Rozdział 4

Układy równań liniowych

4.1 Ogólne układy pierwszego rzędu

W rozdziale tym będziemy się zajmować układami równań liniowych. Główną uwagę poświęcimy zagadnieniom początkowym dla układów pierwszego rzędu

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{4.1}$$
$$x(t_0) = x_0. \tag{4.2}$$

W równaniu (4.1) $x(t)$ jest funkcją o wartościach wektorowych w przestrzeni $\mathbb{R}^m$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}.$$

Także funkcja $f(t)$ jest funkcją wektorową o wartościach w $\mathbb{R}^m$. Natomiast $A(t)$ jest macierzą $m \times m$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^m$.

4.1 TWIERDZENIE. *Jeśli funkcje $A(t)$ i $f(t)$ są ciągłe dla $t \in (a, b)$, to przez każdy punkt zbioru $Q = (a, b) \times \mathbb{R}^m$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (4.1). Maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania jest przedział (a, b).*

Dowód. Istnienie i jednoznaczność lokalnego rozwiązania wynika z tw. 3.1, bo $A(t)x + f(t)$ spełnia lokalnie warunek Lipschitza. Należy pokazać, że otrzymane rozwiązanie przedłuża się na cały odcinek (a, b). Niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem przechodzącym przez punkt (t_0, x_0). Pokażemy, że jeśli $t_1 \in (a, b)$, to $x(t_1)$ jest ograniczone. Z całkowej postaci równania (4.1)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

wynika oszacowanie

$$\|x(t_1)\| \leqslant \|x_0\| + K\int_{t_0}^{t_1} \|x(s)\|ds + \int_{t_0}^{t_1} \|f(s)\|ds,$$

gdzie $K = \sup_{t\in[t_0,t_1]} \|A(t)\|$. Ponieważ odcinek $[t_0, t_1]$ jest zwarty, więc funkcja $f(t)$ jest ograniczona dla $t \in [t_0, t_1]$ i

$$\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_1} \|f(s)\|ds = c < +\infty.$$

Stąd

$$\|x(t_1)\| \leqslant c + K\int_{t_0}^{t_1} \|x(s)\|ds.$$

Na podstawie tw. 3.10 otrzymujemy

$$\|x(t_1)\| \leqslant ce^{K(t_1-t_0)}.$$

Oznacza to, że rozwiązanie $x(t)$ jest ograniczone w każdym punkcie $t_1 \in (a, b)$. ■

Podobnie jak w przypadku skalarnym ważną częścią analizy jest badanie równania jednorodnego

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{4.3}$$

Z tw. 4.1 wynika następujący wniosek.

4.2 WNIOSEK. *Jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (4.3) i $x(t_0) = 0$ dla pewnego $t_0 \in (a, b)$, to $x(t)$ jest tożsamościowo równe zeru.*

Dowód. Funkcja $x(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem równania (4.3) przy warunku początkowym $x(t_0) = 0$. Z jednoznaczności rozwiązań wynika, że jest to jedyne rozwiązanie tego zagadnienia początkowego. ■

4.3 TWIERDZENIE. *Rozwiązania równania jednorodnego (4.3) tworzą m-wymiarową przestrzeń liniową E.*

Dowód. Niech E będzie zbiorem wszystkich rozwiązać równania (4.3). Niech $x_1(t), x_2(t) \in E$. Wtedy

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \in E,$$

bo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= c_1\dot{x}_1(t) + c_2\dot{x}_2(t) = c_1A(t)x_1(t) + c_2A(t)x_2(t) = \\ &= A(t)\big(c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\big).\end{aligned}$$

Wobec tego E jest przestrzenią liniową. Udowodnimy teraz, że $\dim E = m$. Niech $t_0 \in (a, b)$ i zdefiniujmy odwzorowanie

$$L\colon\ x(t) \longmapsto x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^m.$$

Odwzorowanie to jest liniowe

$$L\big(c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\big) = c_1L\big(x_1(t)\big) + c_2L\big(x_2(t)\big)$$

i odwzorowuje E w $\mathbb{R}^m$. Odwzorowanie to jest izomorfizmem. W tym celu zauważmy, że jeśli ustalimy $x_0 \in \mathbb{R}^m$, to istnieje rozwiązanie równania (4.3) z warunkiem $x(t_0) = x_0$. Wynika to z tw. 4.1. Odwzorowanie L jest więc „na". Odwzorowanie L jest też wzajemnie jednoznaczne. W tym celu wystarczy zauważyć, że jeśli $x(t_0) = 0$, to $x(t)$ jest funkcją tożsamościowo równą zeru, co wynika z wniosku 4.2. ■

4.4 WNIOSEK. *Jeśli $x_c(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego (4.1), a wektory $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, są bazą przestrzeni E rozwiązań równania jednorodnego, to rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego ma postać*

$$x(t) = x_c(t) + c_1x_1(t) + \cdots + c_mx_m(t),$$

gdzie $c_i \in \mathbb{R}$.

Dowód. Jeśli $x_c(t)$ i $x(t)$ są dwoma różnymi rozwiązaniami równania (4.1), to ich różnica $x_c(t) - x(t)$ jest, jak łatwo zauważyć, rozwiązaniem równania (4.3). ■

Rozważmy bazę przestrzeni rozwiązać równania (4.3). Baza ta składa się z m funkcji: $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$. Z funkcji $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, tworzymy macierz $X(t)$, tak aby kolejne wektory $x_i(t)$ tworzyły kolumny macierzy $X(t)$.

Macierz $X(t)$ spełnia równanie

$$\dot{X} = A(t)X. \tag{4.4}$$

Równanie (4.4) jest zapisaniem w postaci macierzowej równań (4.3) dla wektorów $x_i(t)$.

4.5 TWIERDZENIE. *Niech $X(t)$ będzie rozwiązaniem równania (4.4) w przedziale (a, b). Zdefiniujmy*

$$\Delta(t) = \det X(t) = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & x_2^m & \ldots & x_m^m \end{vmatrix}.$$

Dla dowolnych $t, t_0 \in (a,b)$ *mamy równość*

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s) ds, \tag{4.5}$$

gdzie $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$ *oznacza ślad macierzy A.*

Dowód. Niech $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{m}$ oraz $X(t) = (x_i^j(t))_{i,j=1}^{m}$, gdzie $x_i^j(t)$ jest j-tą składową wektora x_i.

Z prawa różniczkowania wyznacznika mamy

$$\frac{d}{dt}\Delta(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_1^1 & \dot{x}_2^1 & \dots & \dot{x}_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & x_2^m & \dots & x_m^m \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_1^m & \dot{x}_2^m & \dots & \dot{x}_m^m \end{vmatrix}.$$

Dla pojedynczej składowej wektora $x_i(t)$ równanie (4.3) ma postać

$$\dot{x}_i^j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} x_i^k.$$

Wykorzystując tę postać równania (4.3) dostajemy

$$\frac{d}{dt}\Delta(t) = \begin{vmatrix} a_{11}x_1^1 & a_{11}x_2^1 & \dots & a_{11}x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & x_2^m & \dots & x_m^m \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mm}x_1^m & a_{mm}x_2^m & \dots & a_{mm}x_m^m \end{vmatrix}.$$

Korzystając z własności wyznacznika ostatnią równość można zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt}\Delta(t) = \Delta(t) \sum_{i=1}^{m} a_{ii}(t),$$

co po scałkowaniu daje tezę. ■

4.6 WNIOSEK. *Jeśli* $\Delta(t_0) \neq 0$ *w pewnym punkcie* $t_0 \in (a,b)$*, to* $\Delta(t) \neq 0$ *dla każdego* $t \in (a,b)$.

4.7 DEFINICJA. *Macierz kwadratowa $X(t)$ o wymiarze $m \times m$ spełniająca równanie (4.4), dla której $\Delta(t) \neq 0$, nazywa się* ***macierzą fundamentalną*** *układu (4.3). Wektory $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ będące kolumnami macierzy fundamentalnej, nazywają się* ***fundamentalnym układem rozwiązań*** *równania (4.3). Wyznacznik $\Delta(t)$ nazywa się wtedy* ***wyznacznikiem Wrońskiego (wrońskianem)*** *układu funkcji $x_1(t), \ldots, x_m(t)$.*

Jeśli wyznacznik Wrońskiego układu funkcji $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$ jest różny od zera w pewnym punkcie t_0, to wektory $x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_m(t_0)$ są liniowo niezależne. Twierdzenie 4.5 mówi, że jeśli pewien układ rozwiązań równania (4.3) jest liniowo niezależny w jednym punkcie $t_0 \in (a, b)$, to jest liniowo niezależny dla każdego $t \in (a, b)$. Wynika stąd łatwy sposób konstruowania układu fundamentalnego.

4.8 TWIERDZENIE. *Każde liniowe równanie jednorodne ma układ fundamentalny.*

Dowód. Wybieramy m liniowo niezależnych wektorów w $\mathbb{R}^m$: $x_1, x_2, \ldots, x_m$ i rozwiązujemy równanie

$$\dot{x} = A(t)x$$

z warunkami

$$x(t_0) = x_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

gdzie $t_0 \in (a, b)$.

Otrzymane rozwiązania $x_i(t)$ tworzą układ fundamentalny, bo $\Delta(t_0) \neq 0$ (z liniowej niezależności x_i) i $\Delta(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$ z tw. 4.5. ■

Udowodnimy teraz wielowymiarowy wariant metody uzmienniania stałej.

4.9 TWIERDZENIE. *Niech będzie dane zagadnienie początkowe dla równania niejednorodnego (4.1)–(4.2). Rozwiązaniem tego zagadnienia jest funkcja*

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)ds,$$

gdzie $X(t)$ jest macierzą fundamentalną układu (4.3).

Dowód. Niech $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ będę układem fundamentalnym rozwiązań równania (4.3). Każde rozwiązanie tego równania można zapisać jako kombinację liniową

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_m x_m(t).$$

Rozwiązania równania (4.1) będziemy poszukiwać uzmienniając stałe $c_1, \ldots, c_m$

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \cdots + c_m(t)x_m(t). \tag{4.6}$$

Niech $X(t)$ będzie macierzą fundamentalną, której kolumnami są wektory $x_i(t)$, oraz

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_m(t) \end{pmatrix}.$$

Pozwala to zapisać macierzową postać równania (4.6)

$$x(t) = X(t)C(t).$$

Po podstawieniu do równania (4.1) otrzymujemy

$$\dot{X}(t)C(t) + X(t)\dot{C}(t) = AX(t)C(t) + f(t).$$

Ponieważ $X(t)$ jest rozwiązaniem równania (4.4), to powyższe równanie upraszcza się do następującego

$$X(t)\dot{C}(t) = f(t).$$

$X(t)$ jest macierzą nieosobliwą, istnieje więc $X^{-1}(t)$ i ostatnie równanie można zapisać jako

$$\dot{C}(t) = X^{-1}(t)f(t).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Jeśli ma być spełniony warunek początkowy, to

$$X(t_0)C(t_0) = x_0,$$

co daje

$$C(t_0) = X^{-1}(t_0)x_0.$$

Ostatecznie $C(t)$ dana jest wzorem

$$C(t) = X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Wstawiając to wyrażenie do macierzowej wersji równania (4.6) otrzymujemy tezę.

■

4.2 Układy o stałych współczynnikach

Ponieważ brak jest ogólnych metod całkowania układów o zmiennych współczynnikach, zajmiemy się układami pierwszego rzędu o stałych współczynnikach. Dla układów takich istnieją skuteczne metody znajdowania rozwiązań.

Twierdzenie 4.9 daje nam analityczny wzór na rozwiązanie równania niejednorodnego, kiedy znany jest układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego. Wystarczy więc ograniczyć się do analizy układów jednorodnych

$$\dot{x} = Rx, \tag{4.7}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{4.8}$$

gdzie R jest stałą macierzą o wymiarze $m \times m$.

Gdyby równanie (4.7) było równaniem skalarnym, to rozwiązaniem zagadnienia początkowego (4.7) – (4.8) byłaby funkcja $x(t) = x_0 e^{R(t-t_0)}$. Pokażemy, że w przypadku wektorowym prawdziwy jest analogiczny wzór, jeśli tylko zdefiniujemy funkcję e^R dla macierzy.

4.10 DEFINICJA. *Jeśli A jest macierzą kwadratową $m \times m$, to e^A definiujemy jako sumę szeregu*

$$e^A \equiv I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots , \tag{4.9}$$

gdzie A^n oznacza n-krotne mnożenie macierzy A przez siebie.

Szereg (4.9) jest zbieżny jako szereg majoryzowany przez szereg

$$1 + K + \frac{1}{2!}K^2 + \cdots + \frac{1}{n!}K^n + \cdots = e^K,$$

gdzie $K = \|A\|$.

4.11 Przykład. Obliczymy e^A dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Aby nie liczyć sumy nieskończonego szeregu, rozłożymy macierz A na sumę dwóch macierzy

$$A_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ponieważ iloczyn $A_D B$ jest przemienny, tzn. $A_D B = B A_D$, więc ze wzoru (4.9) wynika, że

$$e^A = e^{A_D + B} = e^{A_D} e^B .$$

Łatwo zauważyć, że

$$e^{A_D} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} .$$

Macierz B jest macierzą nilpotentną i jej kwadrat jest macierzą zerową

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

więc

$$e^B = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ostatecznie

$$e^A = e^{A_D} e^B = \begin{pmatrix} e & e & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

4.12 Przykład. Pokażemy, że przemienność iloczynu macierzy A_D i B w poprzednim przykładzie jest istotna.

Rozważmy dwie macierze A i B

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obliczmy A^n i B^n

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \quad \text{i} \quad A^n = A,$$
$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \quad \text{i} \quad B^n = B.$$

Wobec tego

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^t - 1 & e^t \end{pmatrix}, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & e^t - 1 \\ e^t - 1 & e^t \end{pmatrix},$$

a stąd

$$e^{At} e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & e^t - 1 \\ e^t - 1 & 2e^{2t} - 2e^t + 1 \end{pmatrix}.$$

Tymczasem

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

skąd

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

i $\exp\big((A+B)t\big)$ musi mieć jako składową w lewym górnym rogu szereg postaci $1 + \frac{1}{2}t^2 + \ldots$. Jest jasne, że suma tego szeregu nie może być równa 1, czyli składowej w lewym górnym rogu macierzy $e^{At}e^{Bt}$. W rzeczywistości $\exp\big((A+B)t\big)$ jest bardzo skomplikowanym wyrażeniem, którego wszystkie cztery składowe są dużo bardziej złożone niż dla macierzy $e^{At}e^{Bt}$.

W przykładzie tym uciekliśmy się do rozpatrywania macierzy e^{At}, aby łatwiej było zauważyć, że wielomian w lewym górnym rogu macierzy $e^{(A+B)t}$ nie daje się zredukować do stałej. Prawdą jest także, że $e^Ae^B \neq e^{(A+B)}$, ale trudno to udowodnić bez skomplikowanych rachunków.

4.13 TWIERDZENIE. *Macierzą fundamentalną równania (4.7) jest* $\exp(Rt)$.

Dowód. Liczymy pochodną macierzy $\exp(Rt)$ korzystając z definicji eksponenty macierzy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{Rt} &= \frac{d}{dt}\Big(I + Rt + \frac{1}{2!}R^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}R^nt^n + \cdots\Big) = \\ &= R + R^2t + \frac{1}{2!}R^3t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}R^nt^{n-1} + \cdots = \\ &= R\Big(I + Rt + \frac{1}{2!}R^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}R^{n-1}t^{n-1} + \cdots\Big) = Re^{Rt}\,. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $X(t) = \exp(Rt)$ spełnia równanie

$$\dot{X} = RX,$$

czyli jest macierzą fundamentalną. ■

W przypadku macierzy o zmiennych współczynnikach wzór na macierz fundamentalną powinien mieć postać $\exp\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)$. Niestety, w ogólności wzór taki nie jest prawdziwy! Macierze $A(s)$ nie muszą być przemienne dla różnych s, więc nie można poprawnie zdefiniować funkcji wykładniczej od całki z macierzy. Ten fakt tłumaczy brak analitycznych wzorów na rozwiązanie układów równań liniowych o zmiennych współczynnikach, mimo że wzór taki istnieje dla jednego równania pierwszego rzędu (macierze 1×1 są zawsze przemienne!).

Zajmiemy się teraz problemem obliczania macierzy $\exp(Rt)$. Po pierwsze, mimo że macierz R jest rzeczywista, będziemy ją traktować jako przekształcenie liniowe $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$. Na mocy twierdzenia Jordana istnieje nieosobliwe przekształcenie liniowe Q, takie że $Q^{-1}RQ = J$, gdzie J jest macierzą w **kanonicznej postaci klatkowej Jordana**

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_j \end{pmatrix}.$$

Każda z klatek J_i jest klatką diagonalną albo klatką postaci

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Przestrzeń $\mathbb{C}^m$ rozpada się na sumą prostą przestrzeni H_i, które są przestrzeniami niezmienniczymi dla J, a macierz J ma w H_i wektor własny x_i, odpowiadający wartości własnej λ_i.

Wynika z tego, że

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_j t} \end{pmatrix}$$

i wystarczy skonstruować

$$e^{J_i t}.$$

Jeśli macierz J_i jest diagonalna, to ze wzoru (4.9) wynika, że

$$e^{Rt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_m t} \end{pmatrix}.$$

Jeśli J_i ma postać (4.10), to rozkładamy J_i na sumę

$$J_i = \lambda_i I_k + K_k,$$

gdzie k oznacza wymiar przestrzeni niezmienniczej H_i. Ponieważ macierze I_k i K_k są przemienne, to

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} I_k e^{K_k t}.$$

Wystarczy więc znaleźć $e^{K_k t}$. Pokażemy, że K_k jest macierzą nilpotentną. Ponieważ K_k ma postać

$$K_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

czyli K_k zawiera jedynki na pierwszej podprzekątnej, to jasne jest, że kolejne potęgi K_k zawierają jedynki na kolejnych podprzekątnych. W szczególności $(K_k)^k = 0$.

Stąd

$$e^{K_k t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \dots & \dots & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Korzystając z postaci $e^{K_k t}$ możemy zbudować $\exp(J_i t)$, a następnie $\exp(Jt)$. Aby przejść do $\exp(Rt)$ zauważmy, że

$$R^n = QJ^nQ^{-1},$$

gdzie przekształcenie Q sprowadza R do postaci Jordana. Korzystając z tej równości, otrzymujemy

$$\exp(Rt) = Q\exp(Jt)Q^{-1}.$$

Obliczanie macierzy $\exp(Rt)$ opisaną wyżej metodą wymaga znalezienia transformacji Q, co w ogólności nie jest prostym zadaniem. Dlatego też przedstawimy sposób konstrukcji macierzy fundamentalnej, oparty na fakcie, że spełnia ona równanie (4.7).

Istotą pomysłu jest poszukiwanie rozwiązań układu (4.7) jako funkcji $x(t) = e^{\lambda t}v$, gdzie v jest stałym wektorem. Podstawiając te postać rozwiązania do równania (4.7) otrzymujemy

$$Rv = \lambda v,$$

czyli równanie problemu własnego dla macierzy R. Rozwiązanie tego problemu polega na znalezieniu wartości własnych (i wektorów własnych) macierzy R. Wartości własne są to pierwiastki wielomianu charakterystycznego

$$p(\lambda) = \det(R - \lambda I), \tag{4.11}$$

przy czym każdy pierwiastek wielomianu (4.11) jest wartością własną macierzy R i odpowiada mu pewien wektor własny. Nie ma jednak jednoznacznej odpowiedniości, bo pierwiastki mogą być wielokrotne, a odpowiadające im wartości własne mogą mieć mniejszą krotność, czyli mniejszą liczbę odpowiadających im wektorów własnych.

Przy rozwiązywaniu tego problemu możemy rozróżnić 3 przypadki.

A) Pierwiastki wielomianu charakterystycznego są jednokrotne i rzeczywiste. Mamy wtedy m pierwiastków: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ i m odpowiadających im wektorów własnych: $v_1, v_2, \dots, v_m$. Ponieważ wektory $v_1, v_2, \dots, v_m$ są liniowo niezależne, więc funkcje

$$e^{\lambda_1 t}v_1,\ e^{\lambda_2 t}v_2,\ \dots,\ e^{\lambda_m t}v_m \tag{4.12}$$

tworzą bazę przestrzeni rozwiązań równania (4.7) i wyznaczają macierz fundamentalną $X(t)$.

B) Pierwiastki wielomianu charakterystycznego są jednokrotne, ale zawierają pierwiastki zespolone. Jeśli λ jest zespoloną wartością własną macierzy R a v odpowiadającym jej wektorem własnym, to funkcja

$$x(t) = e^{\lambda t} v$$

jest rozwiązaniem zespolonym równania (4.7). Ponieważ wielomian charakterystyczny ma współczynniki rzeczywiste, więc pierwiastki zespolone występują parami jako sprzężone liczby zespolone. Niech $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ będą taką parą wartości własnych. Niech $v_1 = u + iw$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_1, gdzie u i w są wektorami rzeczywistymi. Wtedy wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_2 jest wektor $v_2 = u - iw$. Jeśli więc

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2,$$

to

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{1}{2}\big(x_1(t) + x_2(t)\big) = e^{\alpha t}(u \cos \beta t - w \sin \beta t), \\ z_2(t) &= \frac{1}{2i}\big(x_1(t) - x_2(t)\big) = e^{\alpha t}(w \cos \beta t + u \sin \beta t) \end{aligned} \tag{4.13}$$

są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami rzeczywistymi równania (4.7).

C) Pierwiastki wielomianu charakterystycznego są wielokrotne (ograniczymy się do pierwiastków rzeczywistych, wielokrotne pierwiastki zespolone rozwiązuje się podobnie wykorzystując fakty znane dla pojedynczych pierwiastków zespolonych). Niech więc λ_k będzie pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego o krotności n_k. λ_k jest wartością własną macierzy R. Załóżmy, że λ_k ma tylko ν_k niezależnych liniowo wektorów własnych ($\nu_k < n_k$). Z algebry liniowej wiadomo, że jeśli równanie

$$(R - \lambda_k I)v = 0$$

ma ν_k liniowo niezależnych rozwiązań, to równanie

$$(R - \lambda_k I)^2 v = 0$$

ma co najmniej $\nu_k + 1$ liniowo niezależnych rozwiązań, a równanie

$$(R - \lambda_k I)^{n_k - \nu_k + 1} v = 0$$

ma co najmniej n_k liniowo niezależnych rozwiązań.

W celu efektywnego znalezienia tych wektorów zauważmy, że dla dowolnego wektora v funkcja $\exp(Rt)v$ jest rozwiązaniem równania (4.7). Korzystając z definicji funkcji wykładniczej, otrzymujemy rozwinięcie

$$\exp(Rt)v = e^{\lambda t}\Big(v + t(R - \lambda I)v + \frac{t^2}{2!}(R - \lambda I)^2 v + \cdots\Big). \tag{4.14}$$

Jeśli λ jest wartością własną macierzy R, a v odpowiadającym jej wektorem własnym, to

$$(R - \lambda I)v = 0$$

i z rozwinięcia (4.14) pozostaje tylko $e^{\lambda t}v$, która to funkcja, jak już wiemy, jest rozwiązaniem równania (4.7). Jeśli λ jest wielokrotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, ale ma niewystarczającą liczbę wektorów własnych, to możemy poszukiwać takich wektorów v, że

$$(R - \lambda I)v \neq 0,$$

ale

$$(R - \lambda I)^2 v = 0.$$

Wtedy w rozwinięciu (4.14) pozostają tylko dwa pierwsze wyrazy i funkcja

$$x(t) = e^{\lambda t}\big(I + t(R - \lambda I)\big)v$$

będzie rozwiązaniem równania (4.7).

Można udowodnić, że wektory spełniające warunki

$$(R - \lambda I)v \neq 0, \quad (R - \lambda I)^2 v = 0$$

są liniowo niezależne od wektorów, które spełniają warunek

$$(R - \lambda I)v = 0.$$

Własność ta przenosi się indukcyjnie na wyższe potęgi $(R - \lambda I)$, co gwarantuje nam możliwość znalezienia wystarczającej liczby liniowo niezależnych rozwiązań równania (4.7).

Na koniec zauważamy, że aby z macierzy $X(t)$ otrzymać $\exp(Rt)$ należy przyjąć

$$\exp(Rt) = X(t)X^{-1}(0),$$

ponieważ macierz $\exp(Rt)$ w zerze jest macierzą identycznościową.

Poniższe przykłady ilustrują wszystkie 3 omawiane przypadki pierwiastków wielomianu charakterystycznego.

4.14 Przykład. Znajdziemy macierz fundamentalną układu

$$\dot{x} = Rx, \tag{4.15}$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Wartościami własnymi są: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Znajdziemy teraz wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym.

1) $\lambda_1 = 1$. Szukamy wektora, takiego że

$$(R - I)v_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Stąd

$$v_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i rozwiązaniem równania (4.15) jest funkcja (przyjmujemy $c = 1$)

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 2$. Szukamy wektora, takiego że

$$(R - 2I)v_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} v_2 = 0.$$

Stąd

$$v_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

i otrzymujemy rozwiązanie równania (4.15)

$$x_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Z rozwiązań $x_1(t)$ i $x_2(t)$ wyznaczamy macierz fundamentalną

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -e^t & -3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

4.15 Przykład. Znajdziemy macierz fundamentalną układu

$$\dot{x} = Rx,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i).$$

Wartościami własnymi są: $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$.

Poszukujemy wektora własnego dla λ_1

$$(R-(2+i)I)v_1 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Wektor ten ma postać (pomijamy stałą)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ze wzorów (4.13) otrzymujemy wtedy

$$z_1(t) = e^{2t}\Big(\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$$z_2(t) = e^{2t}\Big(-\cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Z $z_1(t)$ i $z_2(t)$ otrzymujemy macierz fundamentalną

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\sin t & -e^{2t}\cos t \end{pmatrix}.$$

4.16 Przykład. Znajdziemy macierz fundamentalną układu

$$\dot{x} = Rx,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 6 & -1 & -6 \\ -8 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny ma postać

$$p(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

1) $\lambda_1 = 2$. Jest to pierwiastek jednokrotny. Odpowiada mu wektor własny

$$(R-2I)v_1 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & -6 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix} v_1 = 0, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że rozwiązanie równania (4.7) ma postać

$$x_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 1$. Jest to pierwiastek dwukrotny. Najpierw znajdujemy wektory własne

$$(R - I)v_2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & 3 & 8 \end{pmatrix} v_2 = 0.$$

Stąd otrzymujemy dwa związki na współrzędne wektora v_2, czyli istnieje tylko jeden liniowo niezależny wektor własny

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że funkcja

$$x_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jest rozwiązaniem równania (4.7). Trzeciego liniowo niezależnego rozwiązania będziemy poszukiwać w postaci wektora v_3, takiego że

$$(R - I)v_3 = v_2, \tag{4.16}$$

czyli

$$(R - I)v_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & 3 & 8 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Z rozwiązania tego równania otrzymujemy

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że rozwiązanie równania (4.16) gwarantuje nam, że $(R - I)v_3 \neq 0$ i $(R - I)^2 v_3 = 0$.

Po wstawieniu v_3 do (4.14) otrzymujemy

$$x_3(t) = e^t(v_3 + t(R - I)v_3) = e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}.$$

Macierz fundamentalna ma więc postać

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t & (t+1)e^t \\ -2e^{2t} & 0 & 3e^t \\ e^{2t} & e^t & te^t \end{pmatrix}.$$

4.17 Przykład. Znajdziemy macierz fundamentalną układu

$$\dot{x} = Rx,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny ma postać $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^3$. Mamy jeden pierwiastek potrójny $\lambda = 2$. Znajdujemy wektor własny, odpowiadający $\lambda = 2$

$$(R - 2I)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Stąd mamy dwa niezależne równania na współrzędne wektora v_1. Czyli istnieje tylko jeden wektor własny

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Otrzymujemy zatem jedno rozwiązanie równania

$$x_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

W celu znalezienia dalszych rozwiązań liniowo niezależnych poszukujemy wektora v_2, takiego że

$$(R - 2I)v_2 = v_1,$$

czyli

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie tej równości wyznacza jeden wektor liniowo niezależny od v_1

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i rozwiązanie równania różniczkowego

$$x_2(t) = e^{2t}\big(v_2 + t(R - 2I)v_2\big) = e^{2t}(v_2 + tv_1) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aby znaleźć trzecie rozwiązanie, poszukujemy wektora v_3, takiego że

$$(R - 2I)v_3 = v_2,$$

czyli

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązaniem tego równania, liniowo niezależnym od v_1 i v_2, jest

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} x_3(t) &= e^{2t}\Big(v_3 + t(R-2I)v_3 + \frac{t^2}{2}(R-2I)^2 v_3\Big) = \\ &= e^{2t}\Big(v_3 + tv_2 + \frac{t^2}{2}v_1\Big) = e^{2t}\begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t+3 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wobec tego otrzymujemy macierz fundamentalną

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & (t+3)e^{2t} \\ 0 & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

4.3 Równania skalarne wyższego rzędu

Zajmiemy się teraz skalarnym równaniem liniowym rzędu m

$$x^{(m)} + p_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \cdots + p_1(t)\dot{x} + p_0(t)x = q(t). \tag{4.17}$$

Zagadnienie początkowe dla tego równania polega na zadaniu w chwili t_0 wartości funkcji x oraz jej pochodnych do rzędu $m-1$

$$x(t_0) = x_0^0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1^0, \; \ldots, \; x^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1}^0. \tag{4.18}$$

Równanie (4.17) z warunkami (4.18) można sprowadzić do zagadnienia początkowego dla układu pierwszego rzędu definiując nowe zmienne

$$x_k = x^{(k)}.$$

Równanie (4.17) zamienia się wtedy w układ

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = x_1, \\ &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\vdots \\ &\dot{x}_{m-2} = x_{m-1}, \\ &\dot{x}_{m-1} = -p_{m-1}(t)x_{m-1} - \cdots - p_0(t)x_0 + q(t), \end{aligned} \tag{4.19}$$

a warunki (4.18) stają się warunkami dla układu

$$x_k(t_0) = x_k^0. \tag{4.20}$$

Otrzymuje się wtedy zagadnienie początkowe dla układu równań liniowych rozpatrywane w pierwszym podrozdziale tego rozdziału.

Okazuje się, że przy rozpatrywaniu równań o stałych współczynnikach można postępowanie znane dla ogólnych układów pierwszego rzędu znacznie uprościć. Niech będzie dane równanie jednorodne rzędu m o stałych współczynnikach

$$x^{(m)} + a_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + a_1\dot{x} + a_0x = 0. \tag{4.21}$$

Równanie to sprowadza się do układu pierwszego rzędu

$$\dot{X} = RX,$$

gdzie

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(m-1)} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy R ma postać

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - R) = \lambda^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i\lambda^i. \tag{4.22}$$

4.18 TWIERDZENIE. *Jeśli λ_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego (4.22), $1 \leqslant k \leqslant m$, to funkcje $e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (4.21).*

Dowód. Jeśli λ_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $p(\lambda)$, to

$$p(\lambda_0) = \frac{dp}{d\lambda}(\lambda_0) = \cdots = \frac{d^{k-1}p}{d\lambda^{k-1}}(\lambda_0) = 0.$$

Niech

$$L(x) \equiv x^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^{(i)}.$$

Operator ten ma następującą własność

$$L(e^{\lambda t}) = p(\lambda)e^{\lambda t}.$$

Aby udowodnić powyższą równość zadziałajmy operatorem L na funkcje $t^i e^{\lambda t}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$,

$$L(t^i e^{\lambda t}) = L\left(\frac{\partial^i e^{\lambda t}}{\partial \lambda^i}\right) = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} L\big(e^{\lambda t}\big) = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i}\big(p(\lambda)e^{\lambda t}\big). \tag{4.23}$$

Stosując wzór Leibniza do ostatniego wyrażenia w (4.23), otrzymujemy sumę wyrazów postaci

$$-t^{i-j}\frac{\partial^j p}{\partial \lambda^j}(\lambda)e^{\lambda t}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, i\,.$$

Ponieważ dla $j \leqslant k-1$

$$\frac{\partial^j p}{\partial \lambda^j}(\lambda_0) = 0,$$

więc

$$L(t^i e^{\lambda_0 t}) = 0.$$

Funkcje $t^i e^{\lambda_0 t}$ są zatem rozwiązaniami równania (4.21). Liniowa niezależność tych funkcji wynika z liniowej niezależności wielomianów różnych stopni. ■

4.19 Przykład. Znajdziemy rozwiązanie ogólne równania

$$x^{(3)} - 5\ddot{x} + 6\dot{x} = 0.$$

Obliczamy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Ponieważ pierwiastkami tego wielomianu są liczby $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 3$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}.$$

4.20 Przykład. Wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny o masie m, zawieszony na długiej, cienkiej i nierozciągliwej nici. Wykonuje on wahania wokół najniżej położonego punktu O, zwanego środkiem wahań.

Załóżmy, że wahadło wykonuje tylko małe wahania i oznaczmy przez z odchylenie od środka wahań. Aby znaleźć przyspieszenie a wahadła, zauważmy, że siła działająca na punkt materialny o masie m jest dana przez składową siły ciążenia, styczną do toru wahań (składowa prostopadła do niej jest równoważona przez sprężystość nici, na której wisi wahadło). Wtedy

$$ma = -mg \sin x,$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, x – kątem odchylenia wahadła od pionu, a znak minus przed prawą stroną równania występuje na skutek przeciwnych kierunków wychylenia i działającej siły. Jeśli przyspieszenie wahadła wyrazimy przez drugą pochodną odchylenia z, to otrzymamy

$$m\ddot{z} = -mg \sin x.$$

Zauważmy, że jeśli z mierzymy wzdłuż łuku, po którym porusza się punkt materialny, to

$$z = xl,$$

gdzie l jest długością wahadła. Ostatecznie otrzymamy równanie wahadła

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin x.$$

Jeśli interesujemy się tylko małymi drganiami wahadła, to z dobrym przybliżeniem można przyjąć

$$\sin x \approx x.$$

Małe drgania wahadła dają się więc opisać równaniem

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{4.24}$$

gdzie $\omega_0^2 = g/l$.

W przybliżeniu małych odchyleń ruch wahadła jest dobrym modelem dla **oscylatora harmonicznego** z jednym stopniem swobody. Równanie (4.24) jest równaniem takiego oscylatora. Opisuje ono układ mechaniczny, w którym ruch masy na prostej (w naszym przypadku masy jednostkowej) odbywa się pod wpływem siły, która jest proporcjonalna do wychylenia od położenia równowagi (tym położeniem jest punk $x = 0$).

Ponieważ wielomian charakterystyczny dla równania (4.24) ma pierwiastki $\lambda_1 = i$ i $\lambda_2 = -i$, więc z tw. 4.18 wynika rozwiązanie ogólne

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

Przekształcimy to rozwiązanie do innej postaci, korzystając z nowych stałych dowolnych

$$c_1 = A\cos\delta, \quad c_2 = A\sin\delta.$$

Wtedy

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \delta). \tag{4.25}$$

Wzór (4.25) opisuje swobodne drgania o amplitudzie A z częstotliwością ω_0 i przesunięciem fazowym δ.

Podając warunki początkowe dla równania (4.24)

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1,$$

ustalamy wartość amplitudy A oraz przesuniecia fazowego δ.

4.21 Przykład. W poprzednim przykładzie rozpatrywaliśmy **drgania swobodne oscylatora harmonicznego**. Przeanalizujemy teraz przypadek, gdy ruch masy na prostej napotyka pewien opór, np. opór tarcia. Zakładamy, że siła oporu jest proporcjonalna do prędkości ruchu (taką własność ma siła tarcia). Takie drgania nazywają się **drganiami tłumionymi** (wyjaśnienie tej nazwy pojawi się na końcu przykładu). Wtedy równanie (4.24) zamienia się w równanie

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{4.26}$$

gdzie $2k$ jest współczynnikiem proporcjonalności.

Analizę równania (4.26) rozpoczniemy od znalezienia pierwiastków wielomianu charakterystycznego

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Wyrażają się one wzorami

$$\lambda_1 = -k + \sqrt{k^2 - \omega_0^2}, \qquad \lambda_2 = -k - \sqrt{k^2 - \omega_0^2}.$$

Charakter rozwiązania zależy od znaku wyrażenia $k^2 - \omega_0^2$.

a) $k^2 - \omega_0^2 > 0$. Oba pierwiastki są rzeczywiste i ujemne. Rozwiązanie

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

jest zbieżne monotonicznie do zera.

b) $k^2 - \omega_0^2 = 0$. Mamy wówczas podwójny pierwiastek rzeczywisty. Rozwiązanie ma postać

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-kt}.$$

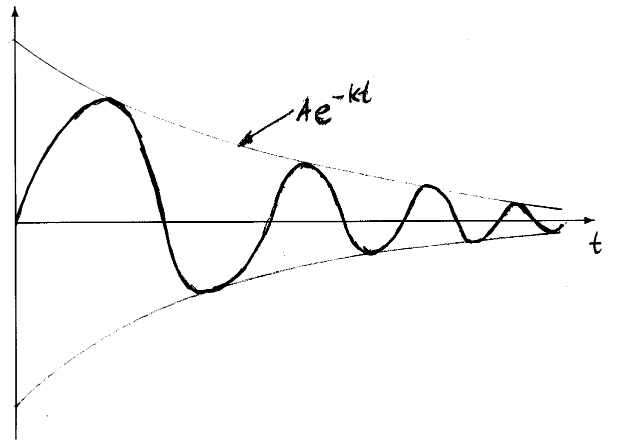
Rozwiązanie to osiąga ekstremum w punkcie

$$t = \frac{c_2 - kc_1}{kc_2},$$

a następnie monotonicznie dąży do zera.

c) $k^2 - \omega_0^2 < 0$. Pierwiastki wielomianu charakterystycznego są zespolone i rozwiązanie jest dane wzorem

$$x(t) = e^{-kt}(c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t),$$



Rysunek 4.1: Zanikające drgania tłumione

gdzie $\mu = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$.

Podobnie jak w przypadku drgań swobodnych, wprowadzamy nowe stałe dowolne

$$c_1 = A\cos\delta, \quad c_2 = A\sin\delta.$$

Możemy wtedy rozwiązanie zapisać w formie

$$x(t) = Ae^{-kt}\cos(\mu t - \delta).$$

Otrzymujemy więc rozwiązanie, które opisuje drgania z częstotliwością μ i przesunięciem fazowym δ, o monotonicznie malejącej amplitudzie Ae^{-kt} (rys. 4.1).

Widzimy więc, że jeśli ruch jest poddany dodatkowej sile oporu, to rozwiązanie wykładniczo maleje z czasem, przy czym wykładnik jest proporcjonalny do siły oporu. Oznacza to, że siła oporu tłumi swobodne drgania oscylatora harmonicznego na prostej. Jeśli tłumienie to jest duże ($k \geqslant \omega_0$), to wychylenie maleje (w zasadzie monotonicznie) do zera. Jeśli tłumienie jest małe ($k < \omega_0$), to otrzymujemy drgania o amplitudzie malejącej wykładniczo.

4.22 Przykład. Aby uzyskać niezanikające drgania oscylatora harmonicznego z tłumieniem, należy wprowadzić do równania wymuszenie zewnętrzne. Przeanalizujemy najciekawszy przypadek, tj. wymuszenia okresowego

$$B\cos\omega t.$$

Ponieważ znamy już rozwiązanie równania jednorodnego (4.26), więc wystarczy znaleźć szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = B\cos\omega t. \tag{4.27}$$

Rozwiązania takiego poszukujemy w postaci

$$z(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Wstawiając $z(t)$ do równania (4.27) i porównując współczynniki przy $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ otrzymujemy

$$c_1 = -\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)B}{4k^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}, \quad c_2 = \frac{2k\omega B}{4k^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}.$$

Stąd

$$z(t) = \frac{B}{4k^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}\big((\omega_0^2 - \omega^2)\cos \omega t + 2k\omega \sin \omega t\big).$$

Wprowadzamy przesunięcie fazowe δ, takie że $\operatorname{tg} \delta = \frac{2k\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$. Wtedy

$$z(t) = \frac{B}{\sqrt{4k^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \cos(\omega t - \delta). \tag{4.28}$$

Rozwiązanie równania (4.27) ma więc postać

$$x(t) = x_0(t) + \frac{B}{\sqrt{4k^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \cos(\omega t - \delta),$$

gdzie $x_0(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego znalezionym w przykładzie 4.21 i jego postać zależy od relacji między k i ω_0. Zauważmy, że we wszystkich przypadkach $x_0(t)$ dąży szybko do zera. Dla dużych wartości t rozwiązanie jest prawie dokładnie równe $z(t)$, co odpowiada drganiom z częstotliwością wymuszającą. Amplituda tych drgań jest przy tym największa, gdy $\omega_0^2 > 2k^2$, a częstotliwość wymuszająca jest równa

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2k^2}.$$

Warto zauważyć, że gdy $k \to 0$, amplituda drgań dąży do nieskończoności. Rozpatrzmy ten przypadek szczegółowo. Gdy znika mianownik we wzorze definiującym $z(t)$, odpowiada to sytuacji braku tłumienia ($k = 0$) i wymuszeniu o częstotliwości pokrywającej się z częstotliwością drgań własnych oscylatora nietłumionego ($\omega = \omega_0$). Równanie (4.27) przyjmuje wówczas postać

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega_0 t. \tag{4.29}$$

Rozwiązania szczególnego tego równania będziemy poszukiwać w postaci

$$z(t) = c_1 t \cos \omega_0 t + c_2 t \sin \omega_0 t.$$

Po wstawieniu tego wyrażenia do równania (4.29) znajdujemy

$$z(t) = \frac{Bt}{2\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Oznacza to, że rozwiązanie ogólne równania (4.29) jest dane wzorem

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{Bt}{2\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Składa się więc ono z dwóch drgań o tej samej częstotliwości ω_0: jednego o stałej amplitudzie A i przesunięciu fazowym δ, drugiego o zerowym przesunięciu fazowym i amplitudzie rosnącej liniowo z czasem do nieskończoności. Zjawisko takie nazywa się **rezonansem**.

Przypadek braku tłumienia ($k = 0$), ale częstotliwości wymuszającej różnej od częstotliwości drgań własnych, jest szczególnym przypadkiem drgań z tłumieniem, a rozwiązanie takiego problemu składa się z sumy dwóch funkcji periodycznych o różnych częstotliwościach. Rezonans jest efektem dążenia różnicy tych częstotliwości do zera.