Dodatek A

Dygresje: dodatkowy materiał, omawiany na wykładzie

A.1 Twierdzenie Stolza

Poniższe twierdzenie pozwala w wielu przypadkach obliczać granice ciągów a_n/b_n, gdy $a_n, b_n \to +\infty$, i stanowi dla ciągów odpowiednik tak zwanej reguły de l'Hospitala.[1]

Twierdzenie A.1 (Twierdzenie Stolza)**.** *Załóżmy, że ciąg (b_n) jest ściśle monotoniczny oraz $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $(a_n) \subset \mathbb{R}$ i istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = g,$$

a ponadto zachodzi któryś z następujących warunków:

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$*,*

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$*,*

to wówczas ciąg (a_n/b_n) jest zbieżny, a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g.$$

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności założymy, że ciąg b_n jest rosnący (zawsze można rozpatrzeć $-a_n$ i $-b_n$). Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\eta \in (0, 1/2]$; konkretną wartość η dobierzemy do ε później. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$g - \eta < \frac{a_{s+1} - a_s}{b_{s+1} - b_s} < g + \eta \qquad \text{dla wszystkich } s \geq k.$$

Ciąg (b_n) jest rosnący, więc $b_{s+1} - b_s > 0$. Mnożąc obie nierówności przez tę liczbę, otrzymujemy

$$(b_{s+1} - b_s)(g - \eta) < a_{s+1} - a_s < (b_{s+1} - b_s)(g + \eta), \qquad s \geq k.$$

[1]Jeśli Czytelnik nie zna tej nazwy, niech się nie martwi; jeśli zaś zna ją ze słyszenia, to niech nie stosuje bezmyślnie nieodpowiednich narzędzi, szczególnie wtedy, gdy nie jest pewien, skąd się one właściwie wzięły.

Niech $n > m \geq k$. Dodając powyższe nierówności dla $s = m, m+1, \ldots, n-1$, a następnie dzieląc wynik przez liczbę dodatnią $b_n - b_m$, sprawdzamy, że

$$g - \eta < \frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} < g + \eta \qquad \text{dla wszystkich } n > m \geq k. \tag{A.1}$$

Od tego momentu rozumowanie jest nieco inne w każdym z dwóch przypadków.

Przypadek (i): $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Ustalmy w nierównościach (A.1) liczbę $m \geq k$ i przejdźmy do granicy $n \to \infty$. Korzystając ze Stwierdzenia 2.13 i arytmetycznych własności granicy, otrzymujemy

$$g - \eta \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} = \frac{a_m}{b_m} \leq g + \eta.$$

Jeśli więc $\eta > 0$ jest jakąkolwiek liczbą z przedziału $(0, \varepsilon)$, powiedzmy $\eta = \varepsilon/2$, to

$$\left| \frac{a_m}{b_m} - g \right| \leq \eta < \varepsilon \qquad \text{dla wszystkich } m \geq k,$$

co kończy dowód twierdzenia Stolza w przypadku (i).

Przypadek (ii): $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Ustalmy w nierównościach (A.1) liczbę $m = k$

Uwaga. Cała reszta dowodu w tym przypadku jest formalizacją następującego intuicyjnego i nieścisłego spostrzeżenia: $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n) \approx g$ *dla dużych* n*, więc przyrosty ciągu* a_n *są z grubsza, z dokładnością do stałego czynnika, takie, jak przyrosty ciągu* b_n*. Zatem ułamek* a_n/b_n*, który dopiero chcemy zbadać, powinien różnić się mało od ułamka* $(a_n - a_k)/(b_n - b_k)$*; spodziewamy się, że dla* n *znacznie większych od* k *liczby* a_k *i* b_k *są mało istotnymi dodatkami do* a_n *i* b_n*.*

Spróbujmy tę intuicję doprecyzować. Obliczmy w tym celu różnicę liczb a_n/b_n oraz $(a_n - a_k)/(b_n - b_k)$. Prosty rachunek daje

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| &= \left| \frac{a_n(b_n - b_k) - b_n(a_n - a_k)}{b_n(b_n - b_k)} \right| = \left| \frac{-a_n b_k + b_n a_k}{b_n(b_n - b_k)} \right| \\ &= \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \cdot \left| \frac{b_k}{b_n - b_k} \right| + \left| \frac{a_k}{b_n - b_k} \right| \\ &\leq \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \eta + \eta \qquad \text{dla } n > n_1 = n_1(k, \eta) > k. \end{aligned} \tag{A.2}$$

(Proszę zauważyć: $b_n \to +\infty$, więc przy *ustalonym* k mamy $b_k/(b_n - b_k), a_k/(b_n - b_k) \to 0$ dla $n \to \infty$, zatem wartości bezwzględne obu tych ułamków są małe, gdy n jest dostatecznie duże). Zatem dla dostatecznie dużych n

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| + \left| \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| \leq \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \eta + \eta + |g| + \eta,$$

stąd zaś

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \frac{|g| + 2\eta}{1 - \eta} \leq 2|g| + 4\eta \leq 2|g| + 2 =: M, \qquad n > n_1.$$

Możemy więc nierówność (A.2) przepisać w postaci

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| \leq (M+1)\eta, \qquad n > n_1.$$

Zatem, dzięki warunkowi (A.1), dla $n > n_1$ jest

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - g\right| \leq \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k}\right| + \left|\frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} - g\right| \leq (M+1)\eta + \eta = (2|g| + 4)\eta.$$

Wystarczy teraz dobrać $\eta < \min\left(\frac{1}{2}, \varepsilon/(2|g|+4)\right)$; otrzymamy wtedy $|(a_n/b_n) - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > n_1$. $\square$

Ćwiczenie A.2. Analizując starannie powyższe rozumowanie, sprawdzić, że ostatnie twierdzenie wolno stosować także wtedy, gdy $g = \pm\infty$ (tzn. do obliczania granic niewłaściwych).

Przykład A.3. Wykażemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ jest

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}\,.$$

Zastosujemy Twierdzenie Stolza dla $a_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ i $b_n = n^{k+1}$. Ciąg b_n jest rosnący i rozbieżny do $+\infty$; to połowa założeń twierdzenia. Sprawdźmy więc jeszcze, że $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n) \to 1/(k+1)$, gdy $n \to \infty$. Mamy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}}$$

Korzystając ze wzoru na różnicę $(k+1)$-szych potęg, a następnie dzieląc licznik i mianownik przez n^k, otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^k + (n+1)^{k-1}n + \cdots + n^k} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} + \cdots + 1}\,.$$

Z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy nietrudno wywnioskować, że dla $n \to \infty$ licznik ostatniego ułamka jest zbieżny do 1, a mianownik (w którym jest $k+1$ składników) do $k+1$. $\square$

Przykład A.4. Jeśli ciąg x_n jest zbieżny do granicy x, to ciąg średnich arytmetycznych

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

też jest zbieżny do granicy x. Istotnie, biorąc w twierdzeniu Stolza $a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $b_n = n$, otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{x_{n+1}}{(n+1) - n} = x_{n+1} \to x,$$

a zatem także

$$A_n = \frac{a_n}{b_n} \to x\,.$$

Przykład A.5. Jeśli ciąg liczb dodatnich x_n jest zbieżny do granicy $x \geq 0$, to ciąg średnich geometrycznych

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

też jest zbieżny do granicy x. Szczegóły dowodu, który można przeprowadzić, korzystając z poprzedniego przykładu oraz ciągłości funkcji wykładniczej i logarytmu, pozostawimy Czytelnikom. $\square$

Zadanie A.6. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}\,.$$

Wskazówka. Zauważyć, że $x_n = n^n/(1+n)^n$ ma granicę $1/e$ i skorzystać z poprzedniego przykładu.

Przykład A.7. Implikacji, która jest treścią twierdzenia Stolza, *nie można odwrócić.* Jeśli np. $a_n = 3n - (-1)^n$, $b_n = 3n + (-1)^n$, to łatwo zauważyć, że b_n rośnie monotonicznie do $+\infty$ i, oczywiście,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3 - \frac{(-1)^n}{n}}{3 + \frac{(-1)^n}{n}} \to \frac{3}{3} = 1,$$

ale nietrudno sprawdzić, że $a_{n+1} - a_n = 3 + 2 \cdot (-1)^n$, $b_{n+1} - b_n = 3 - 2 \cdot (-1)^n$, więc ciąg $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n)$ ma na przemian wyrazy równe $1/5$ i 5, a to znaczy, że jest rozbieżny. Nie należy więc bez zastanowienia pisać $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \ldots$, gdyż może się okazać, że pierwsza granica istnieje, a druga – nie.

A.2 Zasadnicze twierdzenie algebry

Bardzo ważnym twierdzeniem, wykorzystywanym w różnych działach matematyki, jest następujący wynik.

Twierdzenie A.8 (zasadnicze twierdzenie algebry). *Każdy różny od stałej wielomian zmiennej zespolonej o współczynnikach zespolonych ma w ciele $\mathbb{C}$ co najmniej jeden pierwiastek.*

Podamy tu — opowiedziany we współczesnym języku – dowód tego twierdzenia, wykorzystujący własności funkcji ciągłych i podany przez C.F. Gaussa na przełomie XVIII i XIX wieku. Dowód wykorzystuje dwa lematy. Pierwszy z nich orzeka, że każdy wielomian zespolony osiąga kres dolny swojego modułu. To nie jest fakt całkowicie oczywisty, gdyż płaszczyzna $\mathbb{C}$ nie jest zbiorem zwartym.

Lemat A.9. *Jeśli $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ dla $z \in \mathbb{C}$, gdzie $n \geq 1$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$, to istnieje punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ taki, że*

$$|P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$$

Dowód Lematu A.9. Bez zmniejszenia ogólności, mnożąc w razie potrzeby wielomian przez stałą, przyjmiemy, że $a_n = 1$. Niech $R > 1$ będzie dużą liczbą, której konkretną wartość dobierzemy za chwilę. Niech $M = 1 + n \max_{j=0,\ldots,n-1} |a_j|$. Dla wszystkich $|z| \geq R$ otrzymujemy po prostym rachunku, korzystając z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= |z|^n \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right) \\
&\geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|}{R}\right) \quad \text{gdyż } |z|^n > |z|^{n-1} > \ldots > |z| \geq R > 1 \\
&> R^n \left(1 - \frac{M}{R}\right) \quad \text{gdyż } |z| \geq R \text{ i } M > |a_{n-1}| + \cdots + |a_0| \\
&> \frac{R^n}{2} > |a_0| + 1 = |P(0)| + 1,
\end{aligned}$$

pod warunkiem, że liczba $R > 1$ została wybrana tak, aby

$$\frac{M}{R} < \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad R > \sqrt[n]{2(|a_0| + 1)},$$

co łatwo można zagwarantować. Zatem, poza kołem domkniętym $K_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le R\}$ funkcja $|P|$ przyjmuje wartości większe od liczby $|P(0)| + 1$. Ponieważ $0 \in K_R$, więc

$$\inf_{z \in K_R} |P(z)| \le |P(0)| < |P(0)| + 1 \le \inf_{z \in \mathbb{C} \setminus K_R} |P(z)|$$

i dlatego

$$\inf_{z \in K_R} |P(z)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

Koło domknięte K_R jest zbiorem zwartym, a $|P|\colon K_R \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów (patrz Twierdzenie 5.64 i Uwaga 5.66) wynika, że istnieje taki punkt $z_0 \in K_R$, iż

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in K_R} |P(z)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|. \qquad \square$$

Lemat A.10. *Jeśli* $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *dla* $z \in \mathbb{C}$*, gdzie* $n \ge 1$*,* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *i* $a_n \ne 0$*, a* $z_0 \in \mathbb{C}$ *jest punktem takim, że*

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|,$$

to wówczas $P(z_0) = 0$.

Dowód Lematu A.10. Dla wielomianów stopnia 1 lemat jest oczywisty: każdy taki wielomian ma pierwiastek z_0 i w nim osiąga kres dolny swojego modułu.

Niech więc P będzie wielomianem zespolonym stopnia $n > 1$. Przypuśćmy, że

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| > 0$$

Rozpatrzmy wielomian pomocniczy $Q(z) = P(z + z_0) \cdot \overline{P(z_0)}$ (przesuwamy wielomian P i mnożymy go przez stałą). Mamy $Q(0) = P(z_0) \cdot \overline{P(z_0)} = |P(z_0)|^2 > 0$, więc Q spełnia zależność

$$|Q(0)| = Q(0) = \inf_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)| > 0. \tag{A.3}$$

Wyróżnijmy teraz najniższą dodatnią potęgę z, która w Q występuje ze współczynnikiem różnym od zera, tzn. wybierzmy $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tak, aby

$$Q(z) = b_0 + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \cdots + b_n z^n = b_0 + b_k z^k + z^k q(z),$$

gdzie $b_0 = Q(0) > 0$ i $q(z) = b_{k+1} z + b_{k+2} z^2 + \cdots + b_n z^{n-k}$. Gdy $k = n$, to po prostu $q(z) = 0$.

Oszacujemy $|Q(z)|$, starając się wskazać punkt z tak, aby otrzymać $|Q(z)| < |Q(0)| = Q(0) = b_0$ i uzyskać sprzeczność, która zakończy dowód. Na mocy nierówności trójkąta

$$|Q(z)| \le |b_0 + b_k z^k| + |z|^k |q(z)|.$$

Niech $z = re^{it}$, gdzie $r = |z| > 0$ i $t = \arg z \in \mathbb{R}$. Ustalmy małą liczbę $\varepsilon > 0$, której wartość dobierzemy później.

Ponieważ q jest (jak każdy wielomian) funkcją ciągłą i $q(0) = 0$, więc istnieje $\delta > 0$ takie, że dla wszystkich $|z| = r \in (0, \delta)$ jest $|q(z)| < \varepsilon$. Wtedy

$$Q(z)| < |b_0 + b_k z^k| + r^k \varepsilon\,.$$

Argument t liczby z wybierzemy tak, aby $b_k z^k = b_k r^k \exp(itk)$ było *liczbą rzeczywistą ujemną*. Zapiszmy b_k w postaci $b_k = |b_k| \exp(is)$, gdzie $s = \arg b_k$. Wtedy

$$b_k z^k = |b_k| \exp(is) \cdot r^k \exp(itk) = |b_k| r^k \exp\bigl(i(s+tk)\bigr) = -|b_k| r^k < 0$$

np. dla $s + tk = \pi$, tzn. dla

$$t = \frac{\pi - s}{k} = \frac{\pi - \arg b_k}{k}\,.$$

Zatem, dla $z = re^{it}$, gdzie $r \in (0, \delta)$ i $t = \frac{\pi - \arg b_k}{k}$, jest

$$\begin{aligned}
|Q(z)| &< \Bigl|b_0 - |b_k| r^k\Bigr| + r^k \varepsilon \\
&= b_0 - |b_k| r^k + r^k \varepsilon \qquad \text{gdy } r < \delta_1 := \min\left(\frac{b_0}{\sqrt[k]{|b_k|}}, \delta\right) \\
&= b_0 - \frac{|b_k|}{2} r^k \qquad \text{gdy } r < \delta_1 \text{ oraz } \varepsilon = \frac{|b_k|}{2} \\
&< b_0 = Q(0) = |Q(0)|\,.
\end{aligned}$$

To jest sprzeczność, gdyż $|Q(0)| = \inf |Q|$. Musi więc być $Q(0) = |P(z_0)|^2 = 0$. □

Czytelnik–koneser zauważył być może, że w ostatnim dowodzie posługiwaliśmy się w gruncie rzeczy rozwinięciem Taylora–Maclaurina wielomianu Q w zerze, wyodrębniwszy zeń najważniejszy składnik $b_k z^k$. Wielomian $q(z)$ to wynik dzielenia reszty przez z^k.

Dowód zasadniczego twierdzenia algebry. Niech P będzie różnym od stałej wielomianem zespolonym. Na mocy Lematu A.9, istnieje $z_0 \in \mathbb{C}$ takie, że

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|\,.$$

Z Lematu A.10 wynika, że $P(z_0) = 0$. □

Definicja A.11. Niech $k \in \mathbb{N}$. Liczba z_0 nazywa się k-krotnym pierwiastkiem wielomianu P wtedy i tylko wtedy, gdy P jest podzielny przez jednomian $(z - z_0)^k$, ale nie jest podzielny przez $(z - z_0)^{k+1}$.

Wniosek A.12 (rozkład wielomianu zespolonego na czynniki liniowe). *Jeśli P jest wielomianem zespolonym stopnia $n \geq 1$, $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, to istnieją liczby $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ takie, że z_j jest k_j-krotnym pierwiastkiem P dla $j = 1, \ldots, m$ oraz*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n\,.$$

Zachodzi równość

$$P(z) = a_n \cdot \prod_{j=1}^{m} (z - z_j)^{k_j}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Dowód. Dla $n = 1$ teza wniosku jest oczywista. Dla $n > 1$ tezy dowodzimy przez indukcję, posługując się zasadniczym twierdzeniem algebry. $\square$

Wniosek A.13 (rozkład wielomianu rzeczywistego na czynniki). *Jeśli P jest wielomianem rzeczywistym stopnia $n \geq 1$, $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ (gdzie $a_j \in \mathbb{R}$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$ i $a_n \neq 0$), to P jest iloczynem czynników liniowych i takich trójmianów kwadratowych o współczynnikach rzeczywistych, które nie mają pierwiastków rzeczywistych. Niektóre z tych czynników mogą być równe.*

Dowód. Na mocy poprzedniego wniosku,

$$P(x) = a_n \cdot \prod_{j=1}^{m} (x - z_j)^{k_j}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{A.4}$$

gdzie z_j są *zespolonymi* pierwiastkami wielomianu P. Ponieważ wszystkie współczynniki wielomianu są rzeczywiste, więc mamy także

$$P(x) = \overline{P(x)} = a_n \cdot \prod_{j=1}^{m} (x - \overline{z_j})^{k_j}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Zatem: jeśli $z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem P, to i $\overline{z_j}$ jest pierwiastkiem P. Ponieważ

$$(x - z_j)(x - \overline{z_j}) = x^2 - 2\mathrm{Re}\, z_j \cdot x + |z_j|^2$$

jest trójmianem kwadratowym o współczynnikach rzeczywistych, którego nie można w $\mathbb{R}$ rozłożyć na czynniki liniowe (bo pierwiastki są w $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$!)), więc łącząc w pary odpowiednie czynniki prawej strony (A.4), rozłożymy P na pewną liczbę czynników liniowych (odpowiadających rzeczywistym pierwiastkom P, liczonym z krotnościami) i pewną liczbę czynników kwadratowych (odpowiadającym parom pierwiastków $z_j, \overline{z_j} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ wielomianu P, również liczonym z krotnościami). Żaden czynnik kwadratowy nie ma pierwiastków w $\mathbb{R}$.
$\square$

Zadanie A.14. Wykazać, że $x_0 \in \mathbb{R}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu P o współczynnikach rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(x_0) = P'(x_0) = \ldots = P^{(k-1)}(x_0), \qquad P^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Wskazówka. Posłużyć się definicją, twierdzeniem Bezout (znanym ze szkolnego kursu matematyki) i wzorem Leibniza na wyższe pochodne iloczynu dwóch funkcji.

Zadanie A.15. Niech

$$Q(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{\text{skończ.}} a_{k_1 k_2 \ldots k_m} z^{k_1} \cdot z^{k_2} \cdot \ldots \cdot z^{k_m}$$

będzie różnym od stałej wielomianem $m > 1$ zmiennych zespolonych o współczynnikach $a_{k_1 k_2 \ldots k_m} \in \mathbb{C}$. Wykazać, że Q ma co najmniej jeden pierwiastek. Czy zbiór pierwiastków takiego wielomianu może być skończony?

A.3 Metoda stycznych (Newtona)

Omówimy w tym podrozdziale prostą wersję tak zwanej metody stycznych Newtona, służącej do przybliżonego rozwiązywania równań typu $f(x) = 0$.

Zacznijmy od przytoczenia zadania, które w połowie lat 90-tych dwudziestego wieku pojawiło się na zawodach drugiego etapu Olimpiady Matematycznej.

Zadanie A.16. Dane są dwa ciągi liczb rzeczywistych, $x_1 = y_1 = 1$ oraz

$$y_{n+1} = \frac{y_n + 2}{y_n + 1}, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykazać, że $x_{n+1} = y_{2^n}$ dla wszystkich $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Zadanie ma kilka rozwiązań. To, które przedstawimy, nie jest najkrótsze, ale ma tę zaletę, że pozwala głębiej zrozumieć, skąd pochodzi problem i co jest w nim istotne.

Rozwiązanie. Wypiszmy tabelkę z początkowymi wyrazami obu ciągów.

n	1	2	3	4	5
y_n	1	1,5	1,4	1,416...	1,41379...
y_n^2	1	2,25	1,96	2,006...	1,9988...
x_n	1	1,5	1,416...	1,4142...	1,4142135...
x_n^2	1	2,25	2,006...	2,000006...	2,000000000004...

Widać, że kwadraty liczb x_n są coraz bliższe 2 (podobnie zresztą jak kwadraty liczb y_n). Łatwo jest zauważyć, że *gdyby ciąg x_n był zbieżny, to jego granicą byłaby liczba $g = \sqrt{2}$.* Dlaczego? Jeśli $\lim x_n = g$ istnieje, to musi spełniać równość[2] $2g \cdot g = g^2 + 2$, lub równoważnie $g^2 = 2$. Ponieważ wszystkie x_n są dodatnie, więc możliwość $g = -\sqrt{2}$ odrzucamy.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla ciągu y_n. Jeśli $\lim y_n = g$, to liczba g spełniałaby równość $g = (g + 2)/(g + 1)$ i była nieujemna, więc byłoby $g = \sqrt{2}$.

Pokażemy, że oba ciągi są zbieżne do $\sqrt{2}$. W tym celu wyrazimy zarówno x_n, jak i y_n, jawnymi wzorami.

Zbadajmy, jak zmieniają się różnice $y_n - \sqrt{2}$ i $x_n - \sqrt{2}$, gdy zmienia się liczba n. Ze wzoru na y_{n+1} wynika, że

$$\begin{aligned} y_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{y_n + 2}{y_n + 1} - \sqrt{2} = \frac{y_n + 2 - y_n\sqrt{2} - \sqrt{2}}{y_n + 1} \\ &= \frac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + 1} (1 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Gdy do y_{n+1} dodamy pierwiastek z dwóch, otrzymamy

$$y_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{y_n + \sqrt{2}}{y_n + 1} (1 + \sqrt{2}).$$

[2]Mnożymy obie strony wzoru rekurencyjnego przez $2x_n$ i przechodzimy do granicy, korzystając z twierdzenia o granicy sumy i iloczynu ciągów zbieżnych

(Wystarczy przepisać poprzedni rachunek, zastępując wszystkie minusy plusami). Krótko mówiąc,

$$y_{n+1} \pm \sqrt{2} = \frac{y_n \pm \sqrt{2}}{y_n + 1} \, (1 \pm \sqrt{2}) \, .$$

Można te dwa równania podzielić stronami,

$$\frac{y_{n+1} - \sqrt{2}}{y_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \, ,$$

i wywioskować stąd, że ciąg

$$z_n = \frac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + \sqrt{2}}$$

jest geometryczny, a jego iloraz jest równy $a = (1 - \sqrt{2})/(1 + \sqrt{2})$; dlatego

$$z_{n+1} = a \cdot z_n = a \cdot (a \cdot z_{n-1}) = \ldots = a^n \cdot z_1 = a^{n+1} \, .$$

Stąd łatwo wyliczamy (rozwiązując równanie z jedną niewiadomą):

$$y_n = \sqrt{2} \cdot \frac{1 + a^n}{1 - a^n} \, , \qquad \text{gdzie } a = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \, . \tag{A.5}$$

Ponieważ $|a| < 1$, więc $a^n \to 0$, a zatem $y_n \to \sqrt{2}$.

Z ciągiem x_n postępujemy tak samo: obliczamy $x_{n+1} \pm \sqrt{2}$, posługując się w tym celu zależnością x_{n+1} od x_n. Otrzymujemy tym razem

$$\begin{aligned} x_{n+1} \pm \sqrt{2} &= \frac{x_n^2 - 2x_n \cdot \sqrt{2} + 2}{2x_n} \\ &= \frac{(x_n \pm \sqrt{2})^2}{2x_n} \, . \end{aligned}$$

Jak wcześniej, dzielimy te dwa równania stronami, żeby pozbyć się niewygodnego mianownika:

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} \right)^2 \, .$$

Krótko mówiąc, jeśli $w_n = (x_n - \sqrt{2})/(x_n + \sqrt{2})$, to

$$w_{n+1} \; = \; w_n^2 \; = \; (w_{n-1}^2)^2 = \ldots = w_1^{2^n} \, .$$

Zachodzi więc równość

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = w_1^{2^n} = a^{2^n} \, .$$

Stąd

$$x_{n+1} = \sqrt{2} \cdot \frac{1 + a^{2^n}}{1 - a^{2^n}} \, , \qquad \text{gdzie } a = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \, . \tag{A.6}$$

Teza zadania jest prostym wnioskiem z otrzymanych wzorów (A.5), (A.6). $\square$

Wykazaliśmy więcej, niż wymagał autor zadania. Zanleźliśmy konkretne wzory na x_n i y_n. Sprawdziliśmy też, że każdy z tych ciągów składa się z wymiernych przybliżeń $\sqrt{2}$. Które przybliżenia są lepsze? Oczywiście te, które daje ciąg x_n. Wszak $x_{n+1} = y_{2^n}$. Z równości $w_{n+1} = w_n^2$, którą spełniają liczby $w_n = (x_n - \sqrt{2})/(x_n + \sqrt{2})$, można wywnioskować, że liczba cyfr znaczących przybliżenia $x_n \approx \sqrt{2}$ ulega z grubsza *podwojeniu*, gdy zwiększamy n o 1. (Intuicyjnie biorąc, powód jest taki: $w_n \approx 0$ z dużą dozą dokładności; przechodząc do w_{n+1}, błąd przybliżenia podnosimy do kwadratu. Proszę sprawdzić, jak zmienia się przy takiej operacji liczba zer po przecinku.) Postawmy teraz naturalne pytanie: *no dobrze, ale skąd właściwie wzięły się oba ciągi?* Czy to tylko przypadkowy temat jakiegoś olimpijskiego zadania?

Otóż nie. Ciąg y_n to kolejne przybliżenia $\sqrt{2}$ za pomocą *ułamków łańcuchowych*. Co to znaczy? Ponieważ $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2 - 1 = 1$, więc

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)}.$$

Postępując dalej podobnie, tzn. zastępując różnicę $\sqrt{2} - 1$ ułamkiem $1/(2 + (\sqrt{2}-1))$, otrzymamy coraz bardziej fantazyjne piętrowe ułamki:

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)}}, \qquad \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)}}}, \qquad \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)}}}}, \qquad \ldots$$

Gdybyśmy usunęli nawiasy $(\sqrt{2} - 1)$ i zostawili tylko jedynki w kolejnych licznikach, dwójki, plusy i kreski ułamkowe, otrzymalibyśmy liczby $y_n - 1$ (z przesunięciem numeracji i zapisane w niewygodnej postaci). Można to udowodnić przez indukcję.

Natomiast ciąg x_n to kolejne przybliżenia $\sqrt{2}$ otrzymywane *metodą stycznych.*[3] Jest to bardzo użyteczny sposób, który pozwala szybko i wygodnie znajdować przybliżone rozwiązania bardzo wielu równań – także i takich, których nie potrafimy rozwiązać jawnie.

Sformułujmy teraz precyzyjny, ogólny wynik.

Twierdzenie A.17 (metoda stycznych). *Załóżmy, że $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na $[a,b]$ i dwukrotnie różniczkowalną w (a,b). Załóżmy także, że $f(a) < 0 < f(b)$ oraz istnieją stałe $m_1 > 0$ i $M_2 > 0$ takie, że*

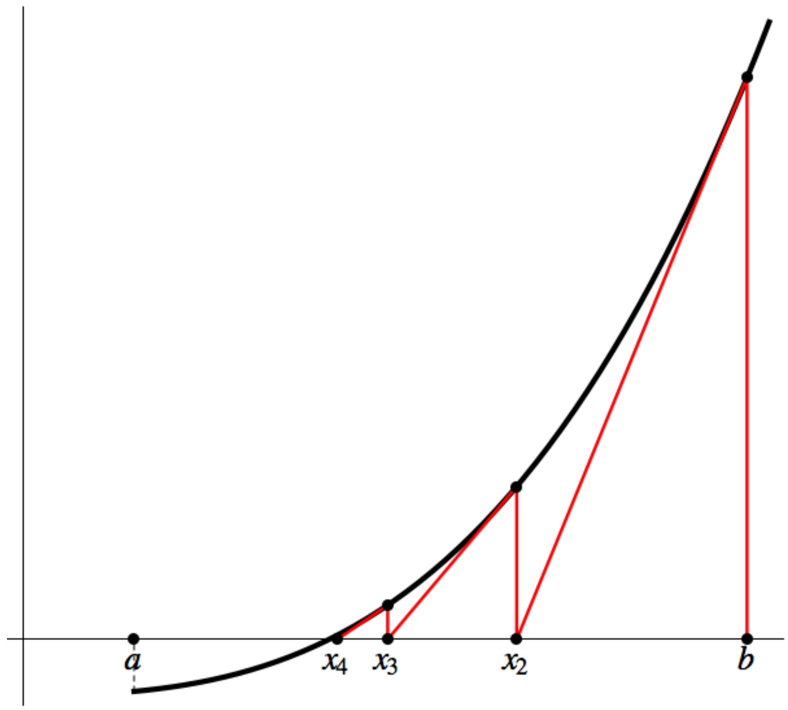
$$f'(x) > m_1 > 0, \quad 0 < f''(x) < M_2 \qquad \textit{dla wszystkich } x \in (a,b). \tag{A.7}$$

Wówczas ciąg rekurencyjny

$$x_1 = b, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

jest malejący, a jego granica $c = \lim x_n$ jest jedynym punktem przedziału $[a,b]$ takim, że $f(c) = 0$. Ponadto, zachodzi oszacowanie

$$|c - x_{n+1}| \le \frac{M_2}{2m_1}|c - x_n|^2, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{A.8}$$



Metoda stycznych: f jest rosnąca i wypukła na (a, b), wewnątrz tego przedziału ma jedno miejsce zerowe.

Uwaga A.18. Nietrudno zauważyć, że x_{n+1} jest miejscem zerowym stycznej do wykresu f, poprowadzonej w punkcie $(x_n, f(x_n))$; ma ona równanie

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

a zatem $y = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - x_n = -f(x_n)/f'(x_n)$, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy $x = x_{n+1}$. (Patrz także zamieszczony rysunek, który ułatwia zrozumienie całej sytuacji).

Dowód. Z założeń wynika, że f jest rosnąca i ściśle wypukła na $[a, b]$. Ponieważ $f(b) > 0 > f(a)$, więc f ma w (a, b) dokładnie jedno miejsce zerowe c (jedyność wynika z monotoniczności, a istnienie z własności Darboux).

Funkcja f jest ściśle wypukła, więc jej wykres leży nad dowolną swoją styczną. Korzystając z tej obserwacji i z założenia $f(x_1) = f(b) > 0$, łatwo dowodzimy przez indukcję, że $f(x_n) > 0$ $c < x_n + 1 < x_n \le b$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Istotnie, $b = x_1$, więc $f(x_1) > 0$, a stąd $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) < x_1$, gdyż $f' > 0$. Wykres f leży nad styczną poprowadzoną w punkcie $(x_1, f(x_1))$, a x_2 jest miejscem zerowym tej stycznej, zatem $f(x_2) > 0$ i $c < x_2$. To jest początek indukcji; krok indukcyjny wygląda praktycznie tak samo – szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

Ponieważ (x_n) jest malejący i ograniczony z dołu (przez c), więc ma granicę. Z ciągłości f i f' (zagwarantowanej przez *istnienie* f'') wynika, że $g = \lim x_n$ spełnia równość $g =$

[3]Wg. historyków matematyki, metodę stycznych Newton obmyślił ok. roku 1670.

$g - f(g)/f'(g)$. Stąd $f(g) = 0$, tzn. $g = c$, gdyż wiemy, że c jest jedynym miejscem zerowym funkcji f w przedziale (a, b).

Pozostaje wykazać nierówność (A.8). Wykorzystamy w tym celu wzór Taylora z resztą Lagrange 'a (patrz Wniosek 6.60). Wynika z niego, że

$$0 = f(c) = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(c - x_n)^2 \qquad \text{dla pewnego } \xi_n \in (c, x_n).$$

Dzieląc przez $f'(x_n)$, otrzymujemy

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + c - x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2 ,$$

lub równoważnie

$$c - x_{n+1} = c - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2 .$$

Ponieważ prawa strona jest ujemna, więc

$$|c - x_{n+1}| = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2 < \frac{M_2}{2m_1}|c - x_n|^2 .$$

(Skorzystaliśmy z oszacowań $0 < f'' < M_2$ i $f' > m_1 > 0$). Dowód jest zakończony. □

Uwaga A.19. Ciąg x_n jest nie tylko zbieżny do c, ale spełnia zależność

$$|c - x_{n+1}| \le A \cdot |c - x_n|^2 , \qquad n \in \mathbb{N} ,$$

gdzie A jest stałą; dlatego tempo zbieżności jest bardzo szybkie. Aby to zrozumieć, przypuśćmy na chwilę bez zmniejszenia ogólności, że $A > 1$. Gdy już wiemy, że dla pewnego n jest $|c - x_n| < 1/A^2$, to wówczas

$$|c - x_{n+1}| < \frac{1}{A^3}, \quad |c - x_{n+2}| < \frac{1}{A^5}, \quad |c - x_{n+3}| < \frac{1}{A^9}, \quad \ldots \quad , |c - x_{n+k}| < \frac{1}{A^{2k+1}}, \quad \ldots$$

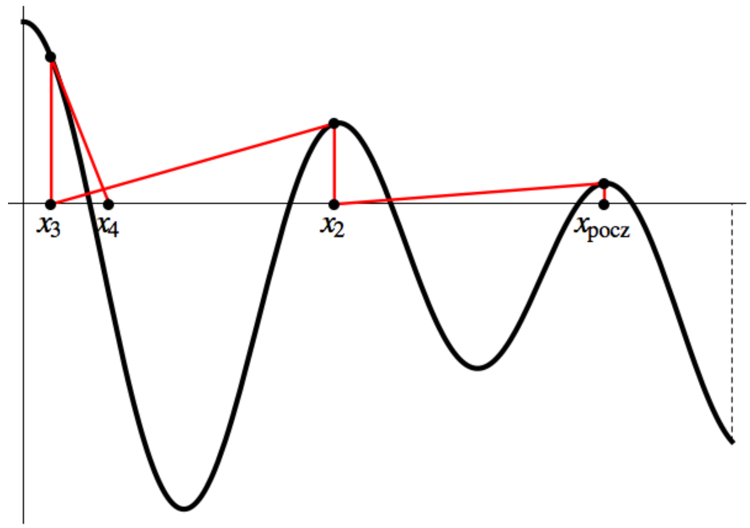
Zatem od pewnego momentu $n = n_0$ odstęp $|c - x_{n+k}|$ maleje wraz ze wzrostem k w takim tempie, jak $1/A^{2^k+1}$, czyli znacznie szybciej, niż np. ciąg geometryczy $1/A^k$.

Przykład A.20. Niech $f(x) = x^2 - 2$ dla $x \in [a, b]$, gdzie $a = 1$ i $b = 2$. Mamy $f'(x) = 2x > 2$ na (a, b) i $f''(x) \equiv 2$, a ponadto $f(a) = -1 < 0 < f(b) = 2$, więc f spełnia wszystkie założenia Twierdzenia A.17. W tym przypadku mamy

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - 2)}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}, \qquad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

Zatem, począwszy od x_2, otrzymujemy właśnie ciąg (x_n) z Zadania A.16. Tylko pierwszy wyraz jest inny, wszystkie następne są identyczne

Uwaga A.21. Założenie o monotoniczności i wypukłości f jest niezwykle istotne. Analogiczne twierdzenia można sformułować i udowodnić dla funkcji rosnących i wklęsłych, malejącychi wypukłych, oraz malejących i wklęsłych. Czytelnik zechce zastanowić się nad



Metoda stycznych: f ma kilka minimów i maksimów, nie jest ani wklęsła, ani wypukła.

sformułowaniami i zmianami w dowodzie. Ważna jest ogólna reguła: “rysowanie stycznych należy zaczynać od tego końca przedziału, gdzie $|f'|$ jest większy (tzn. wykres ma większe nachylenie”.

Jeśli f ma minima i maksima, a także przedziały wklęsłości i wypukłości, to nie ma żadnej gwarancji, że ciąg wyprodukowany metodą stycznych (1) w ogóle będzie zbieżny, (2) będzie zbieżny akurat do tego pierwiastka równania $f(c) = 0$, który leży najbliżej punktu x_1. Jeden z możliwych prostych przykładów takiej sytuacji przedstawiony jest na rysunku. Pełna i kompletna analiza zachowań takich ciągów dla różnych wyborów x_1 i dowolnych funkcji f dwukrotnie różniczkowalnych jest, w ogólności, zagadnieniem wykraczającym poza możliwości współczesnej matematyki. Takimi problemami zajmuje się dziedzina, nazywana *teorią układów dynamicznych*.