1 Kombinatoryka

W tej serii zadań można znaleźć pojawiające się na egzaminach zadania dotyczące problemu wyznaczania prostych parametrów rozkładu w przypadku zgadnień kombinatorycznych. Zadania te wymagają podstawowej wiedzy kombinatorycznej oraz dyskretnych zmiennych losowych.

1. (Eg 48/4) W urnie znajduje się 16 kul, z których 8 jest białych i 8 czarnych. Losujemy bez zwracania 6 kul, a następnie 5 z pozostałych kul. Niech S_2 oznacza liczbę kul białych uzyskaną w drugim losowaniu. Oblicz $\mathbf{Var}S_2$.
   Odp: B-> $\frac{11}{12}$.
   Rozwiązanie. Stosujemy zmienne włączeniowe, $X_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,...,11\}$, gdzie $X_i = 1$ jeśli w i-tym losowaniu wyciągnięto białą kulę i 0 w przeciwnym przypadku. Oczywiście $S_2 = \sum_{i=7}^{11} X_i$. Zachodzi $\mathbf{E}X_i = \mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$, $i \in \{1,2,...,11\}$ oraz $\mathbf{E}X_iX_j = \mathbf{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{1}{2}\frac{7}{15} = \frac{7}{30}$, $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,...,12\}$. Zatem

$$\mathbf{E}S_2 = 5 \cdot \frac{1}{2} = 3, \ \ \mathbf{E}S_2^2 = 5\mathbf{P}(X_1 = 1) + 5 \cdot 4\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{5}{2} + \frac{14}{3} = \frac{43}{6}.$$

   Czyli

$$\mathbf{Var}S_2^2 = \frac{14}{3} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{86}{12} - \frac{75}{12} = \frac{11}{12}.$$

   ■

2. (Eg 49/6) Dysponujemy dwiema urnami: A i B. W urnie A są 2 kule białe i 3 czarne, w urnie B są 4 kule białe i 1 czarna. Wykonujemy trzy etapowe losowanie:

   (a) losujemy urnę;
   (b) z wylosowanej urny ciągniemy 2 kule bez zwracania, a następnie wrzucamy do tej urny 2 kule białe i 2 czarne;
   (c) z urny, do której wrzuciliśmy kule, losujemy jedną kulę.

   Okazało się, że wylosowana w trzecim etapie kula jest biała. Obliczyć p-stwo, że w drugim wylosowano 2 kule tego samego koloru.
   Odp: C-> $0,5$.
   Rozwiązanie. Mamy drzewo prawdopodobieństw przejścia do poszczególnych stanów

Stan1	P-p	Stan2	P-p	Stan3	P-p
$(2,3)$	$\frac{1}{2}$	$(2,5)$	$\frac{1}{10}$	biała	$\frac{2}{7}$
$(2,3)$	$\frac{1}{2}$	$(3,4)$	$\frac{6}{10}$	biała	$\frac{3}{7}$
$(2,3)$	$\frac{1}{2}$	$(4,3)$	$\frac{3}{10}$	biała	$\frac{4}{7}$
$(4,1)$	$\frac{1}{2}$	$(4,3)$	$\frac{6}{10}$	biała	$\frac{4}{7}$
$(4,1)$	$\frac{1}{2}$	$(5,2)$	$\frac{4}{10}$	biała	$\frac{5}{7}$.

   Niech $\mathbf{P}(3,b)$ będzie prawdopodobieństwem uzyskania białej kuli w 3 losowaniu,

$$\mathbf{P}(3,b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{7} = \frac{76}{140}.$$

   Z drugiej strony prawdopodobieństwo, że w drugim losowaniu pojawiły się kule biała i czarna, a w trzecim losowaniu biała $\mathbf{P}(2,(b,c);3,b)$ wynosi

$$\mathbf{P}(2,(b,c);3,b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{7} = \frac{38}{140}.$$

   Zatem $\mathbf{P}(2,(b,c)|3,b) = \mathbf{P}(2,(b,c);3,b)/\mathbf{P}(3,b) = \frac{38}{76} \cdot \frac{1}{2}$.

   ■

3. (Eg 50/7) W urnie znajduje się 20 kul białych, 20 kul czarnych i 20 kul niebieskich. Losujemy bez zwracania 24 kule. Niech

   (a) X oznacza liczbę wylosowanych kul białych;
   (b) Y oznacza liczbę wylosowanych kul czarnych;
   (c) Z oznacza liczbę wylosowanych kul niebieskich.

   Współczynnik korelacji zmiennych losowych $X + 2Y$ i Z, $\mathrm{Corr}(X + 2Y, Z)$ jest równy?
   Odp: B-> $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Rozwiązanie. Przypomnijmy, że $\mathrm{Corr}(X + 2Y, Z) = \frac{\mathbf{Cov}(X+2Y,Z)}{\sqrt{\mathbf{Var}(X+2Y)}\sqrt{\mathbf{Var}(Z)}}$. Łatwo zauważyć, że $\mathbf{Cov}(X, Z) = \mathbf{Cov}(Y, Z)$, $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{Var}(Y) = \mathbf{Var}(Z)$, zatem

$$\mathbf{Cov}(X + 2Y, Z) = \mathbf{Cov}(X, Z) + 2\mathbf{Cov}(Y, Z) = 3\mathbf{Cov}(X, Z).$$

   Podobnie

$$\mathbf{Var}(X + 2Y) = \mathbf{Cov}(X + 2Y, X + 2Y) = 5\mathbf{Var}(X, X) + 4\mathbf{Cov}(X, Y).$$

   Korzystamy zmiennych włączeniowych, żeby obliczyć $\mathbf{Cov}(X, Z)$. Niech $X = \sum_{i=1}^{24} 1_{X_i=1}$, gdzie $X_i = 1$ jeśli w i tym losowaniu pojawiła się biała kula. Analogicznie definiujemy Y_i, Z_i, $i \in \{1, 2, ..., 24\}$. Zachodzi

$$\mathbf{E}X = 24\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{24}{3} = 8,$$
$$\mathbf{E}X^2 = 24\mathbf{P}(X_1 = 1) + 24 \cdot 23\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 8 + \frac{24 \cdot 23 \cdot 19}{3 \cdot 59} = 8 \cdot \frac{496}{59}.$$

   Wreszcie

$$\mathbf{E}XY = 24 \cdot 23\mathbf{P}(X_1 = 1, Y_2 = 1) = \frac{24 \cdot 23}{3 \cdot 20} 3 \cdot 59 = 8 \cdot \frac{23 \cdot 20}{59}.$$

   czyli $\mathbf{Cov}(X, Y) = 8\left(\frac{460}{59} - \frac{472}{59}\right) = -8 \cdot \frac{12}{59}$ oraz $\mathbf{Var}(X) = 8\left(\frac{496}{59} - \frac{472}{59}\right) = 8 \cdot \frac{24}{59}$. Niech zatem $a = 8 \cdot \frac{12}{59}$, mamy

$$\mathbf{Cov}(X + 2Y, Z) = -3a, \quad \mathbf{Var}(X + 2Y) = 10a - 4a = 6a, \quad \mathbf{Var}(Z) = 2a.$$

   Ostatecznie

$$\mathrm{Corr}(X + 2Y, Z) = \frac{-3a}{\sqrt{6a}\sqrt{2a}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   ■

4. (Eg 51/10) Pan A przeznaczył 5 zł na pewną grę. W pojedynczej kolejce gry pan A wygrywa 1 zł z p-stwem 1/3 przegrywa 1 zł z p-stwem 2/3. Pan A kończy grę, gdy wszystko przegra lub gdy będzie miał 10 zł. P-stwo, że A wszystko przegra jest równe?
   Odp: D-> $0,97$.

   Rozwiązanie. Zadanie dotyczy prawdopodobieństwa ruiny. W celu rozwiązania budujemy niezależne zmienne losowe X_k, $k \geqslant 1$ takie, że $X_k = 1$ jeśli A wygrywa oraz $X_k = -1$ jeśli A przegrywa. Definiujemy $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n \geqslant 1$ oraz $S_0 = 0$. Okazuje się, że zmienne $M_n = 2^{S_n}$, $n \geqslant 0$ tworzą martyngał względem naturalnej filtracji. Rzeczywiście

$$\mathbf{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}\mathbf{E}2^{X_n} = M_{n-1}\left(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\right) = M_{n-1}.$$

   Zauważmy, że gracz kończy grę w momencie $\tau = \inf\{n \geqslant 0 : \ S_n \in \{-5, 5\}\}$. Zatem z twierdzenia Dooba (moment τ nie jest ograniczony ale nietrudno pokazać, że w tym przypadku również to twierdzenie działa) wynika, że $1 = \mathbf{E}M_\tau$. Niech teraz $a = \mathbf{P}(S_\tau = 5)$, $b = \mathbf{P}(S_{\tau=-5})$. Ponieważ jak łatwo sprawdzić $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$, więc $a + b = 1$, nadto

$$1 = \mathbf{E}M_\tau = a2^5 + b2^{-5}.$$

Mamy zatem układ równań

$$\begin{cases} a+b & = & 1 \\ a2^5 + b2^{-5} & = & 1 \end{cases}$$

Stąd $a = \frac{2^5-1}{2^{10}-1}$, $b = \frac{2^{10}-2^5}{2^{10}-1}$. Szukana wartość to $b \simeq 0,97$.

■

5. (Eg 52/2) W urnie znajduje się 100 ponumerowanych kul o numerach $1, 2..., 100$. Losujemy bez zwracania 10 kul, zapisujemy numery, kule zwracamy do urny. Czynność te powtarzamy 10 razy. Oblicz wartość oczekiwaną liczby kul, które zostały wylosowane dokładnie dwa razy.
Odp: D-> $19,37$.

Rozwiązanie. Zadanie staje się proste jeśli zastosujemy zmienne włączeniowe, $1_{X_i=1}$, $i \in \{1, 2, ..., 100\}$, gdzie $X_i = 1$ jeśli dokładnie dwa razy kula z numerem i została wylosowana. Należy wyznaczyć $\mathbf{E}\sum_{i=1}^{100} 1_{X_i=1} = 100\mathbf{P}(X_1 = 1)$, gdyż $\mathbf{P}(X_i = 1)$ są identyczne. Pozostaje zauważyć, że

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^8.$$

Stąd $\mathbf{E}\sum_{i=1}^{100} 1_{X_i=1} = 45 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^8 \simeq 19,37$.

■

6. (Eg 53/10) Z urny, w której jest 6 kul czarnych i 4 białe losujemy kolejno bez zwracania po jednej kuli, tak długo aż wylosujemy kulę czarną. Wartość oczekiwana liczby wylosowanych kul białych jest równa?
Odp: B-> $\frac{4}{7}$.

Rozwiązanie. Przypomnijmy wzór $\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > k)$, dla zmiennych X o watotściach całkowitych dodatnich. Sprawdzamy, że

$$\mathbf{P}(X > 0) = 1, \ \ \mathbf{P}(X > 1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \ \ \mathbf{P}(X > 2) = \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15},$$
$$\mathbf{P}(X > 3) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{30}, \ \ \mathbf{P}(X > 4) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{210},$$

nadto $\mathbf{P}(X > k) = 0$ dla $k > 4$. Stąd $\mathbf{E}X = \frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{210} = \frac{120}{210} = \frac{4}{7}$.

■

7. (Eg 54/7) mamy dwie urny: I i II. Na początku doświadczenia w każdej z urn znajdują się 2 kule białe i 2 czarne. Losujemy po jednej kuli z każdej urny - po czym kulę wylosowaną z urny I wrzucamy do urny II, a te wylosowana z urny II wrzucamy do urny I. Czynność tę powtarzamy wielokrotnie. Granica (przy $n \to \infty$) p-stwa, iż obie kule wylosowane w n-tym kroku są jednakowego koloru, wynosi:?
Odp: C-> $\frac{3}{7}$.

Rozwiązanie. Zadanie rozwiązuje się metoda łańcuchów Markowa. Jest możliwych 5 stanów na liczbę kul białych w urnie I. Należy znaleźć prawdopodobieństwa przejścia w jednym kroku. Mamy

$$P = \begin{bmatrix} S & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \frac{9}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

należy wyznaczyć rozkład stabilny z równania $\pi M = \pi$ oraz warunku, że $\sum_{k=0}^{4} \pi_k = 1$. Nietrudno zauważyć symetrię macierzy skąd wynika, że $\pi_0 = \pi_4$, $\pi_1 = \pi_3$. Nadto natychmiast zauważamy, że $\pi_0 = \frac{1}{16}\pi_1$. Wystarczą zatem 2 równania (w terminach π_1 i π_2)

$$\begin{cases} \pi_1 &= \frac{7}{16}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 \\ 1 &= \frac{1}{8}\pi_1 + 2\pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

Skąd wynika, że $\pi_0 = \pi_4 = \frac{1}{70}$, $\pi_1 = \pi_3 = \frac{8}{35}$, $\pi_2 = \frac{18}{35}$. Obliczamy prawdopodobieństwa warunkowe wylosowania kul różnego koloru w zależności od stanu liczby kul białych w I urnie

$$\mathbf{P}((b,c)|0) = \mathbf{P}((b,c)|4) = 1, \;\; \mathbf{P}((b,c)|1) = \mathbf{P}((b,c)|3) = \frac{5}{8}, \;\; \mathbf{P}((b,c)|2) = \frac{1}{2}.$$

Dostajemy ze wzoru Bayesa dla stanów rozłożonych według π (czyli w granicy $n \to \infty$)

$$\mathbf{P}((b,c)) = 2 \cdot \frac{1}{70} + 2 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{35} + \frac{1}{2}\frac{18}{35} = \frac{4}{7}.$$

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego wynosi $\frac{3}{7}$.

■

8. (Eg 55/3) Wylosowano niezależnie 15 liczb z rozkładu symetrycznego ciągłego i ustawiono je w ciąg według kolejności losowania. Otrzymano 8 liczb dodatnich (każda z nich oznaczamy symbolem a) i 7 ujemnych (każdą z nich oznaczamy symbolem b). Obliczyć p-stwo, że otrzymano 6 serii, gdzie serią nazywamy ciąg elementów jednego typu, przed i za którym występuje element drugiego typu, na przykład w ciągu: *aaabbbbaabbbbba* jest 5 serii (3 serie elementów typu a i 2 serie elementów typu b).
   Odp: C-> $\frac{14}{143}$

   Rozwiązanie. Należy zauważyć, że zbiór Ω złożony ze wszystkich możliwych podzbiorów 8 elementowych w zbiorze 15 elementowym ma $\binom{15}{8}$ elementów. Teraz należy zauważyć, że seria będzie jednoznacznie wyznaczonym podzbiorem jeśli podamy od jakiego symbolu zaczynamy, a następnie długości ścieżek k_1, k_2, k_3 dla serii symbolu a oraz l_1, l_2, l_3 dla serii symbolu b. Oczywiście ścieżki muszą mieć długość dodatnią nadto $k_1 + k_2 + k_3 = 8$, $l_1 + l_2 + l_3 = 7$. Ogólnie liczba rozwiązań równania $x_1 + ... + x_k = n$ w liczbach naturalnych (bez zera) wynosi $\binom{n-1}{k-1}$. Zatem liczność zbioru A_6 złożonego z serii długości 6 wynosi

   $$|A_6| = 2 \cdot \binom{7}{2}\binom{6}{2}.$$

   Ostatecznie

   $$\mathbf{P}(A_6) = \frac{|A_6|}{||\Omega|} = \frac{14}{143}.$$

■

9. (Eg 56/4) Dysponujemy 5 identycznymi urnami. Każda z nich zawiera 4 kule. Liczba kul białych w i-tej urnie jest równa $i - 1$, gdzie $i = 1, 2, ..., 5$, pozostałe kule są czarne. Losujemy urnę, a następnie ciągniemy z niej jedną kulę i okazuje się, że otrzymana kula jest biała. Oblicz p-stwo, że ciągnąc drugą kule z tej samej urny (bez zwracania pierwszej) również otrzymamy kulę białą.
   Odp: D-> $\frac{2}{3}$.

   Rozwiązanie. Ze symetrii zadania jest jasne, że szansa wylosowania białej kuli w pierwszej rundzie wynosi $\frac{1}{2}$. Aby obliczyć szansę wyciągnięcia dwóch kul białych stosujemy wzór Bayesa

   $$\mathbf{P}((b,b)) = \sum_{i=1}^{5} \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{4}{2}} \frac{1}{5}.$$

   Zachodzi wzór kombinatoryczny $\sum_{i=1}^{5} \binom{i-1}{2} = \binom{5}{3}$ (trójkąt Pascala). Nadto $\binom{5}{3}/\binom{4}{2} = \frac{5}{3}$, stąd $\mathbf{P}((b,b)) = \frac{1}{3}$. To oznacza, że $\mathbf{P}((b,b)|b) = \frac{2}{3}$.

■

10. (Eg 57/1) Urna zawiera 5 kul o numerach: $0, 1, 2, 3, 4$. Z urny ciągniemy kulę, zapisujemy numer i kulę wrzucamy z powrotem do urny. Czynność tę powtarzamy, aż kula z każdym numerem zostanie wyciągnięta co najmniej raz. Oblicz wartość oczekiwaną liczby powtórzeń.
Odp: C-> $11\frac{5}{12}$.

Rozwiązanie. Tutaj łatwo zauważyć, że jeśli $T_1, ..., T_5$ będą czasami oczekiwania na kolejny nowy symbol, to $T_1 = 1$ nadto $T_{k+1} - T_k$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ma rozkład geometryczny z prawdopodobieństwem sukcesu $p_k = \frac{5-k}{5}$ (i wartości oczekiwanej $1/p_k$). Zatem

$$\mathbf{E}T_5 = 1 + \sum_{k=1}^{4} \mathbf{E}(T_{k+1} - T_k) = 1 + \sum_{k=1}^{4} \frac{5}{5-k} = 11\frac{5}{12}.$$

■

11. (Eg 58/7) W urnie znajduje się 20 kul: 10 białych i 10 czerwonych. Losujemy bez zwracania 8 kul, a następnie z pozostałych w urnie kul losujemy kolejne 6 kul. Niech S_8 oznacza liczbę wylosowanych kul białych wśród pierwszych 8 wylosowanych kul, a S_6 liczbę kul białych wśród następnych 6 kul. Oblicz $\mathbf{Cov}(S_8, S_8 + S_6)$.
Odp: C-> $\frac{12}{19}$.

Rozwiązanie. Oczywiście skorzystamy ze zmiennych włączeniowych. Niech X_i, $i \in \{1, ..., 14\}$ oznacza 1 jeśli w i tej rundzie pojawiła się biała kula i 0 w przeciwnym przypadku. Mamy $S_8 = \sum_{i=1}^{8} X_i$ oraz $S_6 = \sum_{i=9}^{16} X_i$. Zachodzi

$$\mathbf{E}S_8 = 8\mathbf{P}(X_1 = 1) = 4, \ \ \mathbf{E}(S_6) = 6\mathbf{P}(X_1 = 1) = 3.$$

Teraz

$$\mathbf{E}S_8^2 = 8\mathbf{P}(X_1 = 1) + 8 \cdot 7\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 4 + 56 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} = \frac{328}{19}.$$

Stąd

$$\mathbf{Var}S_8 = \frac{328}{19} - \frac{304}{19} = \frac{24}{19}.$$

Z drugiej strony

$$\mathbf{E}S_8S_6 = 48\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 48 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19}.$$

Co daje

$$\mathbf{Cov}(S_8, S_6) = \frac{216}{19} - \frac{228}{19} = -\frac{12}{19}.$$

Ostatecznie

$$\mathbf{Cov}(S_8, S_8 + S_6) = \mathbf{Var}S_8 + \mathbf{Cov}(S_8, S_6) = \frac{24}{19} - \frac{12}{19} = \frac{12}{19}.$$

■

12. (Eg 60/9) W urnie znajduje się 30 kul, na każdej narysowana jest litera i cyfra. Mamy:

   (a) 10 kul oznaczonych $X1$;
   (b) 6 kul oznaczonych $Y1$;
   (c) 8 kul oznaczonych $X2$;
   (d) 6 kul oznaczone $Y2$.

Losujemy bez zwracania 15 kul. Niech N_{X1} oznacza liczbę kul oznaczonych literą $X1$ wśród kul wylosowanych,a N_2 liczbę kul z cyfrą 2 wśród kul wylosowanych. Obliczyć $\mathbf{Var}(N_{X1}|N_2 = 5)$.
Odp: A-> $\frac{15}{16}$.

Rozwiązanie. Dokonujemy uproszczenia, mamy pięć kul wylosowanych z cyfrą 2. Zatem de facto losujemy 10 typu $X1$ lub $X2$, czyli ze zbioru 18 elementowego. W tym modelu probabilistycznym musimy policzyć wariancję zmiennej $\bar{N}_{X1}$ co robimy przez zmienne włączeniowe. Niech X_i, $i \in \{1, ..., 10\}$ będzie zmienną przyjmującą 1 jeśli na i-tej pozycji stoi $X1$ oraz 0 jeśli $X2$. Oczywiście $\bar{N}_{X1} = \sum_{i=1}^{10} 1_{X_i=1}$. Wyznaczamy

$$\mathbf{E}\bar{N}_{X1} = 10\mathbf{P}(X_1 = 1) = 10 \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{4}.$$

Nadto

$$\mathbf{E}\bar{N}_{X1}^2 = 10\mathbf{P}(X_1 = 1) + 90\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 10 \cdot \frac{5}{8} + 90 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{9}{15} = \frac{320}{8} = 40.$$

Stąd

$$\mathbf{Var}\bar{N}_{X1} = \frac{640}{16} - \frac{625}{16} = \frac{15}{16}.$$

■

13. (Eg 61/5) W urnie znajduje się 100 kul ponumerowanych od 1 do 100. Losujemy bez zwracania 25 kul i zapisujemy numery, a następnie wrzucamy kule z powrotem do urny. Czynność powtarzamy 5 razy. Oblicz wartość oczekiwaną liczby kul, które zostały wylosowane co najmniej 2 razy.
Odp: D-> $36,7$.

Rozwiązanie. Zadanie rozwiązujemy przez zmienne włączeniowe. Niech X_i, $i \in \{1, ..., 100\}$ przyjmuje wartość 1 jeśli kula z numerem i pojawiła się co najmniej 2 razy w losowaniu i 0 w przeciwnym przypadku. Oczywiście szukana odpowiedź to

$$\mathbf{E}\sum_{i=1}^{100} X_i = 100\mathbf{P}(X_1 = 1).$$

Żeby policzyć $\mathbf{P}(X_1 = 1)$ zauważmy, że w każdym z 5 losowań kula i miała prawdopodobieństwo $\frac{1}{4}$, że się pojawi. Zatem

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \sum_{k=2}^{5} \binom{5}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 - 5 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{47}{128}.$$

Czyli wynik to $100 \cdot \frac{47}{128} \simeq 36,7$.

■

14. (Eg 62/6) Z urny, w której są 2 kule białe i 3 czarne, wylosowane jedną kulę a następnie wrzucono ja z powrotem dorzucając kulę w tym samym kolorze co wylosowana. Następnie z urny wylosowano 2 kule, wrzucono je z powrotem dorzucając 2 kule identyczne jak wylosowane. Następnie wylosowano 3 kule. Okazało się, że są to 3 kule białe. Oblicz p-stwo, że w drugim losowaniu wylosowane kule różnych kolorów.
Odp: A-> $\frac{15}{29}$.

Rozwiązanie. Potrzebujemy struktury drzewa aby opisać kolejne losowania

Stan1	P-p	Stan2	P-p	Stan3	P-p
$(3,3)$	$\frac{2}{5}$	$(5,3)$	$\frac{1}{5}$	(b,b,b)	$\frac{5}{28}$
$(3,3)$	$\frac{2}{5}$	$(4,4)$	$\frac{3}{5}$	(b,b,b)	$\frac{1}{14}$
$(3,3)$	$\frac{2}{5}$	$(3,5)$	$\frac{1}{5}$	(b,b,b)	$\frac{1}{56}$
$(2,4)$	$\frac{3}{5}$	$(4,4)$	$\frac{1}{15}$	(b,b,b)	$\frac{1}{14}$
$(2,4)$	$\frac{3}{5}$	$(3,5)$	$\frac{8}{15}$	(b,b,b)	$\frac{1}{56}$

Wyznaczamy

$$\mathbf{P}(3,(b,b,b)) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{28} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{14} + \\ + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{56} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{14} + \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{56} = \frac{29}{25 \cdot 28}.$$

Teraz wyznaczamy

$$\mathbf{P}(2,(b,c);3,(b,b,b)) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{14}+\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{56} = \frac{16}{25\cdot 28}.$$

Stąd

$$\mathbf{P}(2,(b,c);3,(b,b,b)) = \frac{16}{29}.$$

■

15. (Eg 63/1)W urnie znajdują się kule, z których każda jest oznaczona jedną z liter alfabetu:

- 10 kul oznaczonych literą A.
- 20 kul oznaczonych literą B.
- 30 kul oznaczonych literą C.
- x kul oznaczonych innymi literami alfabetu.

Losujemy bez zwracania 9 kul z urny. Zmienne losowe N_A, N_B, N_C oznaczają, odpowiednio, liczbę wylosowanych kul z literami A, B, C. Jakie musi być x , aby zmienne losowe N_A+N_B oraz N_B+N_C były nieskorelowane.
Odp: C-> $x = 15$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze zmiennych A_i, B_i, C_i, X_i, $1 \leqslant i \leqslant 9$ gdzie zmienne przyjmują wartości 0 lub 1, przy czym 1 jeśli na pozycji w i-tym losowaniu wybrano odpowiednio A, B, C oraz inną literę. Zachodzi $N_A = \sum_{i=1}^{9} A_i$, $N_B = \sum_{i=1}^{9} B_i$ $N_C = \sum_{i=1}^{9} C_i$. Należy wyliczyć $\mathbf{Cov}(N_A, N_B)$, $\mathbf{Cov}(N_B, N_C)$, $\mathbf{Cov}(N_C, N_A)$. Zachodzi

$$\mathbf{E}N_A = 9\frac{10}{60+x},\quad \mathbf{E}N_B = 9\frac{20}{60+x},\quad \mathbf{E}N_C = 9\frac{30}{60+x},$$

nadto

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}N_AN_B &= 72\mathbf{E}A_1B_2 = 72\frac{10}{60+x}\frac{20}{59+x},\\
\mathbf{E}N_BN_C &= 72\mathbf{E}B_1C_2 = 72\frac{20}{60+x}\frac{30}{59+x},\\
\mathbf{E}N_CN_A &= 72\mathbf{E}C_1A_2 = 72\frac{30}{60+x}\frac{10}{59+x},\\
\mathbf{E}N_B^2 &= 72\mathbf{E}B_1B_2 + 9\mathbf{E}B_1^2 = 72\frac{20}{60+x}\frac{19}{59+x} + 9\frac{20}{60+x}.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(N_A, N_B) &= \frac{9\cdot 10\cdot 20}{60+x}(\frac{8}{59+x} - \frac{9}{60+x}) = \frac{9\cdot 10\dot{c}20(-x-51)}{(60+x)^2(59+x)},\\
\mathbf{Cov}(N_B, N_C) &= \frac{9\cdot 20\cdot 30}{60+x}(\frac{8}{59+x} - \frac{9}{60+x}) = \frac{9\cdot 20\cdot 30(-x-51)}{(60+x)^2(59+x)},\\
\mathbf{Cov}(N_B, N_C) &= \frac{9\cdot 30\cdot 10}{60+x}(\frac{8}{59+x} - \frac{9}{60+x}) = \frac{9\cdot 30\cdot 10(-x-51)}{(60+x)^2(59+x)},\\
\mathbf{Cov}(N_B, N_B) &= \frac{9\cdot 20}{60+x}(\frac{8\cdot 19}{59+x} + 1 - \frac{9\cdot 20}{60+x}) = \frac{9\cdot 20(x^2+91x+34\cdot 60)}{(60+x)^2(59+x)}.
\end{aligned}$$

Zatem $N_A + N_B$ i $N_B + N_C$ są nieskorelowane jeśli

$$0 = \mathbf{Cov}(N_A+N_B, N_B+N_C) = \mathbf{Cov}(N_A, N_B) + \mathbf{Cov}(N_C, N_A) + \mathbf{Cov}(N_B, N_B) + \mathbf{Cov}(N_B, N_C)$$

co jest równoważne

$$-1100(x+51)+20(x^2+91x+34\cdot 60)=0.$$

Przekształcając to równanie

$$x^2+36x-765=0.$$

Rozwiązaniami tego równanie są $x=\frac{-36\pm 66}{2}$, czyli $x_1=15$ i $x=-51$. Interesują nas wyłącznie rozwiązania dodatnie zatem $x=15$.

■