8. Własności elementów pierścienia

Przypominamy, że przez pierścień rozumiemy pierścień przeminenny z 1.

8.1. Definicja. *Niech R będzie pierścieniem, zaś $A \subseteq R$ dowolnym podzbiorem. Podpierścieniem pierścienia R generowanym przez A nazywamy najmniejszy podpierścień zawierający zbiór A. Oznaczamy go symbolem $\langle A \rangle$.*

Jest jasne, że część wspólna podpierścieni pierścienia R jest podpierscieniem, zatem podpierścień generowany przez A istnieje i jest nim część wspólna wszystkich podpierścieni R zawierających zbiór A. Jest także jasne, ze $\langle A \rangle = \langle A \cup \{1\} \rangle$.

8.2. Przykład. Niech $d \in \mathbb{Z}$ będzie liczbą całkowitą, $d \neq 1$, która nie jest podzielna przez kwadrat liczby naturalnej różnej od 1 — taką liczbę nazywamy bezkwadratową. Oznaczmy przez $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ podpierścień ciała liczb zespolonych generowany przez $\sqrt{d}$ — jego elementami są liczby postaci $a + b\sqrt{d}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.
Zbiór liczb tej postaci jest podpierścieniem również wtedy, gdy opuścimy założenie, że liczba d jest bezkwadratowa, jednak przykłady spełniające to założenie będą dla nas bardziej interesujące.

8.3. Definicja. *Element $x \in R$ nazywamy* **dzielnikiem zera** *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element niezerowy $y \in R$, dla którego $xy = 0$.*
Element $x \in R$ nazywamy **odwracalnym** *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element $y \in R$, zwany* **odwrotnością** *elementu x, dla którego $xy = 1$.*
Element $x \in R$ nazywamy **nilpotentnym** *jeżeli istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której $x^n = 0$.*

8.4. Uwaga. W pierścieniu niezerowym 0 *jest* dzielnikiem zera. W każdym pierścieniu 0 jest elementem nilpotentnym.
8.5. Uwaga. Można skracać przez elementy, które nie są dzielnikami zera, to znaczy: jeżeli x nie jest dzielnikiem zera i $xy = xz$ to $y = z$.
8.6. Uwaga. Element odwracalny nie jest dzielnikiem zera. Jego odwrotność jest wyznaczona jednoznacznie. Zbiór elementów odwracalnych, z jedynką jako elementem neutralnym, jest grupą ze względu na mnożenie.
8.7. Przykład. W pierścieniu $\mathbb{Z}_n$ dzielnikami zera są te liczby k, dla których $(k, n) > 1$. Pozostałe elementy są odwracalne.

Ten ostatni przykład łatwo uogólnić do następującego stwierdzenia.

8.8. Stwierdzenie. *W pierścieniu skończonym, element nie będący dzielnikiem zera jest odwracalny.*

Dowód. Niech $0, x_1, \ldots, x_n$ będzie listą elementów rozpatrywanego pierścienia. Rozpatrzmy element x, który nie jest dzielnikiem zera. Z założenia o elemencie x i Uwagi 8.5 wynika, że iloczyny $xx_1, \ldots, xx_n$ są parami różne i że żaden z nich nie jest zerem. Zatem rozpatrywane iloczyny, to wszystkie niezerowe elementy pierścienia. Wobec tego któryś z nich jest jedynką, czyli istotnie x jest odwracalny. $\square$

8.9. Definicja. *Niezerowy pierścień przemienny z jedynką, który nie ma niezerowych dzielników zera, nazywamy* **dziedziną całkowitości**, *albo po prostu* **dziedziną**.

Z Uwagi 8.5 i ze Stwierdzenia 8.8 natychmiast wynikają następujące fakty.

8.10. Stwierdzenie. *W dziedzinie całkowitości obowiązuje prawo skracania (przez elementy niezerowe) dla mnożenia.*

8.11. Stwierdzenie. *Skończona dziedzina całkowitości jest ciałem.*