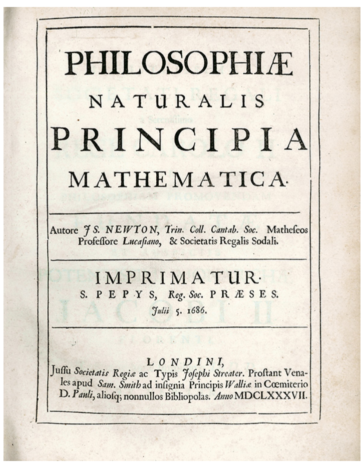
Rozdział 11

Zakończenie: eliptyczność orbit



PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Cœmiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Opiszmy na zakończenie jeden z największych historycznych sukcesów rachunku różniczkowego: *dowód*, że pod działaniem siły grawitacji planety poruszają się po elipsach.

Zgodnie z prawem grawitacji, dwa ciała o masach M i m przyciągają się z siłą skierowaną wzdłuż łączącej je prostej i proporcjonalną do iloczynu mas oraz odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości ciał. Ciało o masie M (Słońce) umieścimy w początku układu współrzędnych w $\mathbb{R}^3$. Zmienna $t > 0$ to czas. Milcząco założymy, że wszystkie funkcje występujące w rachunkach są różniczkowalne.

W chwili $t > 0$ planeta o masie m jest w punkcie $y(t) \in \mathbb{R}^3$. Słońce przyciąga ją z siłą

$$F = -\frac{GMm}{|y|^3} y \,,$$

gdzie $|y|$ oznacza długość wektora $y \in \mathbb{R}^3$. Z drugiej zasady dynamiki wiadomo, że siła F nadaje przyspieszenie $a = y''$ i zachodzi równość $F = ma$. Dlatego

$$y'' = -\frac{GM}{|y|^3} y \,.$$

Matematykowi wolno przyjąć, że wskutek doboru jednostek iloczyn $GM = 1$. Równanie różniczkowe, opisujące ruch planety wokół Słońca ma wtedy postać

$$y'' = -\frac{y}{|y|^3} \,. \tag{11.1}$$

Twierdzenie 11.1 (Newton). *Wszystkie rozwiązania równania* (11.1) *są krzywymi płaskimi. Jedyne krzywe zamknięte, spełniające* (11.1)*, to elipsy (o ognisku w zerze).*

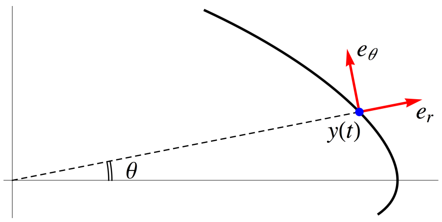
Dowód. Najpierw wykażemy, że ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie. W tym celu rozpatrzymy iloczyn wektorowy $y \times y'$ i obliczymy jego pochodną:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(y \times y'\big) = y' \times y' + y \times y'' = y \times y'' \overset{(11.1)}{=} 0.$$

(Łatwo sprawdzić, że wzór na pochodną iloczynu wektorowego funkcji $f, g\colon I \to \mathbb{R}^3$ jest taki sam, jak zwykły wzór na pochodną iloczynu; ponadto $a \times a = 0$ i dlatego otrzymujemy kolejne równości). Zatem

$$y \times y' \equiv \text{const} =: h \in \mathbb{R}^3\,, \tag{11.2}$$

to zaś oznacza, że płaszczyzna rozpięta na wektorach y, y' jest w każdej chwili prostopadła do wektora h. Zatem $y, y' \perp h$ i ruch odbywa się w ustalonej płaszczyźnie.



Współrzędne biegunowe. Wektor $y(t)$ jest iloczynem wektora jednostkowego e_r i liczby $r = |y|$. Siła i przyspieszenie są równoległe do e_r.

Odtąd więc, obróciwszy układ współrzędnych, mamy prawo zakładać, że $y = y(t) \in \mathbb{R}^2$. Wprowadźmy w $\mathbb{R}^2$ współrzędne biegunowe r, θ. Będziemy pisać

$$e_r = (\cos\theta, \sin\theta)\,, \qquad e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)\,,$$

oraz

$$y = r \cdot e_r\,, \quad \text{gdzie } r = |y|\,. \tag{11.3}$$

Oczywiście, $r, \theta\colon (0, T) \to \mathbb{R}$ są funkcjami czasu t, określonymi tak długo, jak długo odbywa się ruch. Wyraźmy przyspieszenie w tym układzie współrzędnych. Ze wzorów na pochodne sinusa i cosinusa wynika, że $(e_r)' = \theta' e_\theta$ i $(e_\theta)' = -\theta' e_r$. Dlatego po prostym rachunku, różniczkując dwukrotnie, otrzymujemy

$$y' = r' e_r + r(e_r)' = r' e_r + r\theta' e_\theta\,, \tag{11.4}$$

$$y'' = \big(r'' - r(\theta')^2\big) e_r + \big(r\theta'' + 2r'\theta'\big) e_\theta\,. \tag{11.5}$$

Jednak z równania (11.1) wynika, że wektor y'' jest równoległy do y, tzn. do wektora jednostkowego e_r. Współrzędna w kierunku e_θ musi więc znikać. Przeto

$$r\theta'' + 2r'\theta' = 0\,, \qquad r^2 + 2rr'\theta' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(r^2\theta'\big) = 0\,, \qquad r^2\theta' \equiv \text{const} = L\,. \tag{11.6}$$

Wspomnijmy o interpetacji geometrycznej ostatniej równości: wynika z niej, że całka

$$A(t) = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{r^2(\theta)}{2}\, d\theta$$

ma stałą pochodną $A'(t) = L/2$. Jest to tzw. *drugie prawo Keplera* – prędkość polowa planety jest stała (inaczej: w równych odcinkach czasu promień wodzący planety zamiata figury o równych polach). Czytelnik zechce samodzielnie pomyśleć, dlaczego całka $A(t)$ jest równa polu odpowiedniej figury.[1]

Z równań (11.5) i (11.6) otrzymujemy $y'' = \big(r'' - r(\theta')^2\big) e_r = \big(r'' - r(\theta')^2\big) \frac{y}{|y|}$. Porównując to wyrażenie z równaniem (11.1), sprawdzamy, że

$$r'' - r(\theta')^2 = -\frac{1}{|y|^2} = -\frac{1}{r^2}.$$

Jednak wobec równości (11.6) jest $r(\theta')^2 = L^2/r^3$, więc

$$r'' = r^{-3}L^2 - r^{-2}. \tag{11.7}$$

[1] Trzeba znać wzór na pole trójkąta i umieć posługiwać się sumami Riemanna.

Aby rozwiązać to równanie, użyjemy sztuczki. Niech $u(\theta) := 1/r(t(\theta))$, gdzie $t = t(\theta)$ jest funkcją odwrotną do $\theta = \theta(t)$. Ze wzorów na pochodną złożenia i (11.6) otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}u = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{L}r', \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}u = -\frac{1}{L}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{r^2}{L^2}r''. \tag{11.8}$$

Stąd

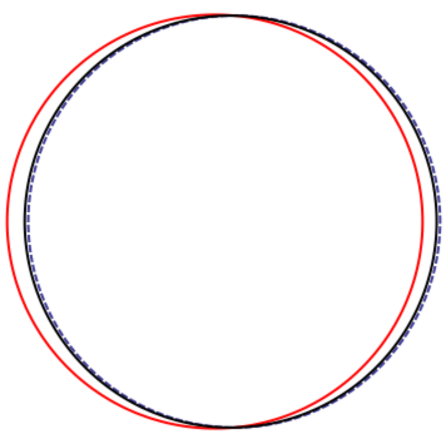
$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{r^2}{L^2}r'' + \frac{1}{r} \overset{(11.7)}{=} \frac{1}{L^2}.$$

Można wykazać – proszę spróbować zrobić to samodzielnie – że jedynymi rozwiązaniami równania $u'' + u = L^{-2}$ są funkcje

$$u(\theta) = A\cos(\theta + B) + \frac{1}{L^2}, \qquad \text{tzn.} \qquad r = \frac{1}{u} = \frac{L^2}{1 + AL^2\cos(\theta + B)}.$$

Gdy stała $AL^2 \in (0,1)$, ostatnie równanie jest parametrycznym równaniem elipsy. Czytelnik zdoła to sam sprawdzić. Dla $AL^2 \geq 1$ funkcja $r = r(\theta)$ nie jest ograniczona. Trajektoria jest wtedy parabolą lub hiperbolą. □

W swoich *Prinicipia Mathematica* Newton wykazał także, że jeśli wszystkie orbity zamknięte są elipsami, to wielkość siły musi być odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciał. Stała AL^2 jest *mimośrodem elipsy*.



Okrąg (linia przerywana), elipsa o mimośrodzie takim, jak orbita Ziemi (ciągła linia czarna) i elipsa o mimośrodzie orbity Marsa (linia czerwona). Środek okręgu i jedno z ognisk każdej elipsy są w tym samym punkcie.

Przybliżone mimośrody orbit planet w Układzie Słonecznym są następujące:

Merkury	Wenus	Ziemia	Mars
0,205	0,007	0,017	0,093
Jowisz	**Saturn**	**Uran**	**Neptun**
0,048	0,054	0,047	0,009

Orbity odbiegają więc od kołowych bardzo nieznacznie. Mimo to, na podstawie danych obserwacyjnych, które zgromadził astronom Tycho Brahe, Kepler zdołał w 1609 roku wysunąć przypuszczenie, że orbity planet są elipsami.

Czytelnik zgodzi się jednak, że czym innym jest *supozycja*, wysnuta z obserwacji, czym innym zaś *dowód*, stwierdzający, że przy pewnych założeniach orbity *muszą* być elipsami. (To zresztą tylko rozsądne przybliżenie rzeczywistości, gdyż naprawdę na ruch każdej z planet wokół Słońca wpływa siła przyciągania pozostałych planet, znikoma w porównaniu z przyciąganiem Słońca, ale przecież niezerowa. Dlatego orbity są elipsami jedynie w pewnym przybliżeniu, a ich mimośrody podlegają wahaniom.)

* * *

Siła Analizy Matematycznej tkwi więc zarówno w zastosowaniach, jak i w subtelnej teorii. Warto o tym pamiętać.