k_j}(t)\big)\right|.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Drugi i trzeci wyraz po prawej stronie nierówności (3.6) szacujemy z jednostajnej zbieżności ciągu φ_{k_j}. Jeśli weźmiemy k_j dostatecznie duże, to

$$\sup_t |\varphi_{k_j}(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon h}{4}\,. \tag{3.7}$$

Z oszacowania (3.7) oraz jednostajnej ciągłości funkcji $f(t,x)$ w domkniętym otoczeniu punktu $(t,\varphi_{k_j}(t))$ wynika oszacowanie pierwszego wyrazu nierówności (3.6)

$$|f(t,\varphi_{k_j}(t)) - f(t,\varphi(t))| < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Aby oszacować ostatni składnik nierówności (3.6), załóżmy, że $t \in (t_i^{(k_j)}, t_{i+1}^{(k_j)}]$ oraz $t+h \in (t_n^{(k_j)}, t_{n+1}^{(k_j)}]$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\varphi_{k_j}(t+h) - \varphi_{k_j}(t) - hf\big(t,\varphi_{k_j}(t)\big) &= f\big(t_i^{(k_j)},\varphi_{k_j}(t_i^{(k_j)})\big)\big(t_{i+1}^{(k_j)} - t\big) + \cdots \\
&\quad + f\big(t_n^{(k_j)},\varphi_{k_j}(t_n^{(k_j)})\big)\big(t+h-t_n^{(k_j)}\big) - hf\big(t,\varphi_{k_j}(t)\big) = \\
= \Big(f\big(t_i^{(k_j)},\varphi_{k_j}(t_i^{(k_j)})\big) - f\big(t,\varphi_{k_j}(t)\big)\Big)\big(t_{i+1}^{(k_j)} - t\big) + \cdots \\
&\quad + \Big(f\big(t_n^{(k_j)},\varphi_{k_j}(t_n^{(k_j)})\big) - f\big(t,\varphi_{k_j}(t)\big)\Big)\big(t+h-t_n^{(k_j)}\big).
\end{aligned}$$

Zauważmy ponadto, że jeśli h jest dostatecznie małe, to

$$\big|f\big(t+\theta h,\varphi_{k_j}(t+\theta h)\big) - f\big(t,\varphi_{k_j}(t)\big)\big| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{dla} \quad \theta \in [0,1]. \tag{3.8}$$

Z oszacowania tego wynika, że

$$\big|\varphi_{k_j}(t+h) - \varphi_{k_j}(t) - hf\big(t,\varphi_{k_j}(t)\big)\big| < \frac{\varepsilon h}{4}\,,$$

czyli

$$\left| \frac{\varphi_{k_j}(t+h) - \varphi_{k_j}(t)}{h} - f\big(t, \varphi_{k_j}(t)\big) \right| < \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{3.9}$$

Łącząc te oszacowania widzimy, że dla każdego ε i każdego h mniejszego od pewnego h_0 następujące oszacowanie jest prawdziwe dla każdego $t \in (t_0, t_0 + \alpha)$

$$\left| \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} - f\big(t, \varphi(t)\big) \right| < \varepsilon. \tag{3.10}$$

Jest to dowód przejścia granicznego (3.5). ■

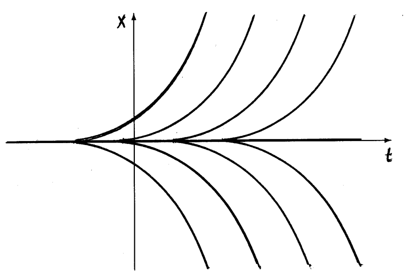
Jak pokazuje poniższy przykład, założenie warunku Lipschitza jest istotne dla uzyskania jednoznaczności rozwiązania. Bez tego założenia może istnieć wiele rozwiązań tego samego zagadnienia początkowego.

3.3 Przykład. Rozważmy równanie

$$\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}.$$

Równanie to spełnia warunki tw. 3.2, ale nie spełnia założeń tw. 3.1. Dokładniej: założenia tw. 3.1 są spełnione wszędzie poza prostą $x = 0$ i nie są spełnione na tej prostej. W efekcie przez każdy punkty $(t_0, 0)$ przechodzą trzy krzywe całkowe (patrz rys. 3.1):

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= 0,\\
\varphi_2(t) &= \Big(\frac{2}{3}(t - t_0)\Big)^{3/2},\\
\varphi_3(t) &= -\Big(\frac{2}{3}(t - t_0)\Big)^{3/2}.
\end{aligned}$$



Rysunek 3.1: Różne rozwiązania równania z przykładu 3.3

3.4 Przykład. Metoda łamanych Eulera może być także prostą metodą znajdowania przybliżonych rozwiązań równań różniczkowych. Jeśli przyjmiemy, że poszczególne chwile czasowe są jednakowo odległe, tzn.

$$t_0,\ t_1 = t_0 + \Delta t,\ t_2 = t_1 + \Delta t = t_0 + 2\Delta t, \dots, t_i = t_0 + i\Delta t,$$

to otrzymamy równanie różnicowe

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i)\Delta t, \tag{3.11}$$

które można służyć do obliczania przybliżonego rozwiązania.

Weźmy jako przykład równanie $\dot{x} = x$. Odpowiadające mu równanie różnicowe (3.11) można łatwo rozwiązać. Ma ono bowiem postać

$$x_{i+1} = x_i + x_i\Delta t = (1 + \Delta t)x_i. \tag{3.12}$$

Stąd

$$x_i = (1 + \Delta t)^i x_0. \tag{3.13}$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego $\dot{x} = x$ jest funkcja $x(t) = x_0 e^t$. Jeśli przyjmiemy $t = T$ oraz i takie, że $i\Delta t = T$, to zauważymy, że $(1 + \Delta t)^i = (1 + \frac{i\Delta t}{i})^i = (1 + \frac{T}{i})^i$, co jest dobrym przybliżeniem e^T dla dużych i.

3.2 Przedłużalność rozwiązań

Jeśli $\varphi(t)$ jest rozwiązaniem lokalnym na pewnym przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$, to przyjmując $t_1 = t_0 + \alpha$ i $\varphi(t_1)$ za nowy warunek początkowy, można rozwiązać rozważane równanie na przedziale $[t_1, t_1 + \alpha_1]$ itd. Analogicznie możemy konstruować przedłużenia w lewo, tj. na przedział $[t_0 - \alpha, t_0]$ itd. Powstaje pytanie, jak daleko można to postępowanie kontynuować, czyli jaki może być maksymalny przedział istnienia rozwiązania.

3.5 DEFINICJA. *Rozwiązanie $\varphi(t)$ określone na przedziale $J \subset \mathbb{R}$ nazywa się **rozwiązaniem wysyconym**, jeśli nie istnieje przedłużenie tego rozwiązania na przedział J_1 taki, że J jest jego podzbiorem właściwym. Przedział J nazywa się wtedy **maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania** $\varphi(t)$.*

Zajmiemy się teraz zachowaniem rozwiązania wysyconego $\varphi(t)$ na brzegu maksymalnego przedziału istnienia rozwiązania. Rozpocznijmy od udowodnienia pomocniczego lematu.

3.6 LEMAT. *Niech $\varphi(t)$ będzie rozwiązaniem równania*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.14}$$

w przedziale (a_-, a_+), takim że $(t, \varphi(t)) \in Q$ dla każdego $t \in (a_-, a_+)$, gdzie Q jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^{m+1}$. Jeśli funkcja $f(t,x)$ jest ciągła i ograniczona na Q, to istnieją granice $\varphi(a_- + 0)$ i $\varphi(a_+ - 0)$. Jeśli funkcja $f(t,x)$ jest ciągła w punkcie $(a_-, \varphi(a_- + 0))$ lub $(a_+, \varphi(a_+ - 0))$, to rozwiązanie $\varphi(t)$ może być przedłużone na przedział $[a_-, a_+)$ lub $(a_-, a_+]$.

Dowód. Funkcja $\varphi(t)$ spełnia całkową wersję równania (3.14)

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \varphi(s)\big) ds \tag{3.15}$$

dla $a_- < t_0 \leqslant t < a_+$. Ponieważ $f(t,x)$ jest ograniczona na zbiorze Q, więc mamy oszacowanie

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant \Big| \int_{t_1}^{t_2} f\big(s, \varphi(s)\big) ds \Big| \leqslant M(t_2 - t_1),\ t_1, t_2 \in (a_-, a_+),\ t_1 \leqslant t_2,$$

gdzie $M = \sup_{(t,x) \in Q} |f(t,x)|$. Jeśli $t_1, t_2 \to a_- + 0$, to $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) \to 0$. Wynika stąd istnienie granicy $\varphi(a_- + 0)$ (dowód dla granicy $\varphi(a_+ - 0)$ jest podobny).

Jeśli funkcja $f(t,x)$ jest ciągła aż do punktu $(a_+, \varphi(a_+ - 0))$, to $\varphi(a_+)$ jest zdefiniowana wzorem (patrz (3.15))

$$\varphi(a_+) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{a_+} f\big(s, \varphi(s)\big) ds.$$

Analogicznie dowodzi się przedłużalności na przedział $[a_-, a_+)$. ■

3.7 TWIERDZENIE. *Niech $f(t,x)$ będzie funkcją ciągłą w zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^{m+1}$ i niech $\varphi(t)$ będzie rozwiązaniem równania (3.14) w pewnym przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$, takim że $(t, \varphi(t)) \in Q$ dla każdego $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Jeśli $f(t,x)$ jest ciągła na Q, to funkcja $\varphi(t)$ może być przedłużona, jako rozwiązanie równania (3.14), do rozwiązania wysyconego z maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania (ω_-, ω_+). Jeśli ciąg punktów $\{t_n\}$ jest zbieżny do jednego z krańców przedziału (ω_-, ω_+), to ciąg $\{(t_n, \varphi(t_n))\}$ jest zbieżny do brzegu zbioru Q, jeśli zbiór Q jest ograniczony. Jeśli zbiór Q jest nieograniczony, to ciąg punktów $(t_n, \varphi(t_n))$ może być nieograniczony dla $t_n \to \omega_+$ lub $t_n \to \omega_-$.*

Dowód. Niech $U \subset V \subset \overline{V} \subset Q$, gdzie U jest zbiorem zwartym a V jest zbiorem otwartym ograniczonym. Jeśli $(t_0, x_0) \in U$, to rozwiązanie $\varphi(t)$ zaczynające się w punkcie (t_0, x_0) można przedłużyć na przedział $[t_0, t_1]$, taki że $(t_1, \varphi(t_1)) \notin U$. Wynika to z tw. 3.2 z $a = b = \operatorname{dist}(\overline{V}, \partial Q)$ i $M = \sup_{(t,x) \in V} |f(t,x)|$. Z twierdzenia tego wynika, że rozwiązanie $\varphi(t)$ istnieje na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$, gdzie α zależy tylko od a, b i M (czyli od zbioru V). Jeśli $(t_0 + \alpha, \varphi(t_0 + \alpha)) \in U$, to przyjmując ten punkt za nową wartość początkową, przedłużamy rozwiązanie na przedział $[t_0, t_0+2\alpha]$ itd. Ponieważ zbiór U jest zwarty, więc po skończonej liczbie kroków otrzymamy przedłużenie na przedział $[t_0, t_1]$, gdzie $(t_1, \varphi(t_1)) \notin U$.

Zbudujmy teraz pokrycie zbioru Q ciągiem wstępującym zbiorów Q_n otwartych, ograniczonych oraz takich że $\overline{Q_n} \subset Q_{n+1}$. Z poprzedniej części dowodu wynika, że istnieje ciąg $\{t_i\}$ i ciąg wskaźników $\{n_i\}$, takie że $(t_i, \varphi(t_i)) \in Q_{n_i}$ i $(t_i, \varphi(t_i)) \notin Q_{n_{i-1}}$. Ciąg $\{t_i\}$ jest monotoniczny, ma więc granicę. Jeśli granicą tą jest $+\infty$, to kończy to dowód. Załóżmy więc, że ciąg t_i jest ograniczony z góry. Wtedy istnieje skończona granica

$$\omega_+ = \lim_{i\to\infty} t_i.$$

Jeśli ciąg $(t_i, \varphi(t_i))$ jest nieograniczony, to daje to część tezy twierdzenia.

Jeśli ciąg $(t_i, \varphi(t_i))$ jest ograniczony, to zawarty jest on w pewnym zbiorze zwartym U. Na zbiorze U funkcja f jest ograniczona i można zastosować lemat 3.6. Z lematu tego wynika, że funkcja $\varphi(t)$ ma granicę $\varphi(\omega_+ - 0)$. Punkt $(\omega_+, \varphi(\omega_+ - 0))$ jest punktem brzegowym zbioru Q. Gdyby był to punkt wewnętrzny, to na podstawie lematu 3.6 $(\omega_+, \varphi(\omega_+))$ byłoby punktem należącym do pewnego Q_k, $\overline{Q_k} \subset Q$. Można byłoby więc przedłużyć $\varphi(t)$ na przedział większy niż $[t_0, \omega_+)$, co przeczyłoby maksymalności ω_+. Podobnie można postąpić z przedłużeniem w lewo do punktu ω_-.

■

3.3 Zależność rozwiązania od danych początkowych i parametrów

W tym podrozdziale zbadamy zależność rozwiązanie od danych początkowych oraz dodatkowych parametrów. Zależność od parametrów oznacza, że prawa strona równania zależy od trzech zmiennych $f = f(t, x, \lambda)$, gdzie t jest zmienną niezależną, x zmienną zależną, a λ jest dodatkowym parametrem. Oznacza to rozważanie zagadnienia początkowego

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, \lambda), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.16), to chcąc badać zależność tego rozwiązania od warunków początkowych (t_0, x_0) i parametru λ, będziemy traktowali to rozwiązanie jako funkcję wszystkich tych zmiennych, tj. $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$.

Okazuje się, że tę ogólną sytuację można znacznie uprościć. Dokonując zamiany zmiennych

$$t \to t - t_0, \quad x \to x - x_0,$$

możemy zagadnienie początkowe (3.16) sprowadzić do postaci

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t - t_0, x - x_0, \lambda), \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

W tym zapisie t_0 i x_0 są dodatkowymi parametrami funkcji f. Oznacza to, że zależność od warunków początkowych można sprowadzić do zależności prawej strony równania od parametru. Możliwa jest także operacja odwrotna. Możemy potraktować λ jako zmienną zależną, uzupełniając zagadnienie (3.16) równaniem

$$\dot{\lambda} = 0,$$

z warunkiem początkowym

$$\lambda(t_0) = \lambda_0,$$

gdzie λ_0 jest ustaloną wartością parametru λ (wybraną dowolnie). Przyjmując

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},$$

otrzymujemy zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} \dot{y} &= g(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

sprowadzające zależność od parametru do zależności od warunku początkowego.

W dalszej części tego podrozdziału rozpatrując zależność od warunku początkowego będziemy zakładali, że t_0 jest ustalone a zmienia się tylko x_0, czyli wartość rozwiązania w chwili początkowej. To ograniczenie służy jedynie uproszczeniu zapisu i nie jest istotne. Gładkość rozwiązania względem chwili początkowej t_0 jest bowiem taka sama jak gładkość rozwiązania względem t, co wynika natychmiast z zamiany zmiennych $t \to t - t_0$.

Rozważania o zależności rozwiązania od danych początkowych i parametrów poprzedzimy dwoma twierdzeniami dotyczącymi funkcji wielu zmiennych. Mimo że twierdzenia te należą do kursu analizy, przytaczamy je tutaj w sformułowaniu, które będzie wygodne do bezpośredniego zastosowania w dowodach tego podrozdziału. Dowody tych twierdzeń (lub twierdzeń podobnych) są podawane na wykładzie Analizy II.

3.8 TWIERDZENIE. (Twierdzenie o skończonych przyrostach) *Na zwartym odcinku* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *dane są dwie funkcje* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *oraz* $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. *Zakładamy, że funkcje* f *i* g *są różniczkowalne w każdym punkcie odcinka* (a, b) *oraz spełnione jest szacowanie*

$$\|\dot{f}(t)\| \leqslant \dot{g}(t), \quad \textit{dla } t \in (a, b).$$

Wtedy

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a).$$

3.9 TWIERDZENIE. *Niech $J \subset \mathbb{R}$ będzie odcinkiem na prostej (nie koniecznie ograniczonym) a $A \subset \mathbb{R}^n$ dowolnym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$.*

Jeśli funkcja $\psi\colon\ J \times A \to \mathbb{R}^k$ jest ciągłą funkcją argumentu t, dla $t \in J$, przy ustalonym $x \in A$ oraz jest ciągła po x, dla $x \in A$, jednostajnie po $t \in J$, to ψ jest funkcją ciągłą argumentów $(t, x) \in J \times A$.

Jeśli funkcja $\psi\colon\ J \times A \to \mathbb{R}^k$ jest funkcją ciągłą argumentów $(t, x) \in J \times A$ oraz odcinek J jest zwarty, to $\psi(t, x)$ jest funkcją ciągłą argumentu x jednostajnie po $t \in J$.

Po tej powtórce z analizy przejdziemy do zasadniczego tematu, tj. zależności rozwiązań od warunków początkowych i parametrów. Zasadnicze twierdzenia poprzedzimy kilkoma lematami. Ich celem jest wydzielenie z dowodów pewnych faktów, które opisują ogólne własności rozwiązań równań różniczkowych.

3.10 TWIERDZENIE. (Lemat Gronwalla) *Niech na przedziale $[0, T]$ dane będą funkcje rzeczywiste $a(t)$, $b(t)$, $u(t)$, ciągłe na przedziale $(0, T)$, oraz niech funkcja $u(t)$ spełnia nierówność całkową*

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t b(s)u(s)ds, \quad \text{dla } t \in [0, T], \tag{3.18}$$

dla $b(t) \geqslant 0$. Wtedy zachodzi oszacowanie

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t a(s)b(s) \exp\Big(\int_s^t b(\tau)d\tau\Big)ds. \tag{3.19}$$

Jeśli dodatkowo funkcja $a(t)$ jest niemalejąca ($a(s) \leqslant a(t)$ dla $s \leqslant t$), to otrzymujemy prostsze oszacowanie

$$u(t) \leqslant a(t) \exp\Big(\int_0^t b(\tau)d\tau\Big). \tag{3.20}$$

Dowód. Niech $\phi(t) = \exp\big(-\int_0^t b(s)ds\big)$. Z prostych rachunków i nierówności (3.18) mamy

$$\frac{d}{dt}\phi(t)\int_0^t b(s)u(s)ds = b(t)\phi(t)\Big(u(t) - \int_0^t b(s)u(s)ds\Big) \leqslant a(t)b(t)\phi(t).$$

Całkując tę nierówność w przedziale $[0, t]$ dostajemy

$$\phi(t)\int_0^t b(s)u(s)ds \leqslant \int_0^t a(s)b(s)\phi(s)ds. \tag{3.21}$$

Dzieląc te nierówność przez $\phi(t)$ oraz dodając do obu stron $a(t)$ dostajemy nierówność (3.19).

Aby otrzymać nierówność (3.20) wykorzystamy monotoniczność funkcji $a(t)$ przy oszacowaniu prawej strony (3.21)

$$\int_0^t a(s)b(s)\frac{\phi(s)}{\phi(t)}ds \leqslant a(t)\int_0^t b(s)\exp\Big(\int_s^t b(\tau)d\tau\Big)ds = \\ -a(t)\int_0^t \frac{d}{ds}\exp\Big(\int_s^t b(\tau)d\tau\Big)ds = a(t)\Big(\exp\Big(\int_0^t b(s)ds\Big)-1\Big).$$

Nierówność (3.21) przyjmuje więc dla niemalejącej funkcji $a(t)$ postać

$$\int_0^t b(s)u(s)ds \leqslant a(t)\Big(\exp\Big(\int_0^t b(s)ds\Big)-1\Big).$$

Po dodaniu $a(t)$ do obu stron tej nierówności dostajemy nierówność (3.20). ■

Prostym wnioskiem z powyższego twierdzenia jest nierówność, którą będziemy wielokrotnie wykorzystywać w dalszych dowodach.

3.11 WNIOSEK. *Niech funkcja ciągła $u(t)$ spełnia nierówność całkową*

$$u(t) \leqslant \alpha + \int_0^t \big(\beta u(s)+\gamma\big)ds, \quad \text{dla } t\in[0,T], \tag{3.22}$$

gdzie α, β i γ są liczbami rzeczywistymi przy czym $\beta \geqslant 0$. Wtedy

$$u(t) \leqslant \alpha e^{\beta t} + \frac{\gamma}{\beta}\Big(e^{\beta t}-1\Big). \tag{3.23}$$

Udowodnimy teraz lemat, który stanowi zasadniczy krok w dowodzie ciągłej zależności rozwiązania od warunków początkowych oraz prawej strony równania.

3.12 LEMAT. *Rozważmy równanie*

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{3.24}$$

gdzie, podobnie jak w tw. 3.1, zakładamy, że funkcja $f(t,x):\ \mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^m$ jest ciągła w zbiorze $Q=\{(t,x):\ |t-t_0|\leqslant a, |x-x_0|\leqslant b\}$, ograniczona $\sup_{(t,x)\in Q}|f(t,x)| = M$ oraz spełnia w Q warunek Lipschitza względem zmiennej x ze stałą L.

Niech $\varphi_1(t)$ będzie rozwiązaniem równania (3.24) z warunkiem początkowym $\varphi_1(t_0)=x_1$, które istnieje na odcinku $J\subset[t_0-a,t_0+a]$, zawierającym w swoim wnętrzu punkt t_0, oraz spełniające warunek $(t,\varphi(t))\in Q$, dla $t\in J$.

Niech funkcja $\varphi_2(t)$ będzie funkcją klasy C^1 na odcinku J, spełnia warunki $\varphi_2(t_0)=x_2$, $(t,\varphi_2(t))\in Q$ dla $t\in J$, oraz będzie bliska rozwiązaniu równania (3.24) w tym sensie, że zachodzi dla niej oszacowanie

$$\|\dot{\varphi}_2(t) - f(t,\varphi_2(t))\| \leqslant \varepsilon \tag{3.25}$$

dla pewnego $\varepsilon > 0$ *oraz każdego* $t \in J$.

Wtedy dla każdego $t \in J$ *zachodzi oszacowanie*

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| e^{L(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{L}\Big(e^{L(t-t_0)} - 1\Big). \tag{3.26}$$

Dowód. Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy $t_0 = 0$ (nie zmniejsza to ogólności dowodu, bo warunek taki można otrzymać przez odpowiednią transformacje zmiennej t). Korzystając z oszacowania (3.25) oraz faktu, że funkcja $\varphi_1(t)$ jest rozwiązaniem równania (3.24) możemy napisać

$$\|\dot\varphi_1(t) - \dot\varphi_2(t)\| \leqslant \varepsilon + \|f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))\|.$$

Ponieważ funkcja $f(t,x)$ spełnia warunek Lipschitza po zmiennej x, ostatnią nierówność można przepisać w postaci

$$\|\dot\varphi_1(t) - \dot\varphi_2(t)\| \leqslant \varepsilon + L\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$

Niech $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. Funkcja ta jest klasy C^1 na odcinku J, bo taka jest z założenia funkcja $\varphi_2(t)$, a dla funkcji $\varphi_1(t)$ wynika to z tw. 3.1. Z twierdzenia 3.8 dostajemy wtedy

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leqslant \int_0^t \big(\varepsilon + L\|\varphi(\tau)\|\big)d\tau.$$

Korzystając z prostego związku $\|\varphi(\tau)\| \leqslant \|\varphi(0)\| + \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|$ dostajemy oszacowanie

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leqslant \big(\varepsilon + L\|\varphi(0)\|\big)t + L\int_0^t \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\| d\tau.$$

Jeśli w ostatnim oszacowaniu oznaczymy $u(t) = \|\varphi(t) - \varphi(0)\| \geqslant 0$ oraz $k = \big(\varepsilon + L\|\varphi(0)\|\big) > 0$, to oszacowanie to przyjmie postać

$$u(t) \leqslant kt + L\int_0^t u(\tau)d\tau.$$

Jest to nierówność z wniosku 3.11. Z tego wniosku wynika oszacowanie

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leqslant \Big(\frac{\varepsilon}{L} + \|\varphi(0)\|\Big)\Big(e^{Lt} - 1\Big).$$

Z tej ostatniej nierówności otrzymujemy

$$\|\varphi(t)\| \leqslant \|\varphi(0)\| + \|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leqslant \|\varphi(0)\| e^{Lt} + \frac{\varepsilon}{L}\Big(e^{Lt} - 1\Big).$$

Korzystając z faktu, że $\varphi(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = x_1 - x_2$ dostajemy oszacowanie z tezy. ■

Przejdziemy teraz do dowodu twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązania od warunków początkowych i parametrów.

3.13 TWIERDZENIE. *Niech $f(t,x,\lambda)$ będzie ograniczona i ciągła dla $(t,x) \in J \times A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ i $\lambda \in G \subset \mathbb{R}^k$, gdzie zbiory $J \times A$ i G są otwarte i ograniczone. Zakładamy, że $t_0 \in J$ oraz funkcja f spełnia po zmiennej $x \in A$ warunek Lipschitza ze stałą L niezależną od $t \in J$ oraz $\lambda \in G$. Wtedy rozwiązanie $\varphi(t,x_0,\lambda_0)$ równania (3.16) zależy w sposób ciągły od punktu (x_0,λ_0).*

Dowód. Na podstawie uwag uczynionych na początku tego podrozdziału zajmiemy się wyłącznie zależnością rozwiązania od danych początkowych. Rozpatrywać więc będziemy równania w postaci (3.24).

Niech $\varphi(t,u_1)$ będzie rozwiązaniem równania (3.24) z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = u_1$, a $\varphi(t,u_2)$ rozwiązaniem z warunkiem $\varphi(t_0) = u_2$.

Z lematu 3.12 wynika oszacowanie

$$\|\varphi(t,u_1) - \varphi(t,u_2)\| \leqslant \|u_1 - u_2\| e^{L(t-t_0)}.$$

Niech $K = \sup_{t \in J} e^{L(t-t_0)}$ (założyliśmy ograniczoność przedziału J, co gwarantuje skończoność stałej K). Wtedy

$$\|\varphi(t,u_1) - \varphi(t,u_2)\| \leqslant K\|u_1 - u_2\|,$$

co oznacza, że rozwiązanie $\varphi(t,u)$ spełnia warunek Lipschitza po warunku początkowym u ze stałą niezależną od $t \in J$, czyli jest ciągłą funkcją warunku początkowego.

Pokażemy teraz, że $\varphi(t,u)$ jest funkcja ciągłą obu argumentów. Zauważmy, że funkcja ta jest ciągła jako funkcja t przy ustalonym u, co wynika z tw. 3.1. Jeśli teraz ustalimy t, to funkcja $\varphi(t,u)$ jest ciągłą funkcją u i ciągłość ta jest jednostajna po $t \in J$, co wynika ze spełniania warunku Lipschitza po u ze stałą niezależną od t. Ciągłość to parze argumentów (t,u) wynika teraz z tw. 3.9. ■

Powyższe twierdzenie można udowodnić przy nieco słabszych założeniach. Dowód takiego twierdzenia wymaga w zasadzie powtórzenia dowodu twierdzenia Peano dla różnicy funkcji $\varphi(t,u_1)$ i $\varphi(t,u_2)$, dlatego przytaczamy je tu bez dowodu.

3.14 TWIERDZENIE. *Jeśli funkcja $f(t,x,\lambda)$ jest ograniczona i ciągła w pewnym zbiorze otwartym Q, a przez każdy punkt $(t_0,x_0,\lambda_0) \in Q$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa $\varphi(t,x_0,\lambda_0)$ równania (3.16), to φ zależy w sposób ciągły od punktu (x_0,λ_0).*

Przejdziemy teraz do dowodu gładkiej zależności rozwiązania od warunków początkowych i parametrów.

3.15 TWIERDZENIE. *Niech $f(t,x,\lambda)$ będzie funkcją klasy C^1 swoich argumentów dla $(t,x) \in Q \subset \mathbb{R}^{m+1}$ i $\lambda \in G \subset \mathbb{R}^k$, gdzie zbiory Q i G są otwarte. Wtedy rozwiązanie $\varphi(t,x_0,\lambda)$ zagadnienia początkowego (3.16) jest klasy C^1 względem* *zmiennych t, x_0, λ w otwartym zbiorze, na którym jest określone. Jeśli $y(t)$ jest macierzą Jacobiego $\frac{\partial\varphi(t,x_0,\lambda)}{\partial\lambda}$, to spełnia ona równanie*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial x} y + \frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial \lambda} \tag{3.27}$$

z warunkiem początkowym

$$y(t_0) = \frac{\partial\varphi(t_0,x_0,\lambda)}{\partial\lambda} = 0.$$

Natomiast macierz Jacobiego $z(t) = \frac{\partial\varphi(t,x_0,\lambda)}{\partial x_0}$ spełnia równanie

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial x} z \tag{3.28}$$

z warunkiem początkowym

$$z(t_0) = \frac{\partial\varphi(t_0,x_0,\lambda)}{\partial x_0} = I,$$

gdzie I jest macierzą identycznościową $m \times m$.

Dowód. Różniczkowalność w sposób ciągły względem t wynika z tw. 3.1 ($\dot{x}$ jest funkcją ciągłą argumentów (t, x_0, λ), bo jako rozwiązanie równania jest równe $f(t, \varphi(t, x_0), \lambda)$). Podobnie jak w tw. 3.13 ograniczymy się do rozpatrzenia zależności od danych początkowych i udowodnimy, że rozwiązanie jest klasy C^1 jako funkcja warunku początkowego.

Niech $\varphi(t, x_0)$ będzie rozwiązaniem równania (3.24) z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = x_0$, a $\varphi(t, u)$ będzie rozwiązaniem równania (3.24) z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = u$. Wprowadźmy pomocniczą funkcję

$$w(t) = \varphi(t,u) - \varphi(t,x_0) - z(t)\cdot(u - x_0), \tag{3.29}$$

gdzie $z(t)$ jest rozwiązaniem równania (3.28) z funkcją f niezależną od λ.

Niech $B(t,u) = \frac{\partial f(t,\varphi(t,u))}{\partial x}$. Wtedy równanie (3.28) można zapisać jako

$$\dot{z}(t) - B(t,u)z(t) = 0.$$

Korzystając z definicji funkcji $w(t)$ oraz równania (3.28) obliczmy lewą stronę powyższej równości dla funkcji w

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) - B(t,u)w(t) =& f(t,\varphi(t,u)) - f(t,\varphi(t,x_0)) \\ &- \frac{\partial f(t,\varphi(t,x_0))}{\partial x}\big(\varphi(t,u) - \varphi(t,x_0)\big).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Prawa strona równania (3.30) zeruje się dla $u = x_0$ a jej pochodna po u wynosi

$$\frac{\partial f(t,\varphi(t,u))}{\partial x} - \frac{\partial f(t,\varphi(t,x_0))}{\partial x}.$$

Z wielowymiarowego wzoru Taylora wynika więc oszacowanie

$$
\begin{aligned}
\|f(t, \varphi(t, u)) - f(t, \varphi(t, x_0)) - \frac{\partial f(t, \varphi(t, x_0))}{\partial x}\big(\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\big)\| \\
\leqslant m\|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\|,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
m = \sup_{\alpha\in[0,1]} \Big\| \frac{\partial f\big(t, \alpha\varphi(t, u) - (1-\alpha)\varphi(t, x_0)\big)}{\partial x} - \frac{\partial f\big(t, \varphi(t, x_0)\big)}{\partial x} \Big\|.
$$

Wynika stąd oszacowanie

$$
\|\dot{w}(t) - B(t, u)w(t)\| \leqslant m\|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\|.
$$

Pokażemy teraz, że stała m może być dowolnie mała, jeśli $u \to x_0$. W tym celu zauważmy, że funkcja $\frac{\partial f(t,\alpha\varphi(t,u)-(1-\alpha)\varphi(t,x_0))}{\partial x}$ jest ciągłą funkcją argumentów (t, u, α). Z tw. 3.2 wynika, że funkcja ta dąży do $\frac{\partial f(t,\varphi(t,x_0))}{\partial x}$, gdy $u \to x_0$, jednostajnie po $t \in J$ oraz $\alpha \in [0, 1]$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje więc stała η, taka że gdy $\|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\| \leqslant \eta$, to $m \leqslant \varepsilon$. Mamy więc oszacowanie

$$
\|\dot{w}(t) - B(t, u)w(t)\| \leqslant \varepsilon\|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\|, \tag{3.31}
$$

które jest prawdziwe dla $\|\varphi(t, u)-\varphi(t, x_0)\| \leqslant \eta$. Ponieważ z lematu 3.12 wynika, że przy założeniach twierdzenia rozwiązanie jest funkcją lipschitzowską warunku początkowego, to istnieje stała K, taka że

$$
\|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\| \leqslant K\|u - x_0\|.
$$

Łącząc te oszacowania dostajemy

$$
\|\dot{w}(t) - B(t, u)w(t)\| \leqslant \varepsilon K\|u - x_0\|. \tag{3.32}
$$

Zajmiemy się teraz równaniem

$$
\dot{v}(t) = B(t, u)v(t). \tag{3.33}
$$

Prawa strona tego równania spełnia warunek Lipschitza ze stałą β

$$
\beta = \sup_{t\in J, u\in A} \|B(t, u)\|,
$$

gdzie J jest zwartym odcinkiem zawierającym w swoim wnętrzu t_0 a $A = \{u\colon \|u - x_0\| \leqslant \eta\}$ jest zwartym otoczeniem punktu x_0. Rozwiązaniem równania (3.33) z warunkiem $v(t_0) = 0$ jest oczywiście funkcja $v(t) \equiv 0$. Z drugiej strony funkcja $w(t)$ spełnia warunek $w(t_0) = 0$, co wynika z jej definicji oraz obserwacji, że $\varphi(t_0, u) = u$, $\varphi(t_0, x_0) = x_0$ a $z(t_0) = I$. Z nierówności (3.32) wynika, że funkcja $w(t)$ jest bliska rozwiązaniu równania (3.33) w sensie opisanym w lemacie

3.12. Funkcja ta spełnia także założenia tego lematu. Rozwiązanie $v(t) \equiv 0$ spełnia także założenia tego lematu. Z nierówności (3.26) wynika więc oszacowanie

$$\|w(t)\| \leqslant \varepsilon K\|u - x_0\|\frac{e^{\beta(t-t_0)} - 1}{\beta}.$$

Ułamek po prawej stronie ostatniej nierówności jest jednostajnie ograniczony dla każdego $t \in J$. Pozwala to ostatnią nierówność zapisać w postaci

$$\|w(t)\| \leqslant \varepsilon K'\|u - x_0\|, \quad \text{dla } \|u - x_0\| \leqslant \eta,$$

czyli

$$\|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0) - z(t) \cdot (u - x_0)\| \leqslant \varepsilon K'\|u - x_0\|.$$

Ponieważ oszacowanie to jest prawdziwe dla każdego $\varepsilon > 0$, wynika z niego istnienie pochodnej $\frac{\partial\varphi(t,u)}{\partial u}$ w punkcie $u = x_0$ oraz dowodzi, że jest ona równa $z(t)$.

Musimy jeszcze pokazać, że $\varphi(t, u)$ jest funkcja klasy C^1 względem pary argumentów (t, u). Na początku dowodu zauważyliśmy, że pochodna $\frac{\partial\varphi(t,u)}{\partial t}$ jest funkcją ciągłą argumentów (t, u), bo jako rozwiązanie równania jest równa $f(t, \varphi(t, u))$ a f jest z założenia ciągłą funkcją. W przypadku pochodnej $\frac{\partial\varphi(t,u)}{\partial u}$ wykazaliśmy, że w punkcie $u = x_0$ jest ona równa rozwiązaniu $z(t)$ równania (3.28). W otoczeniu punktu x_0 prawa strona tego równania spełnia warunek Lipschitza. Z tw. 3.13 wynika więc, że jest ona ciągłą funkcją (t, u). Wykazaliśmy w ten sposób, że obie pochodne cząstkowe funkcji $\varphi(t, u)$ są ciągłymi funkcjami pary zmiennych (t, u), czyli funkcja $\varphi(t, u)$ jest klasy C^1 jako funkcja pary argumentów. ■

3.16 WNIOSEK. *Jeśli w założeniach tw. 3.15 funkcja $f(t, x, \lambda)$ jest klasy C^r, gdzie $r \geqslant 1$, to rozwiązanie $\varphi(t, x_0, \lambda)$ jest też klasy C^r.*

Dowód. Rozumowanie jest identyczne dla każdej zmiennej, od której zależy rozwiązanie. Indukcyjny dowód przeprowadzimy tylko dla zależności rozwiązania od parametru. Załóżmy, że wniosek jest prawdziwy dla $r = s$. Pokażemy, że jeśli $f(t, x, \lambda)$ jest klasy C^{s+1}, to rozwiązanie jest też tej klasy. Różniczkujemy równanie (3.16) s razy po λ i otrzymujemy równanie, dla którego spełnione są założenia tw. 3.15, czyli jego rozwiązanie jest klasy C^1. Skoro s-ta pochodna jest klasy C^1, to rozwiązanie równania (3.16), podobnie jak funkcja $f(t, x, \lambda)$, jest różniczkowalne w sposób ciągły $s + 1$ razy. ■

3.17 Przykład. Dane jest zagadnienie Cauchy'ego

$$\dot{x} = \mu x^2 + 2t, \quad x(0) = \mu - 1.$$

Należy znaleźć pochodną rozwiązania względem parametru $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

Sprowadzamy problem do równania, w którym zależna od parametru jest tylko prawa strona równania. W tym celu wprowadzamy nową zmienną zależną $y = x - \mu + 1$. Rozpatrywane zagadnienie Cauchy'ego redukuje się teraz do następującego

$$\dot{y} = \mu y^2 + 2\mu^2 y + 2t + \mu^3 - 2\mu^2 + \mu, \quad y(0) = 0. \tag{3.34}$$

Zgodnie z tw. 3.15 dostajemy równanie

$$\dot{z} = (2\mu y + 2\mu^2)z + (y^2 + 4\mu y + 3\mu^2 - 4\mu + 1).$$

Równanie to rozwiązujemy standardową metodą dla równań liniowych. Najpierw znajdujemy rozwiązanie równania jednorodnego

$$z(t) = c\exp\Big(\int_0^t (2\mu y + 2\mu^2)ds\Big),$$

a następnie uzmienniamy stałą otrzymując (korzystamy z warunku początkowego $z(0) = 0$)

$$c(t) = \int_0^t \exp\Big(-\int_0^s (2\mu y + 2\mu^2)d\tau\Big)(y^2 + 4\mu y + 3\mu^2 - 4\mu + 1)ds.$$

Stąd

$$\begin{aligned} z(t) = &\exp\Big(\int_0^t (2\mu y + 2\mu^2)ds\Big)\times \\ &\int_0^t \exp\Big(-\int_0^s (2\mu y + 2\mu^2)d\tau\Big)(y^2 + 4\mu y + 3\mu^2 - 4\mu + 1)ds = \\ &\int_0^t \exp\Big(\int_s^t (2\mu y + 2\mu^2)d\tau\Big)(y^2 + 4\mu y + 3\mu^2 - 4\mu + 1)ds. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $\mu = 0$ równanie (3.34) ma rozwiązanie $y = t^2$. Wykorzystując to rozwiązanie dostajemy po przejściu granicznym

$$\lim_{\mu\to 0} z(t) = \int_0^t (s^4 + 1)ds = \frac{1}{5}t^5 + t.$$

Ponieważ $z = \frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{\partial x}{\partial \mu} - 1$, więc

$$\frac{\partial x}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0} = \frac{1}{5}t^5 + t + 1.$$

3.4 Twierdzenie o prostowaniu

Twierdzenie, które poniżej przedstawiamy, jest właściwie prostym wnioskiem z tw. 3.15. Jest ono jednak ważne, ponieważ daje geometryczny opis lokalnego zachowania krzywych całkowych. Z twierdzenia tego wynika, że krzywe całkowe równania różniczkowego są lokalnie równoległe względem siebie, tzn. przez odpowiedni dyfeomorfizm można je zamienić na rodzinę prostych równoległych. Ta własność sprawia, że twierdzenie to nazywa się **twierdzeniem o lokalnym prostowaniu** krzywych całkowych pola wektorowego.

3.18 TWIERDZENIE. *W zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^{m+1}$ dane jest równanie*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.35}$$

z funkcją f klasy $C^r, r \geqslant 1$. Niech $(t_0, x_0) \in Q$. Istnieje wtedy V, $(t_0, x_0) \in V \subset Q$ oraz dyfeomorfizm klasy C^r $g\colon V \to W$, gdzie W jest obszarem w $\mathbb{R}^{m+1}$, o tej własności, że jeśli $(s, u_1, \ldots, u_m)$ jest lokalnym układem współrzędnych w W, to g przeprowadza równanie (3.35) w równanie

$$\frac{du}{ds} = 0.$$

Dowód. Niech $\varphi(t, t_0, p)$ będzie rozwiązaniem równania (3.35) z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0 = p$. Naszym celem jest zadanie przekształcenia, które krzywą całkową $\varphi(t, t_0, p)$ przekształci na prostą $u(s) = p$. Odwzorowanie to łatwiej jest zapisać w formie funkcji odwrotnej (utożsamienie zmiennych t i s wynika z faktu, że s opisuje zmianę t wzdłuż krzywej całkowej $\varphi(t, t_0, p)$)

$$g^{-1}(t, p) = \big(t, \varphi(t, t_0, p)\big). \tag{3.36}$$

Z wniosku 3.16 wynika, że g jest odwzorowaniem klasy C^r. Jakobian odwzorowania (3.36) w punkcie (t_0, p) jest różny od zera, czyli g jest dyfeomorfizmem klasy C^r. Pokażemy teraz, że odwzorowanie g przeprowadza pole wektorowe $[1, f(t, x)]$ na pole $[1, 0]$. Wynika to z faktu, że jeśli g przeprowadza krzywe $\varphi(t, t_0, p)$ na proste $u(s) = p$, to wektory styczne do jednej rodziny krzywych są przeprowadzane na wektory styczne do drugiej rodziny. Możemy więc powiedzieć, że dyfeomorfizm g przeprowadza równanie (3.35), któremu odpowiada pole $[1, f(t, x)]$, w równanie $\frac{du}{ds} = 0$, któremu odpowiada pola wektorowego $[1, 0]$. ∎