Rozdział 4

Elementy teorii miary

Zajmiemy się teraz całkowaniem funkcji wielu zmiennych. Czytelnik wie już, że do ważnych zastosowań całki należy obliczanie pól i objętości. Okazuje się, że pytania *jakie funkcje wolno (próbować) całkować? dla jakich podzbiorów przestrzeni można w ogóle określić ich objętość?* są subtelne, a odpowiedzi na te pytania wymagają głębokiego wniknięcia w pogranicze teorii mnogości i topologii.

Zacznijmy od przykładu, który dobitnie wyjaśnia, że funkcji, która miałaby naturalne pożądane cechy *miary*, nie można określić na *wszystkich* podzbiorach prostej.

Przykład 4.1 (G. Vitali). Nie istnieje funkcja $\mu\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0,+\infty)\cup\{+\infty\}$, która spełniałaby następujące warunki:

(i) $\mu([a,b]) = b-a$ dla każdego przedziału $[a,b]\subset\mathbb{R}$;

(ii) $\mu(\emptyset)=0$;

(iii) *przeliczalna addytywność*: Jeśli zbiory $A_i\subset\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots$, są parami rozłączne, to $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)=\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$;

(iv) *niezmienniczość ze względu na przesunięcia*: dla każdego zbioru $V\subset\mathbb{R}$ i każdej liczby $t\in\mathbb{R}$ jest $\mu(t+V)=\mu(V)$.

Przypuśćmy, że taka funkcja μ jednak istnieje. Określmy relację w zbiorze $\mathbb{R}$: przyjmijmy, że $x\sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x-y\in\mathbb{Q}$. Łatwo zauważyć, że jest to relacja równoważności: $x\sim x$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$, gdyż $x-x=0$, a $0\in\mathbb{Q}$; jeśli $x\sim y$, to także $y\sim x$, gdyż $y-x=-(x-y)$ jest liczbą wymierną, gdy $x-y\in\mathbb{Q}$; wreszcie, $x\sim y$ i $y\sim z$ pociąga za sobą $x\sim z$, gdyż $x-z=(x-y)+(y-z)$, a suma dwóch liczb wymiernych jest wymierna.

Każda klasa abstrakcji $[x]$ ma reprezentanta $y\in[0,1]$; to wynika stąd, że $x\sim x+k$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$ i każdego $k\in\mathbb{Z}$. Korzystając z aksjomatu wyboru, utwórzmy zbiór $V\subset[0,1]$, który zawiera dokładnie jednego reprezentanta każdej klasy abstrakcji. Rozpatrzmy zbiór

$$W=\bigcup_{t\in Q\cap[-1,1]}(t+V)\,,$$

tzn. sumę mnogościową przesunięć $t+V$ zbioru V o wektory wymierne t z przedziału $[-1,1]$. Ponieważ $V\subset[0,1]$, więc $W\subset[-1,2]$. Ponadto, dla różnych t_1,t_2 zbiory t_1+V i t_2+V są rozłączne: gdyby $t_1+v_1=t_2+v_2$ dla pewnych $t_1\neq t_2\in\mathbb{Q}$ i $v_1,v_2\in V$, to mielibyśmy $v_1-v_2=t_2-t_1\in\mathbb{Q}$ i $v_2\neq v_1$, tzn. $v_1\sim v_2$ byłyby różnymi elementami tej samej klasy abstrakcji, wbrew definicji V.

Jeśli μ spełnia warunki (i)–(iv), to $\mu(A) \le \mu(B)$ dla $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Dlatego

$$\begin{aligned} 3 = \mu([-1,2]) \ge \mu(W) = \mu\biggl(\bigcup_{t\in Q\cap[-1,1]} (t+V)\biggr) \\ \stackrel{\text{(iii)}}{=} \sum_{t\in Q\cap[-1,1]} \mu(t+V) \stackrel{\text{(iv)}}{=} \mu(V)+\mu(V)+\mu(V)+\cdots \end{aligned}$$

Gdyby $\mu(V) > 0$, to prawa strona byłaby nieskończona. Otrzymujemy więc $\mu(V) = 0$, stąd zaś $\mu(W) = 0 + 0 + \cdots = 0$.

Z drugiej strony, zbiór W zawiera cały przedział $[0,1]$. Istotnie, niech $x \in [0,1]$ będzie dowolną liczbą. Wybierzmy $v \in V$ tak, aby $x \sim v$; jest to możliwe, gdyż zbiór V zawiera reprezentanta *każdej* klasy abstrakcji. Wtedy $t = x-v \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]$ i $x = t+v \in t+V \subset W$.

Zatem

$$1 = \mu([0,1]) \le \mu(W) = 0\,.$$

Ta sprzeczność dowodzi, że nie istnieje funkcja μ, spełniająca warunki (i)–(iv). □

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nawet rezygnacja z przeliczalnej addytywności na rzecz skończonej addytywności nie pomaga: jak udowodnili Banach i Tarski, kulę jednostkową w $\mathbb{R}^3$ można podzielić na pięć (parami rozłącznych) zbiorów A_i, $1 \le i \le 5$, a następnie wskazać pięć izometrii g_i, $1 \le i \le 5$, przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takich, że

$$B(0,1) = g_1(A_1) \cup g_2(A_2) \cup g_3(A_3) = g_4(A_4) \cup g_5(A_5),$$

gdzie każda z dwóch sum jest sumą zbiorów parami rozłącznych. Gdyby więc istniała skończenie addytywna funkcja nieujemna μ, określona na wszystkich podzbiorach $\mathbb{R}^3$ i niezmiennicza ze względu na izometrie, to mielibyśmy

$$\mu(B(0,1)) = \sum_{i=1}^{5} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{5} \mu(g_i(A_i)) = 2\mu(B(0,1)).$$

(Konstrukcja takiego paradoksalnego rozkładu kuli wykorzystuje, prócz aksjomatu wyboru, fakt, że składanie obrotów w $\mathbb{R}^3$ nie jest przemienne, a grupa obrotów zawiera podgrupę wolną o dwóch generatorach.)

Podobne przykłady wskazują, że jakieś ograniczenie klasy zbiorów, dla których będziemy określać *miarę*, jest rzeczą konieczną.

4.1 Podstawowe pojęcia. Twierdzenie Carathéodory'ego

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Będziemy używać oznaczenia $[0,+\infty] = [0,+\infty) \cup \{+\infty\} = \mathbb{R}_+ \cup \{0,+\infty\}$.

Definicja 4.2 (ciało i σ-ciało zbiorów). Powiemy, że rodzina zbiorów $\mathscr{F} \subset 2^X$ jest *ciałem* wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) $\emptyset \in \mathscr{F}$;

(ii) Jeśli $A \in \mathscr{F}$, to także $X \setminus A \in \mathscr{F}$;

(iii) Jeśli $A, B \in \mathscr{F}$, to $A \cup B \in \mathscr{F}$.

Gdy spełniony jest także warunek

(iv) Dla wszystkich $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{F}$ zbiór $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$,

to mówimy, że $\mathscr{F}$ jest σ-*ciałem* (lub: *ciałem przeliczalnie addytywnym*).

Uwaga 4.3. Korzystając ze wzorów De Morgana, łatwo jest wykazać, że jeśli $\mathscr{F} \subset 2^X$ jest ciałem zbiorów i $A, B \in \mathscr{F}$, to $A \cap B \in F$ oraz $A \setminus B \in F$. Istotnie,

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \in \mathscr{F},$$

a więc także $A \cap B = X \setminus \big(X \setminus (A \cap B)\big) \in \mathscr{F}$. Dalej, $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathscr{F}$. Podobnie dowodzi się, że każde σ-ciało jest zamknięte ze względu na branie przeliczalnych przecięć. $\square$

Nietrudno podać kilka prostych przykładów ciał i σ-ciał. Rodzina 2^X wszystkich podzbiorów zbioru X jest zarówno ciałem, jak i σ-ciałem. Rodzina

$$\mathscr{F} = \{A \subset \mathbb{N} \colon A \text{ lub } \mathbb{N} \setminus A \text{ jest zbiorem skończonym}\}$$

jest ciałem, ale nie jest σ-ciałem: suma przeliczalnie wielu zbiorów skończonych może być zbiorem nieskończonym, którego uzupełnienie też jest nieskończone. Rodzina

$$\mathscr{F} = \{A \subset \mathbb{R} \colon A \text{ lub } \mathbb{R} \setminus A \text{ jest zbiorem (co najwyżej) przeliczalnym}\}$$

jest σ-ciałem[1].

Przykład 4.4. Niech $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ będzie dowolną rodziną σ-ciał (odpowiednio: ciał) podzbiorów zbioru X. Wtedy

$$\mathscr{F} = \bigcap_{i \in I} \mathscr{F}_i \subset 2^X$$

też jest σ-ciałem (odpowiednio: ciałem). To wynika wprost z definicji: każde z $\mathscr{F}_i$ jest zamknięte ze względu na odpowiednie działania na zbiorach, więc część wspólna $\mathscr{F}_i$ też jest zamknięta ze względu na te same działania.

Uwaga 4.5. Z powyższego przykładu wynika, że dla każdej niepustej rodziny zbiorów $\mathscr{G} \subset 2^X$ istnieje *najmniejsze* (ze względu na inkluzję) σ-ciało $\mathscr{F} \subset 2^X$ takie, że $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$: jest to przecięcie rodziny wszystkich σ-ciał, zawierających $\mathscr{G}$ (jest to rodzina niepusta, gdyż należy do niej σ-ciało 2^X).

Definicja 4.6 (zbiory borelowskie). Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Najmniejsze σ-ciało, zawierające wszystkie zbiory otwarte w przestrzeni X, nazywamy σ-*ciałem zbiorów borelowskich* w X i oznaczamy $\mathscr{B}(X)$.

Z σ-ciałem $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}^n$ zetkniemy się wielokrotnie.

[1] To łatwo wynika z twierdzenia, orzekającego, że suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

Definicja 4.7 (miara zewnętrzna). Funkcję $\mu^*\colon 2^X \to [0,+\infty]$ nazywamy *miarą zewnętrzną* na X, jeśli $\mu^*(\emptyset)=0$, $\mu(A)\le\mu(B)$ dla wszystkich $A\subset B\subset X$ i wreszcie

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i) \qquad \text{dla wszystkich} \quad A_1,A_2,\ldots\in 2^X. \tag{4.1}$$

Własność (4.1) nazywa się *przeliczalną podaddytywnością* miary zewnętrzne.

Definicja 4.8 (miara). Niech $\mathscr{F}\subset 2^X$ będzie σ-ciałem. Funkcję $\mu\colon\mathscr{F}\to[0,+\infty]$ nazywamy *miarą* na $\mathscr{F}$, jeśli $\mu(\emptyset)=0$ oraz

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \qquad \text{dla wszystkich parami rozłącznych } A_1,A_2,\ldots\in\mathscr{F}. \tag{4.2}$$

Własność (4.2) nazywa się *przeliczalną addytywnością* miary.

Podamy teraz kilka prostych własności miary, wynikających łatwo z definicji, następnie zaś sformułujemy ważne twierdzenie, wskazujące, jak dla danej miary zewnętrznej μ^* na X wyróżnić pewne σ-ciało $\mathscr{F}\subset 2^X$, na którym funkcja μ^* – jak za dotknięciem czarodziejskiej różdżki – staje się miarą, tzn. spełnia nie tylko (4.1), ale i mocniejszy, naturalny warunek (4.2).

Stwierdzenie 4.9. *Niech $\mathscr{F}\subset 2^X$ będzie σ-ciałem, a μ – miarą na $\mathscr{F}$. Wówczas:*

(i) $\mu(A)\le\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)$ *dla wszystkich* $A\subset B\in\mathscr{F}$*;*

(ii) *jeśli* $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\ldots$*,* $A_i\in\mathscr{F}$*, to*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\lim_{i\to\infty}\mu(A_i)\,;$$

(iii) *jeśli* $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\ldots$*,* $A_i\in\mathscr{F}$ *i* $\mu(A_1)<\infty$*, to*

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\lim_{i\to\infty}\mu(A_i)\,.$$

Dowód. Własność (i), tzw. *monotoniczność* miary, uzyskujemy, kładąc w (4.2) $A_1=A$, $A_2=B\setminus A\in\mathscr{F}$ i $A_j=\emptyset$ dla $j\ge 3$. Wtedy $\bigcup A_j = A\cup(B\setminus A)=B$ i zbiory A_j są parami rozłączne. Dlatego, wobec (4.2),

$$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)+\mu(\emptyset)+\mu(\emptyset)+\cdots=\mu(A)+\mu(B\setminus A)\ge\mu(A).$$

Aby wykazać (ii), przyjmiemy $P_1=A_1$ i $P_j=A_j\setminus A_{j-1}$ dla $j=2,3,\ldots$. Wtedy $\bigcup A_j=\bigcup P_j$, zaś wobec założenia $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\ldots$ zbiory P_j są parami rozłączne. Dlatego, wobec równości $\mu(P_j)=\mu(A_j)-\mu(A_{j-1})$,

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\Big)=\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}P_j\Big) &= \sum_{j=1}^{\infty}\mu(P_j)\\ &=\mu(A_1)+\big(\mu(A_2)-\mu(A_1)\big)+\big(\mu(A_3)-\mu(A_2)\big)+\cdots\\ &=\lim_{j\to\infty}\mu(A_j)\,,\end{aligned}$$

gdyż $\mu(A_j)$ jest j-tą sumą częściową szeregu $\sum \mu(P_j)$.

Dla dowodu (iii) zauważmy, że na mocy wzorów De Morgana

$$A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, \qquad \text{gdzie} \quad B_j = A_1 \setminus A_j$$

Zbiory B_j tworzą ciąg wstępujący, tzn. $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$ Na mocy udowodnionych już punktów (i) oraz (ii),

$$\mu(A_1) - \mu\biggl(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\biggr) \overset{\text{(i)}}{=} \mu\biggl(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\biggr) = \mu\biggl(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\biggr) \overset{\text{(ii)}}{=} \lim_{j\to\infty} \mu(B_j) \overset{\text{(i)}}{=} \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)\,.$$

Uwaga 4.10. Założenie $\mu(A_1) < \infty$ w Stwierdzeniu 4.9 (iii) jest istotne. Jeśli np. na $\mathscr{F} = 2^{\mathbb{N}}$ weźmiemy *miarę liczącą*, która każdemu zbiorowi $A \subset \mathbb{N}$ przypisuje liczbę jego elementów $\#A$, to dla (nieskończonych) zbiorów $A_j = \{j, j+1, j+2, \cdots\}$ jest $\mu(A_j) = +\infty$, a zatem

$$+\infty = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j) > 0 = \mu(\emptyset) = \mu\biggl(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\biggr)\,.$$

Definicja 4.11 (warunek Carathéodory'ego). Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X. Powiemy, że zbiór $A \subset X$ *spełnia warunek Carathéodory'ego* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \qquad \text{dla każdego zbioru } Z \subset X. \tag{4.3}$$

Twierdzenie 4.12 (C. Carathéodory). *Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X. Rodzina $\mathscr{F} \subset 2^X$ wszystkich zbiorów $A \subset X$, spełniających warunek Carathéodory'ego, jest σ-ciałem. Funkcja*

$$\mu = \mu^*\big|_{\mathscr{F}} \colon \mathscr{F} \to [0, +\infty]$$

jest miarą, tzn. spełnia warunek przeliczalnej addytywności (4.2)*.*

Twierdzenie Carathéodory'ego jest bardzo ważne, gdyż ułatwia konstrukcję różnych miar. Wystarczy skonstruować miarę zewnętrzną μ^* (co jest łatwiejsze, gdyż warunki w definicji są słabsze!) na X, a następnie zawęzić dziedzinę funkcji μ^* do rodziny tych zbiorów A, które spełniają (4.3). W taki właśnie sposób skonstruujemy w następnym podrozdziale *miarę Lebesgue'a* na $\mathbb{R}^n$, tzn. naturalny i ogólny odpowiednik długości przedziału w $\mathbb{R}$, pola wielokąta w $\mathbb{R}^2$ czy objętości wielościanu w $\mathbb{R}^3$, określony jednak dla bardzo szerokiej klasy podzbiorów przestrzeni.

Co ciekawe, twierdzenie Carathéodory'ego nie wydaje się łatwe, gdyż warunek (4.3) nie jest szczególnie naturalny. Jednak, jak zobaczymy, dowód wprawdzie jest długi, ale nie jest zbyt trudny: w gruncie rzeczy polega na planowym i żmudnym, choć dość prostym sprawdzaniu kolejnych warunków.

Dowód. *Krok 1:* Zbiór pusty należy do $\mathscr{F}$, gdyż dla każdego Z jest $\mu^*(Z) = 0 + \mu^*(Z \setminus \emptyset) = \mu^*(Z \cap \emptyset) + \mu^*(Z \setminus \emptyset)$.

Krok 2: rodzina $\mathscr{F}$ jest zamknięta ze względu na branie dopełnień. To wynika z faktu, że warunek Carathéodory'ego można zapisać w symetrycznej postaci

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*\bigl(Z \setminus (X \setminus A)\bigr) + \mu^*\bigl(Z \cap (X \setminus A)\bigr)\,.$$

Krok 3: jeśli $A, B \in \mathscr{F}$, to $A \cup B \in \mathscr{F}$. Aby to wykazać, piszemy $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ oraz

$$Z \cap (A \cup B) = \big(Z \cap A\big) \cup \big((Z \setminus A) \cap B\big), \tag{4.4}$$
$$Z \setminus (A \cup B) = (Z \setminus A) \setminus B, \tag{4.5}$$

następnie zaś szacujemy, korzystając z podaddytywności μ^*,

$$\begin{aligned} &\mu^*(Z \cap (A \cup B)) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B)) \\ &\qquad\overset{(4.4)}{\le} \mu^*\big(Z \cap A\big) + \mu^*\big((Z \setminus A) \cap B\big) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B)) \\ &\qquad\overset{(4.5)}{=} \mu^*\big(Z \cap A\big) + \mu^*\big((Z \setminus A) \cap B\big) + \mu^*((Z \setminus A) \setminus B) \\ &\qquad\overset{(4.3)}{=} \mu^*\big(Z \cap A\big) + \mu^*(Z \setminus A) \overset{(4.3)}{=} \mu^*(Z) \end{aligned}$$

Nierówność przeciwna, $\mu^*(Z) \le \mu^*(Z \cap (A \cup B)) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B))$, zachodzi na mocy podaddytywności funkcji μ^*. Zatem zbiór $A \cup B$ spełnia warunek Carathéodory'ego.

Krok 4. Wiemy już, że $\mathscr{F}$ jest ciałem zbiorów. Dlatego (patrz Uwaga 4.3) iloczyn oraz różnica dwóch zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego też spełnia warunek Carathéodory'ego.

Krok 5: addytywność μ^* na $\mathscr{F}$. Niech $A, B \in \mathscr{F}$ będą zbiorami rozłącznymi. Zamieniając w warunku Carathédory'ego (4.3) zbiór Z na $Z \cap (A \cup B)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap (A \cup B)) &= \mu^*(Z \cap (A \cup B) \cap A) + \mu^*((Z \cap (A \cup B)) \setminus A) \\ &= \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap B), \end{aligned} \tag{4.6}$$

gdyż dla A, B rozłącznych jest

$$Z \cap (A \cup B) \cap A = Z \cap A, \qquad (Z \cap (A \cup B)) \setminus A = Z \cap B.$$

Dla $Z = X$ otrzymujemy

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Przez łatwą indukcję względem m dowodzimy, że suma skończonej liczby zbiorów z $\mathscr{F}$ też należy do $\mathscr{F}$. Ponadto, dla dowolnego $Z \subset X$ zachodzi odpowiednik równości (4.6), mianowicie

$$\mu^*\Bigg(Z \cap \bigcup_{j=1}^m A_j\Bigg) = \sum_{j=1}^m \mu^*(Z \cap A_j) \qquad \text{dla } A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{F} \text{ parami rozłącznych.} \tag{4.7}$$

Krok 6: rodzina $\mathscr{F}$ jest σ-ciałem. Wystarczy w tym celu sprawdzić, że

$$\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathscr{F} \qquad \text{dla } A_j \in \mathscr{F},\ j = 1, 2, \ldots, \text{ parami rozłącznych,} \tag{4.8}$$

gdyż suma *dowolnych* zbiorów $A_j \in \mathscr{F}$, $j = 1, 2, \ldots$, jest równa sumie zbiorów

$$P_1 = A_1, \quad P_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \ldots, \quad P_m = A_m \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{m-1}), \quad \ldots,$$

które już są parami rozłączne (i też należą do $\mathscr{F}$, gdyż $\mathscr{F}$ jest ciałem).

Niech więc odtąd $A_j \in \mathscr{F}$, gdzie $j \in \mathbb{N}$, będą parami rozłączne. Ustalmy $m \in \mathbb{N}$. Niech $Z \in 2^X$ będzie dowolnym zbiorem. Korzystając z (4.7) i monotoniczności μ^*, piszemy

$$\begin{aligned}\mu^*(Z) &= \mu^*\Big(Z \cap \bigcup_{j=1}^m A_j\Big) + \mu^*\Big(Z \setminus \bigcup_{j=1}^m A_j\Big)\\ &\overset{(4.7)}{=} \sum_{j=1}^m \mu^*(Z\cap A_j) + \mu^*\Big(Z \setminus \bigcup_{j=1}^m A_j\Big) \geq \sum_{j=1}^m \mu^*(Z\cap A_j) + \mu^*\Big(Z \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big).\end{aligned}$$

Zatem, wszystkie sumy częściowe szeregu $\sum_{j=1}^\infty \mu^*(Z\cap A_j)$ o wyrazach dodatnich są ograniczone. Szereg ten jest więc zbieżny, a jego suma spełnia nierówność

$$\mu^*(Z) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(Z\cap A_j) + \mu^*\Big(Z \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big).$$

Wobec przeliczalnej podaddytywności miary zewnętrznej μ^*, otrzymujemy stąd

$$L = \mu^*(Z) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(Z\cap A_j) + \mu^*\Big(Z \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) \geq \mu^*\Big(Z \cap \bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) + \mu^*\Big(Z \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) = P.$$

Nierówność $L \leq P$ jest oczywista; dlatego $\bigcup_{j=1}^\infty A_j$ spełnia warunek Carathéodory'ego.

Krok 7: przeliczalna addytywność μ^* na $\mathscr{F}$. Załóżmy, że zbiory $A_j \in \mathscr{F}$, gdzie $j = 1, 2, \ldots$, są parami rozłączne. Wobec (4.7) dla $Z = X$ oraz monotoniczności μ^*,

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) \geq \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^m A_j\Big) \overset{(4.7)}{=} \sum_{j=1}^m \mu^*(A_j) \qquad \text{dla } m = 1, 2, \ldots$$

Przechodząc do granicy $m \to \infty$ po prawej stronie tej nierówności, otrzymujemy

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j).$$

Dzięki przeliczalnej podaddytywności miary zewnętrznej μ^*, ostatnia nierówność jest w istocie równością. Dowód całego Twierdzenia 4.12 jest zakończony. □

Stwierdzenie 4.13. *Jeśli μ^* jest miarą zewnętrzną na X i $\mu^*(A) = 0$ dla pewnego $A \subset X$, to A spełnia warunek Carathéodory'ego.*

Dowód. Dla każdego $Z \subset X$ mamy, przy tych założeniach, $0 = \mu^*(A) \geq \mu^*(Z\cap A) = 0$ i dlatego

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z\cap A) + \mu^*(Z\setminus A) = \mu^*(Z\setminus A) \leq \mu^*(Z).$$

To spostrzeżenie kończy dowód. □

Samo twierdzenie Carathéodory'ego nie orzeka wprawdzie, jak duża jest rodzina zbiorów $\mathscr{F}$ spełniających warunek (4.3). Jednak przy pewnych łagodnych założeniach dodatkowych, nałożonych na μ^*, σ-ciało $\mathscr{F}$ jest dostatecznie obszerne.

Definicja 4.14. Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X. Każdy zbiór $A \subset X$ spełniający warunek Carathéodory'ego, nazywamy zbiorem μ^*-mierzalnym, a σ-ciało $\mathscr{F}$, o którym mowa w Twierdzeniu 4.12, oznaczamy $\mathscr{F}(\mu^*)$.

Definicja 4.15. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że miara zewnętrzna $\mu^*\colon 2^X \to [0, +\infty]$ jest *miarą zewnętrzną metryczną*, jeśli

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

dla wszystkich $A, B \subset X$, których *odstęp* $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, gdzie

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in A} \bigl(\operatorname{dist}(x, B)\bigr), \qquad \operatorname{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} \varrho(x, y).$$

Twierdzenie 4.16. *Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną, zaś μ^* – miarą zewnętrzną metryczną na X. Wówczas σ-ciało zbiorów borelowskich $\mathscr{B}(X)$ jest zawarte w σ-ciele $\mathscr{F}(\mu^*)$.*

Dowód. Z uwagi na definicję $\mathscr{B}(X)$, wystarczy wykazać, że każdy zbiór otwarty $\Omega \subset X$ należy do $\mathscr{F}(\mu^*)$.

Ustalmy zbiór otwarty $\Omega \subset X$ i niech

$$\Omega_m = \Bigl\{x \in \Omega\colon \varrho(x, X \setminus \Omega) > \frac{1}{m}\Bigr\} \qquad \text{dla } m = 1, 2, \ldots.$$

Wtedy $\operatorname{dist}(\Omega_m, X \setminus \Omega) \ge \frac{1}{m} > 0$. Dalej, niech

$$P_m = \Bigl\{x \in \Omega\colon \frac{1}{m} < \varrho(x, X \setminus \Omega) \le \frac{1}{m-1}\Bigr\} \qquad \text{dla } m = 2, 3, \ldots.$$

Zauważmy, że

$$\Omega \setminus \Omega_m = P_{m+1} \cup P_{m+2} \cup P_{m+3} \cup \ldots \qquad \text{dla } m = 1, 2, \ldots, \tag{4.9}$$

a ponadto

$$\operatorname{dist}(P_i, P_j) \ge \frac{1}{j} - \frac{1}{i-1} \qquad \text{dla } i > j+1,\ j \ge 2 \tag{4.10}$$

(to nietrudny wniosek z nierówności trójkąta). Aby sprawdzić, że zbiór Ω spełnia warunek Carathéodory'ego, weźmy dowolny zbiór $Z \subset X$. Wystarczy wykazać, że

$$\mu^*(Z) \ge \mu^*(Z \cap \Omega) + \mu^*(Z \setminus \Omega). \tag{4.11}$$

Jak widać, bez zmiany ogólności możemy przyjąć, że $\mu^*(Z) < \infty$. Ponieważ μ^* jest miarą zewnętrzną metryczną, więc na mocy (4.10) otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{m} \mu^*(Z \cap P_{2j-1}) = \mu^*(Z \cap (P_1 \cup P_3 \cup \ldots \cup P_{2m-1})) \le \mu^*(Z)$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{m} \mu^*(Z \cap P_{2j}) = \mu^*(Z \cap (P_2 \cup P_4 \cup \ldots \cup P_{2m})) \le \mu^*(Z)\,.$$

Zatem

$$\sum_{j=1}^{2m} \mu^*(Z \cap P_j) \le 2\mu^*(Z) < \infty \qquad \text{dla każdego } m = 1, 2, \ldots,$$

tzn. szereg $\sum \mu^*(Z \cap P_j)$ jest zbieżny. Dlatego dzięki (4.9) otrzymujemy

$$\mu^*(Z \cap (\Omega \setminus \Omega_m)) \le \sum_{j=m+1}^{\infty} \mu^*(Z \cap P_j) \to 0 \qquad \text{dla } m \to \infty. \tag{4.12}$$

Ponieważ $\operatorname{dist}(\Omega_m, X \setminus \Omega) \ge \frac{1}{m} > 0$, więc

$$\mu^*(Z \cap \Omega_m) + \mu^*\big(\underbrace{Z \cap (X \setminus \Omega)}_{=Z \setminus \Omega}\big) = \mu^*((Z \cap \Omega_m) \cup (Z \setminus \Omega)) \le \mu^*(Z)\,.$$

Przeto

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap \Omega) + \mu^*(Z \setminus \Omega) &\le \mu^*(Z \cap \Omega_m) + \mu^*(Z \cap (\Omega \setminus \Omega_m)) + \mu^*(Z \setminus \Omega) \\ &\le \mu^*(Z) + \mu^*(Z \cap (\Omega \setminus \Omega_m)) \end{aligned}$$

i w granicy $m \to \infty$, dzięki warunkowi (4.12), $\mu^*(Z \cap \Omega) + \mu^*(Z \setminus \Omega) \le \mu^*(Z)$. $\square$

4.2 Konstrukcja i własności miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$

W tym podrozdziale przyjmiemy $X = \mathbb{R}^n$. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozpatrujemy metrykę euklidesową. Definiujemy także dwa porządki częściowe w $\mathbb{R}^n$: piszemy $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i < y_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, zaś $\boldsymbol{x} \preccurlyeq \boldsymbol{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i \le y_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Definicja 4.17 (przedziały n-wymiarowe). Załóżmy, że $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$. Zbiory

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_n = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{z} \prec \boldsymbol{y}\} \qquad \text{oraz} \qquad [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]_n = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \preccurlyeq \boldsymbol{z} \preccurlyeq \boldsymbol{y}\}$$

nazywamy, odpowiednio, n-wymiarowym przedziałem otwartym i n-wymiarowym przedziałem domkniętym o końcach $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$. Odcinki $[x_i, y_i] \subset \mathbb{R}$ nazywamy *krawędziami* takich przedziałów.

Czytelnik zechce zauważyć, że przedziały 2-wymiarowe to prostokąty, a przedziały 3-wymiarowe to prostopadłościany. Przedział domknięty jest po prostu iloczynem kartezjańskim swoich krawędzi,

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]_n = [x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \times \ldots \times [x_n, y_n].$$

Uwaga 4.18. Jeśli $y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \ldots = y_n - x_n$, to przedział $P = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]_n$ nazywamy *kostką* (domkniętą).

Definicja 4.19 (objętość przedziału n-wymiarowego). Jeśli P jest przedziałem o końcach $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$, to liczbę

$$\operatorname{vol}(P) = \prod_{i=1}^{n} (y_i - x_i)$$

nazywamy *objętością przedziału* P.

Zdefiniujemy teraz miarę zewnętrzną Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$.

Definicja 4.20. Dla każdego $A \subset \mathbb{R}^n$ kładziemy

$$\lambda_n^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(P_j)\colon\ \{P_j\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ jest rodziną przedziałów pokrywającą } A\right\}.$$

Uwaga 4.21. W powyższej definicji można rozpatrywać tylko przedziały domknięte, albo tylko przedziały otwarte, albo przedziały obu rodzajów. Nie wpływa to na wartość $\lambda_n^*(A)$. Wnikliwy Czytelnik zechce się zastanowić, dlaczego tak jest.

Stwierdzenie 4.22. *Funkcja λ_n^* jest miarą zewnętrzną na $\mathbb{R}^n$.*

Dowód. Po pierwsze, $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$, gdyż zbiór pusty można, dla każdego $\varepsilon > 0$, przykryć jednym przedziałem o objętości ε^n. Po drugie, dla $A \subset B$ jest $\lambda_n^*(A) \le \lambda_n^*(B)$; to wynika wprost z definicji kresu dolnego, gdyż każda przeliczalna rodzina, która pokrywa zbiór B, pokrywa także A.

Pozostaje sprawdzić przeliczalną podaddytywność λ_n^*. Niech $A_j \subset \mathbb{R}^n$ dla $j = 1, 2, \ldots$. Bez zmniejszenia ogólności niech $\lambda_n^*(A_j) < \infty$ dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ dobierzmy taką rodzinę przedziałów $\{P_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ pokrywającą zbiór A_j, żeby

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(P_{j,k}) \le \lambda_n^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Sumując te nierówności (kolejność sumowania nie gra roli, gdyż mamy do czynienia ze zbieżnymi szeregami o wyrazach dodatnich), otrzymujemy

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(P_{j,k}) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_j) + \varepsilon\,.$$

Rodzina $\{P_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{N}}$ jest przeliczalna i pokrywa zbiór $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Dlatego, z definicji,

$$\lambda_n^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j,k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(P_{j,k}) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_j) + \varepsilon\,.$$

Przechodząc do granicy $\varepsilon \to 0$, kończymy dowód. □

Twierdzenie 4.23. *Funkcja λ_n^* jest miarą zewnętrzną metryczną na $\mathbb{R}^n$.*

Dowód. Niech $A, B \subset \mathbb{R}^n$ i $\mathrm{dist}\,(A, B) > 2d > 0$. Aby wykazać, że $\lambda_n^*(A\cup B) = \lambda_n^*(A)+\lambda_n^*(B)$, wystarczy sprawdzić nierówność

$$\lambda_n^*(A \cup B) \ge \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B)\,, \tag{4.13}$$

gdyż wiemy już, że λ_n^* jest podaddytywna.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz przeliczalną rodzinę $\mathscr{P}$ przedziałów domkniętych pokrywającą zbiór $A \cup B$ i taką, że

$$\sum_{P\in\mathscr{P}} \mathrm{vol}\,(P) \le \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Każdy przedział $P \in \mathscr{P}$ możemy rozdrobnić, tzn. podzielić na $m = k^n$ przystających przedziałów domkniętych $P_1, \ldots, P_m$, dzieląc każdą krawędź P na k równych części. Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić, że wtedy

$$\mathrm{vol}\,(P) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{vol}\,(P_i) = m \cdot \mathrm{vol}\,(P_1) = k^n \cdot \mathrm{vol}\,(P_1).$$

Dobierając do danego P odpowiednio dużą liczbę $k = k(P)$, uzyskamy wszystkie przedziały P_i o średnicy mniejszej niż d. Można więc bez zmniejszenia ogólności założyć, że $\mathscr{P}$ składa się tylko z przedziałów o średnicy mniejszej niż d. Każdy z tych przedziałów może przecinać *co najwyżej jeden* ze zbiorów A i B, gdyż $\mathrm{dist}\,(A, B) > 2d$. Usuńmy z $\mathscr{P}$ te przedziały, które nie mają punktów wspólnych z $A \cup B$ i otrzymaną rodzinę podzielmy na dwie, $\mathscr{P}_A$ i $\mathscr{P}_B$, złożone odpowiednio z przedziałów, mających punkty wspólne z A i przedziałów, mających punkty wspólne z B. Jest jasne, że $\mathscr{P}_A$ pokrywa A, zaś $\mathscr{P}_B$ pokrywa B. Dlatego

$$\lambda_n^*(A) \le \sum_{P \in \mathscr{P}_A} \mathrm{vol}\,(P), \qquad \lambda_n^*(B) \le \sum_{P \in \mathscr{P}_B} \mathrm{vol}\,(P).$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy

$$\lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) \le \sum_{P \in \mathscr{P}_A} \mathrm{vol}\,(P) + \sum_{P \in \mathscr{P}_B} \mathrm{vol}\,(P) \le \sum_{P \in \mathscr{P}} \mathrm{vol}\,(P) \le \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy $\varepsilon \to 0$, dostajemy warunek (4.13), co kończy dowód. $\square$

Definicja 4.24. Miara zewnętrzna λ_n^* ograniczona do σ-ciała $\mathscr{F}(\lambda_n^*) =: \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ podzbiorów λ_n^*-mierzalnych przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywa się *miarą Lebesgue'a* w $\mathbb{R}^n$.

Elementy σ-ciała $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ nazywamy *zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a* w $\mathbb{R}^n$, lub krótko: *zbiorami λ_n-mierzalnymi*. Dla $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ piszemy $\lambda_n^*(A) = \lambda_n(A)$.

Aby opisać zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a nieco dokładniej, wprowadzimy dwie klasy podzbiorów $\mathbb{R}^n$.

Definicja 4.25. Zbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ nazywa się *zbiorem klasy G_δ* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiory otwarte $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, takie, że

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_i.$$

Zbiór F jest *klasy F_σ* wtedy i tylko wtedy, gdy jego uzupełnienie $\mathbb{R}^n \setminus F$ jest zbiorem klasy G_δ.

Inaczej mówiąc, zbiory klasy G_δ to przeliczalne przecięcia zbiorów otwartych, a zbiory klasy F_σ to przeliczalne sumy zbiorów domkniętych. Każdy zbiór otwarty jest oczywiście klasy G_δ, a każdy zbiór domknięty jest klasy F_σ. Zbiór liczb wymiernych jest klasy F_σ, bo jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów jednopunktowych, ale nie jest klasy G_δ (to wynika z twierdzenia Baire'a, które Czytelnik poznał na wykładach z topologii). Każdy przedział w $\mathbb{R}$ jest jednocześnie zbiorem klasy G_δ i F_σ.

Wprost z definicji wynika, że zarówno zbiory klasy G_δ, jak i zbiory klasy F_σ, są zbiorami borelowskimi.

Twierdzenie 4.26 (charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a). *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Następujące warunki są wówczas równoważne:*

(i) $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$;

(ii) *Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $A \subset \Omega$ i $\lambda_n^*(\Omega \setminus A) < \varepsilon$;*

(iii) *Istnieje zbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ typu G_δ taki, że $A \subset G$ i $\lambda_n^*(G \setminus A) = 0$;*

(iv) *Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $F \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $F \subset A$ i $\lambda_n^*(A \setminus F) < \varepsilon$;*

(v) *Istnieje zbiór $F \subset \mathbb{R}^n$ typu F_σ taki, że $F \subset A$ i $\lambda_n^*(A \setminus F) = 0$.*

Dowód. *(i) $\Rightarrow$ (ii).* Przedstawmy zbiór A jako sumę zbiorów mierzalnych i ograniczonych,

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \qquad A_1 = A \cap B(\mathbf{0}, 1), \quad A_j = A \cap \big(B(\mathbf{0}, j) \setminus B(\mathbf{0}, j-1)\big) \text{ dla } j \geq 2.$$

Mierzalność A_j wynika z mierzalności kul otwartych (które należą do $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$) i z faktu, że $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ jest ciałem.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ wybierzmy rodzinę $\mathscr{P}_j$ przedziałów *otwartych* $\{P_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, pokrywającą A_j zbiór A_j i taką, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(P_{j,k}) \leq \lambda_n^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{4.14}$$

Niech Ω_j będzie sumą wszystkich przedziałów rodziny $\mathscr{P}_j$. Oczywiście, Ω_j jest zbiorem otwartym. Ponadto,

$$\lambda_n(A_j) \leq \lambda_n(\Omega_j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(P_{j,k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(P_{j,k}) \leq \lambda_n(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} < \infty,$$

gdyż zbiór A_j zawiera się w pewnym przedziale, a miara Lebesgue'a każdego przedziału wprost z definicji jest mniejsza lub równa od jego objętości. Ponieważ Ω_j ma miarę skończoną i $A_j \subset \Omega_j$, więc

$$\lambda_n(\Omega_j \setminus A_j) = \lambda_n(\Omega_j) - \lambda_j(A_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Niech $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$; wboec otwartości wszystkich Ω_j zbiór Ω jest otwarty, a dzięki monotoniczności i przeliczalnej addytywności miary

$$\lambda_n(\Omega \setminus A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(\Omega_j \setminus A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Dla $m = 1, 2, \ldots$ wybierzmy zbiór otwarty $\Omega_m \supset A$ tak, aby $\lambda_n^*(\Omega_m \setminus A) < 1/m$. Zbiór $G = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Omega_m$ jest typu G_δ, $A \subset G$ i mamy

$$\lambda_n^*(G \setminus A) \leq \lambda_n^*(\Omega_m \setminus A) \leq \frac{1}{m} \to 0 \qquad \text{dla } m \to \infty.$$

Zatem $\lambda_n^*(G \setminus A) = 0$ i otrzymaliśmy warunek (iii).

(iii) ⇒ (i). Każdy zbiór G typu G_δ jest borelowski (jako przecięcie przeliczalnie wielu zbiorów otwartych), więc jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Mamy też $\lambda_n^*(G \setminus A) = 0$, zbiór $G \setminus A$ jest więc mierzalny na mocy Stwierdzenia 4.13. Ponieważ $A \subset G$, więc

$$A = G \setminus (G \setminus A) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),$$

jako różnica dwóch zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

Aby zakończyć cały dowód, zauważmy, że (iv) zachodzi dla $\mathbb{R}^n \setminus A$ wtedy i tylko wtedy, gdy (ii) zachodzi dla A. Stąd i z praw De Morgana wynika równoważność (ii) oraz (iv). Podobnie uzyskuje się równoważność (iii) oraz (v). □

Wniosek 4.27. *Każdy zbiór $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ jest sumą pewnego zbioru borelowskiego i pewnego zbioru Z takiego, że $\lambda_n(Z) = 0$*

Dowód. Teza wynika z równoważności (i) ⇔ (v) w ostatnim twierdzeniu, gdyż każdy zbiór F typu F_σ należy do σ-ciała zbiorów borelowskich $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. □

Uwaga 4.28. Wynika stąd, że σ-ciało $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ jest istotnie większe niż $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$: każdy podzbiór zbioru miary zero jest zbiorem mierzalnym, a ponieważ istnieją zbiory miary zero i mocy continuum (np. zbiór Cantora, z którym Czytelnik zetknął się podczas wykładów Analizy I), więc rodzina $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ jest równoliczna z rodziną $2^{\mathbb{R}^n}$ wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}^n$, natomiast $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ jest "zaledwie" mocy continuum. □

Znamy w tej chwili formalną definicję miary Lebesgue'a λ_n i σ-ciała $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, na którym jest określona. Nie potrafimy jednak obliczać miary zbyt wielu zbiorów (wyjąwszy, być może, zbiory miary zero). Zacznijmy od prostego stwierdzenia, potwierdzającego, że – zgodnie z naturalną intuicją – miara Lebesgue'a przedziału n-wymiarowego jest równa jego objętości.

Stwierdzenie 4.29. *Dla każdego przedziału P jest* $\mathrm{vol}\,(P) = \lambda_n(P)$.

Dowód. Z konstrukcji wynika, że $\lambda_n(P) \le \mathrm{vol}\,(P)$: przedział sam jest swoim (co najwyżej przeliczalnym) pokryciem, a miarę zewnętrzną definiujemy jako kres dolny sum objętości dla wszystkich pokryć. Wykażemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $\mathrm{vol}\,(P) \le \lambda_n(P) + \varepsilon$; to wystarczy, żeby zakończyć dowód.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Bez zmniejszenia ogólności załóżmy, że P jest przedziałem domkniętym. Dobierzmy rodzinę $\mathscr{R}$ przedziałów *otwartych* R_i, $i = 1, 2, \ldots$ pokrywającą P i taką, że

$$\sum_{R_i \in \mathscr{R}} \mathrm{vol}\,(R_i) \le \lambda_n(P) + \varepsilon.$$

Ponieważ P jest zbiorem zwartym, więc z rodziny $\mathscr{P}$ można wybrać podrodzinę skończoną $R_1, \ldots, R_N$, stanowiącą pokrycie P. Mamy zatem

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{vol}\,(R_i) \le \sum_{R_i \in \mathscr{R}} \mathrm{vol}\,(R_i) \le \lambda_n(P) + \varepsilon.$$

Niech $d > 0$ będzie *liczbą Lebesgue'a* pokrycia $R_1, \ldots, R_N$ zbioru P. Podzielmy przedział P na $m = k^n$ przystających przedziałów P_j, dzieląc każdą krawędź na k równych odcinków.

Dla dostatecznie dużego k każdy z przedziałów P_j ma średnicę mniejszą niż $d/2$, więc jest zawarty w którymś z przedziałów $R_1, \ldots, R_N$. Dlatego

$$\operatorname{vol}(P) = \sum_{i=j}^{m} \operatorname{vol}(P_j) \le \sum_{i=1}^{N} \Bigg(\sum_{\{j\colon P_j \subset R_i\}} \operatorname{vol}(P_j) \Bigg) \le \sum_{i=1}^{N} \operatorname{vol}(R_i) \le \lambda_n(P) + \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy $\varepsilon \to 0$, uzyskujemy nierówność $\operatorname{vol}(P) \le \lambda_n(P)$. $\square$

Stwierdzenie 4.30. *Dla każdego zbioru $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ i każdego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ zbiór $\boldsymbol{x} + A$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i $\lambda_n(\boldsymbol{x} + A) = \lambda_n(A)$.*

Dowód. Mierzalność $\boldsymbol{x} + A$ uzyskujemy, korzystając z Twierdzenia 4.26. Równość miar obu zbiorów łatwo wynika stąd, że objętość przedziału jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia. Przesuwając każdy element pokrycia zbioru A o wektor $\boldsymbol{x}$, uzyskamy pokrycie zbioru $\boldsymbol{x} + A$; stąd wynika, że $\lambda_n(\boldsymbol{x} + A) \le \lambda_n(A)$, a ponieważ $A = -\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} + A)$, to zachodzi także nierówność przeciwna. $\square$

Wykażemy teraz, że niezmienniczość ze względu na przesunięcia charakteryzuje miarę Lebesgue'a z dokładnością do stałego czynnika. Ta charakteryzacja pozwoli nam później wyjaśnić, jak zmienia się miara Lebesgue'a, gdy zbiory mierzalne poddajemy przekształceniom liniowym (skądinąd, ta własność miary jest kluczem do wielowymiarowego twierdzenia o zamianie zmiennych w całce).

Twierdzenie 4.31. *Załóżmy, że μ jest miarą na σ-ciele $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Jeśli $\mu(A) = \mu(\boldsymbol{x} + A)$ dla wszystkich $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ i ponadto $\mu(P)$ jest skończona i dodatnia dla każdego przedziału P, to wówczas*

$$\mu(A) = c \cdot \lambda_n(A), \qquad A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), \tag{4.15}$$

gdzie $c = \mu([0,1]^n)$.

W dowodzie tego twierdzenia posłużymy się dwoma lematami, które zasługują na oddzielne odnotowanie.

Lemat 4.32. *Jeśli $H \subset \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią afiniczną wymiaru $k < n$, a μ miarą niezmienniczą ze względu na przesunięcia, skończoną na przedziałach i określoną na pewnym σ-ciele, zawierającym $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, to $\mu(H) = 0$.*

Lemat 4.33. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Oznaczmy przez $\mathscr{P}_m$, gdzie $m = 0, 1, 2, \ldots$, rodzinę wszystkich kostek w $\mathbb{R}^n$ o krawędziach długości $1/2^m$ i wszystkich wierzchołkach w punktach $k/2^m$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Istnieje wtedy przeliczalna rodzina $\{Q_i\}_{i\in I}$ kostek z $\mathscr{P}_0 \cup \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2 \cup \ldots$, o wnętrzach parami rozłącznych, taka, że*

$$\Omega = \bigcup_{i\in I} Q_i\,.$$

Uwaga. Rodzinę $\mathscr{P}_0 \cup \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2 \cup \ldots$ nazywa się czasem *kostkami diadycznymi*. Kostki z $\mathscr{P}_{m+1}$ (inaczej: tzw. *kostki* $(m+1)$*-szej generacji*) powstają z kostek rodziny $\mathscr{P}_m$, tj. kostek m-tej generacji, przez podział wszystkich krawędzi na dwie równe części (jedna kostka z $\mathscr{P}_m$ jest wtedy dzielona na 2^n kostek z $\mathscr{P}_{m+1}$, mających parami rozłączne wnętrza).

Dowód Lematu 4.32. Dla $m = 1, 2, \ldots$ połóżmy $H_m = H \cap B(\mathbf{0}, m)$. Zbiór H_m jest μ-mierzalny (należy do dziedziny μ), gdyż H i kula $B(\mathbf{0}, m)$ są zbiorami borelowskimi.

Ponieważ $\dim H < n$, więc istnieje wektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ prostopadły do H. Niech

$$H_{m,j} = H_m + \frac{1}{j}\boldsymbol{v}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Przy ustalonym m zbiory $H_{m,j}$ są parami rozłączne. Są też zawarte w kuli $B(\mathbf{0}, m+1)$; to wynika z nierówności trójkąta (do wektorów z H_m dodajemy wektor $\boldsymbol{v}/j$, którego norma nie przekracza 1). Miara μ jest skończona na przedziałach i niezmiennicza ze względu na przesunięcia; dlatego

$$\infty > \mu(B(\mathbf{0}, m+1)) \geq \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_{m,j}\Big) = \mu(H_{m,1}) + \mu(H_{m,2}) + \mu(H_{m,3}) + \cdots,$$

stąd zaś $\mu(H_{m,1}) = \mu(H_{m,2}) = \mu(H_{m,3}) = \ldots = \mu(H_m)$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Wobec Stwierdzenia 4.9 (ii), $\mu(H) = \lim \mu(H_m) = 0$. $\square$

Dowód Lematu 4.33. Wybieramy kolejne kostki diadyczne zawarte w Ω indukcyjnie, zaczynając od największych (o krawędzi 1), a potem przechodząc do kolejnych generacji i dokładając nowe, coraz drobniejsze kostki, które mieszczą się w Ω. Niech K_0 będzie sumą wszystkich kostek rodziny $\mathscr{P}_0$ zawartych w Ω. Jeśli $m = 0, 1, 2\ldots$ i zbiory $K_0, \ldots, K_m \subset \Omega$ zostały już zdefiniowane, to przyjmujemy jako K_{m+1} sumę tych kostek z rodziny $\mathscr{P}_{m+1}$, które są zawarte w Ω i mają wnętrza rozłączne z $K_0 \cup \ldots \cup K_m$.

Zbiór $K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \ldots$ jest sumą przeliczalnie wielu kostek diadycznych o wnętrzach parami rozłącznych. Wprost z definicji K_m wynika, że $K_m \subset \Omega$ dla $m = 0, 1, 2, \ldots$, więc oczywiście $K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \ldots \subset \Omega$. Inkluzja przeciwna wynika z otwartości Ω; uzupełnienie nietrudnych szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi jako zadanie. $\square$

Dowód Twierdzenia 4.31. Niech

$$\xi(A) = \frac{\mu(A)}{\mu([0,1]^n)}, \qquad A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$$

Wystarczy wykazać, że $\xi = \lambda_n$ na $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Dowód przeprowadzimy, wzbogacając stopniowo klasę zbiorów, na której obie miary są równe.

Krok 1. Miary ξ i λ_n pokrywają się na kostkach diadycznych. To łatwo wynika z niezmienniczości obu miar ze względu na przesunięcia i z Lematu 4.32.[2] Istotnie, ponieważ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ kostka $[0,1]^n$ jest sumą 2^{kn} przystających kostek (o wnętrzach parami rozłącznych), które są obrazami $[0, 1/2^k]^n$ w odpowiednich przesunięciach, więc

$$1 = \xi([0,1]^n) = 2^n \xi\big([0, \tfrac{1}{2}]^n\big) = 2^{2n}\xi\big([0, \tfrac{1}{4}]^n\big) = \ldots = 2^{kn}\xi\big([0, \tfrac{1}{2^k}]^n\big) = \ldots, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zatem $\xi(Q) = 2^{-kn} = \lambda_n(Q)$ dla wszystkich $Q \in \mathscr{P}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Krok 2. Miary ξ i λ_n pokrywają się na zbiorach otwartych. To wynika z poprzedniego kroku dowodu i z Lematu 4.33. Jeśli $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, to

$$\xi(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(Q_i) = \lambda_n(\Omega);$$

[2] Można stosować ten lemat do miary ξ, która jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia.

pierwsza i trzecia równość zachodzą, gdyż miary ξ i λ_n znikają na podprzestrzeniach afinicznych wymiaru mniejszego niż n.

Krok 3. Miary ξ i λ_n pokrywają się na zbiorach ograniczonych typu G_δ. Jeśli zbiór G jest ograniczony i typu G_δ, to $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, gdzie Ω_j są zbiorami otwartymi, ograniczonymi. Dlatego, wobec Stwierdzenia 4.9 (iii),

$$\xi(G) = \lim_{j\to\infty} \xi(\Omega_j) = \lim_{j\to\infty} \lambda_n(\Omega_j) = \lambda_n(G).$$

Krok 4. Miary ξ i λ_n pokrywają się na zbiorach ograniczonych miary Lebesgue'a zero. Istotnie, jeśli $\lambda_n(Z) = 0$, to na mocy Twierdzenia 4.26 istnieje G ograniczony i typu G_δ taki, że $Z \subset G$ i $\lambda_n(G) = 0$. Wtedy jednak $\xi(G) = 0$, więc $0 \le \xi(Z) \le \xi(G) = 0$.

Krok 5. Miary ξ i λ_n pokrywają się na zbiorach ograniczonych, mierzalnych w sensie Lebesgue'a. To wynika natychmiast z Twierdzenia 4.26: wynika zeń łatwo, że każdy zbiór mierzalny i ograniczony jest sumą pewnego zbioru ograniczonego typu G_δ i rozłącznego z nim zbioru miary zero.

Ponieważ każdy zbiór $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ jest sumą wstępującego ciągu zbiorów mierzalnych i ograniczonych (można np. wziąć $A_j = A \cap B(0, j)$), więc na mocy Stwierdzenia 4.9 (ii) miary ξ i λ_n są równe na całym σ-ciele $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. □

Omówimy teraz pewną charakteryzację wyznacznika macierzy, która pozwoli nam podać wzór na miarę Lebesgue'a liniowego obrazu zbioru mierzalnego.

Lemat 4.34. *Załóżmy, że funkcja $c\colon GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ ma dwie własności: $c(s\cdot \mathrm{Id}) = |s|^n$ dla każdej liczby $s \in \mathbb{R}$, $s \ne 0$ i $c(AB) = c(A)c(B)$ dla wszystkich macierzy $A, B \in GL(n,\mathbb{R})$. Wówczas*

$$c(A) = |\det A| \qquad \text{dla wszystkich } A \in GL(n,\mathbb{R}).$$

Dowód. Oznaczmy przez A_j macierz, która poza przekątną ma same zera, a na przekątnej same jedynki, z wyjątkiem j-tego miejsca, gdzie znajduje się liczba -1. Mamy $A_j^2 = \mathrm{Id}$ i dla każdej liczby $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest

$$|s|^{2n} = c\big(s^2 \cdot A_j^2\big) = \big(c(s \cdot A_j)\big)^2.$$

Ponieważ $c(A) \ge 0$ dla każdej nieosobliwej macierzy A, więc $c(s \cdot A_j) = |s|^n$.

Niech teraz, dla $1 \le k \ne l \le n$, δ_{kl} oznacza macierz kwadratową, złożoną z samych zer, za wyjątkiem jedynki w k-tym wierszu i l-tej kolumnie. Połóżmy $M_{kl}(s) = \mathrm{Id} + s\delta_{kl}$. Nietrudno sprawdzić (Czytelnik zechce uzupełnić szczegóły), że zachodzą równości $\delta_{kl} \cdot A_k = \delta_{kl} = -A_k \cdot \delta_{kl}$. Dlatego

$$A_k \cdot \delta_{kl} \cdot A_k = -\delta_{kl},$$

stąd zaś $A_k \cdot M_{kl}(s) \cdot A_k = M_{kl}(-s)$ i wobec równości $c(A_k) = 1$ jest

$$c\big(M_{kl}(-s)\big) = c(A_k)^2 c(M_{kl}(s)) = c\big(M_{kl}(s)\big). \tag{4.16}$$

Jednak

$$M_{kl}(s)M_{kl}(-s) = (\mathrm{Id} + s\delta_{kl})(\mathrm{Id} - s\delta_{kl}) = \mathrm{Id} - s^2 \cdot \delta_{kl}^2 = \mathrm{Id}$$

i dlatego równość (4.16), łącznie z założeniem $c(AB) = c(A)c(B)$, pociąga za sobą warunek

$$c\big(M_{kl}(\pm s)\big) = 1, \quad c\big(A \cdot M_{kl}(\pm s)\big) = c\big(M_{kl}(\pm s) \cdot A\big) = c(A) \qquad \text{dla } A \in GL(n, \mathbb{R}). \tag{4.17}$$

Widać więc, że funkcja $c(A)$ nie zmienia wartości, gdy daną macierz mnożymy przez $M_{kl}(\pm s)$. Zauważmy jednak, że iloczyn

$$M_{kl}(s)B = B + s \cdot \delta_{kl} \cdot B$$

powstaje w ten sposób, że do k-tego wiersza macierzy B dodajemy l-ty wiersz tej macierzy pomnożony przez s, a pozostałe wiersze pozostawiamy bez zmian. Podobnie, iloczyn $BM_{kl}(s) = B + s \cdot B \cdot \delta_{kl}$ powstaje tak, że do l-tej kolumny B dodajemy k-tą kolumnę, pomnożoną przez s (a pozostałych kolumn nie zmieniamy).

Wiadomo z algebry liniowej, że za pomocą takich operacji na wierszach i kolumnach, tzn. za pomocą mnożenia przez $M_{kl}(\pm s)$, można każdą macierz nieosobliwą przekształcić w macierz diagonalną $s \cdot \mathrm{Id}$ lub $s \cdot A_n$, gdzie $s = \sqrt[n]{|\det A|}$. Ponieważ zaś

$$c(s \cdot \mathrm{Id}) = c(s \cdot A_n) = |s|^n$$

więc ostatecznie $c(A) = |s|^n = |\det A|$. $\square$

Twierdzenie 4.35. *Niech $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ będzie zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, a $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – przekształceniem liniowym. Wówczas zbiór $\Phi(A) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ i zachodzi równość*

$$\lambda_n(\Phi(A)) = |\det \Phi| \cdot \lambda_n(A)\,. \tag{4.18}$$

Dowód. Jeśli $\det \Phi = 0$, to obraz $\operatorname{im} \Phi = \Phi(\mathbb{R}^n)$ przekształcenia Φ jest podprzestrzenią liniową wymiaru mniejszego niż n. Z Lematu 4.32 wynika, że $\lambda_n(\Phi(\mathbb{R}^n)) = 0$, a więc dla każdego $A \subset \mathbb{R}^n$ zbiór $\Phi(A) \subset \Phi(\mathbb{R}^n)$ jest mierzalny i ma miarę zero. Innymi słowy, teza twierdzenia zachodzi, gdy $\det \Phi = 0$.

Niech zatem odtąd $\det \Phi \neq 0$. Przekształcenie Φ jest wtedy homeomorfizmem $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$; obrazy zbiorów otwartych są więc otwarte (to wynika z ciągłości Φ^{-1}), obrazy zbiorów typu G_δ są zbiorami typu G_δ, zaś obrazy zbiorów miary Lebesgue'a zero są zbiorami miary Lebesgue'a zero.[3] Dlatego, wobec Twierdzenia 4.26, obrazy zbiorów mierzalnych są zbiorami mierzalnymi.

Pozostaje udowodnić wzór (4.18). Połóżmy

$$\mu_\Phi(A) = \lambda_n(\Phi(A)); \tag{4.19}$$

łatwo sprawdzić, że μ_Φ jest miarą na σ-ciele $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, niezmienniczą ze względu na przesunięcia. Z Twierdzenia 4.31 wynika, że

$$\mu_\Phi(A) = c(\Phi) \cdot \lambda_n(A) \qquad \text{dla } A \in \mathscr{L}(R^n), \tag{4.20}$$

gdzie stała

$$c(\Phi) = \mu_\Phi([0,1]^n) = \lambda_n(\Phi([0,1]^n)). \tag{4.21}$$

[3] Czytelnik zechce samodzielnie przemyśleć ten fakt; należy pamiętać, że przekształcenie Φ zwiększa długość każdego wektora co najwyżej $\|\Phi\|$ razy.

Potraktujmy teraz c jako funkcję, określoną na grupie $GL(n, \mathbb{R})$ macierzy nieosobliwych $n \times n$ (każdy izomorfizm liniowy utożsamiamy z jego macierzą w standardowych bazach). Sprawdzimy, że c spełnia założenia Lematu 4.34, co pozwoli zakończyć cały dowód twierdzenia.

Jeśli $\Phi = s \cdot \mathrm{Id}$, to $\Phi([0,1]^n)$ jest kostką o krawędzi $|s|$, a więc ma miarę $|s|^n$. Zatem $c(s \cdot \mathrm{Id}) = |s|^n$. Dla $\Phi_1, \Phi_2 \in GL(n, \mathbb{R})$ mamy z definicji c

$$\mu_{\Phi_1\Phi_2}([0,1]^n) = c(\Phi_1\Phi_2)\,;$$

z drugiej strony, wobec definicji μ_Φ jest

$$\begin{aligned}\mu_{\Phi_1\Phi_2}([0,1]^n) &\overset{(4.21)}{=} \lambda_n\big(\Phi_1(\Phi_2([0,1]^n))\big) \\ &\overset{(4.19)}{=} \mu_{\Phi_1}(\Phi_2([0,1]^n)) \\ &\overset{(4.20)}{=} c(\Phi_1)\lambda_n(\Phi_2([0,1]^n)) \overset{(4.21)}{=} c(\Phi_1)c(\Phi_2).\end{aligned}$$

Spełnione są więc oba założenia Lematu 4.34. Wnioskujemy zeń, że $c(\Phi) = |\det \Phi|$; wzory (4.19)–(4.20) implikują, że

$$\lambda_n(\Phi(A)) = \mu_\Phi(A) = c(\Phi)\lambda_n(A) = |\det \Phi| \cdot \lambda_n(A)\,.$$

Dowód Twierdzenia 4.35 jest zakończony. □

Uwaga 4.36.

1. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ istnieją wielościany, które mają równe objętości, ale nie są równoważne przez podział skończony (tzn. jednego z nich nie można w żaden sposób podzielić na skończoną liczbę wielościennych klocków, z których dałoby się złożyć drugi wielościan).[4] Między innymi dlatego dowód równości $\lambda_n(\Phi(A)) = |\det \Phi|\lambda_n(A)$ wymaga kilkakrotnego odwołania się do charakteryzacji miary Lebesgue'a, podanej w Twierdzeniu 4.31.

2. Jak przekonamy się później, równość (4.18) jest szczególnym przypadkiem twierdzenia o zamianie zmiennych w całce Lebesgue'a.

Twierdzenie 4.37. *Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}^n$ i $B \subset \mathbb{R}^m$ są zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a. Wówczas zbiór $A \times B$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ i zachodzi równość*

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B)\,. \tag{4.22}$$

Dowód. Będziemy postępować podobnie, jak w dowodzie Twierdzenia 4.31, stopniowo powiększając klasy zbiorów A, B, dla których zachodzi teza. Dowód nie jest trudny, jednak jego zapisanie wymaga pewnej pracy.

Krok 1. Jeśli A i B są przedziałami odpowiednio w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$, to ich iloczyn kartezjański jest przedziałem w $\mathbb{R}^{n+m}$; mamy wtedy

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \mathrm{vol}\,(A \times B) = \mathrm{vol}\,(A) \cdot \mathrm{vol}\,(B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B)\,.$$

[4] Na płaszczyźnie każde dwa wielokąty o równych polach *są* równoważne przez podział skończony. Pytanie, czy analogiczny fakt ma miejsce w $\mathbb{R}^3$, było w 1900 r. treścią trzeciego problemu Hilberta. W tym samym roku Max Dehn podał przykład dwóch ostrosłupów o równych objetościach, które nie są równoważne przez podział skończony. Zainteresowany Czytelnik może sięgnąć np. do rozdziału 7 książki M. Aignera i G.M. Zieglera *Dowody z Księgi* (wyd. PWN, Warszawa 2002).

(Środkowa równość wynika wprost z definicji objętości przedziału).

Krok 2. Jeśli A i B są zbiorami otwartymi, to

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \qquad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k,$$

gdzie Q_j (odpowiednio, R_k) są kostkami diadycznymi w R^n (odpowiednio, w $\mathbb{R}^m$) o wnetrzach parami rozłącznych. Wtedy jednak

$$A \times B = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} Q_j \times R_k,$$

gdzie przedziały $Q_j \times R_k$ mają wnętrza parami rozłączne. Ponieważ miara Lebesgue'a zeruje się na podprzestrzeniach, zawierających ściany tych przedziałów, więc

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+m}(A \times B) &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda_{n+m}(Q_j \times R_k) \\
&= \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j)\lambda_m(R_k) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j)\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m(R_k)\right) = \lambda_n(A)\lambda_m(B)\,.
\end{aligned}$$

Krok 3. Załóżmy teraz, że A, B są zbiorami ograniczonymi typu G_δ, tzn.

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j, \qquad B = \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j,$$

gdzie $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ są otwarte i ograniczone w $\mathbb{R}^n$, zaś $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$ są otwarte i ograniczone w $\mathbb{R}^m$. Wtedy

$$A \times B = \bigcap_{j=1}^{\infty} (U_j \times V_j)$$

jest zbiorem ograniczonym typu G_δ w $\mathbb{R}^{n+m}$. Na mocy Stwierdzenia 4.9 (iii) o mierze iloczynu ciągu zstępującego,

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+m}(A \times B) = \lim_{j=1} \lambda_{n+m}(U_j \times V_j) &= \lim_{j=\infty} \lambda_n(U_j)\lambda_m(V_j) \\
&= \lim_{j=\infty} \lambda_n(U_j) \cdot \lim_{j=\infty} \lambda_m(V_j) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B)\,.
\end{aligned}$$

Krok 4. Wzór (4.22) zachodzi, gdy A, B są ograniczone i $\lambda_n(A) = 0$ lub $\lambda_m(B) = 0$. Bez zmniejszenia ogólności niech $\lambda_n(A) = 0$; w drugim przypadku dowód jest taki sam.

Zbiór B jest ograniczony, a więc jest zawarty w pewnej kuli otwartej $V \subset \mathbb{R}^m$. Niech $\varepsilon > 0$. Wobec Twierdzenia 4.26, istnieje taki zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$, że $A \subset U$ i $\lambda_n(U) < \varepsilon/\lambda_m(V)$. Zatem

$$\lambda_{n+m}(A \times B) \le \lambda_{n+m}(U \times V) = \lambda_n(U)\lambda_m(V) < \varepsilon\,;$$

z dowolności $\varepsilon > 0$ wynika, że $\lambda_{n+m}(A \times B) = 0 = \lambda_n(A) \times \lambda_n(B)$.

Krok 5. Załóżmy teraz, że $A \subset \mathbb{R}^n$ i $B \subset \mathbb{R}^m$ są ograniczonymi zbiorami mierzalnymi. Znajdziemy zbiory $Y \subset \mathbb{R}^n$ i $Z \subset \mathbb{R}^m$ takie, że

$$\lambda_n(Y) = \lambda_m(Z) = 0,$$
$$A \cap Y = B \cap Z = \emptyset,$$
$$\text{zbiory } G_A = A \cup Y \text{ oraz } B_B = B \cup Z \text{ są typu } G_\delta.$$

Wtedy

$$G_A \times G_B = A \times B \cup \Big(Y \times B \,\cup\, A \times Z \,\cup\, Y \times Z\Big).$$

Z poprzedniego kroku dowodu wynika, że $\lambda_{n+m}\big(Y \times B \,\cup\, A \times Z \,\cup\, Y \times Z\big) = 0$. Zbiór $G_A \times G_B$ jest typu G_δ w R^{n+m}; dlatego zbiór $A \times B$, który różni się odeń o zbiór miary zero, należy do $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{n+m})$. Mamy też

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(G_A \times G_B) = \lambda_n(G_A)\lambda_m(G_B) = \lambda_n(A)\lambda_m(B).$$

Krok 6 (przypadek ogólny). Jeśli A i B są dowolnymi zbiorami mierzalnymi, to biorąc $A_j = A \cap B(0, j)$ w $\mathbb{R}^n$ i $B_j = B \cap B(0, j)$ w $\mathbb{R}^m$, otrzymujemy na mocy Stwierdzenia 4.9 (ii)

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \lim_{j=\infty} \lambda_{n+m}(A_j \times B_j) = \lim_{j=\infty} \lambda_n(A_j)\lambda_m(B_j) = \lambda_n(A)\lambda_m(B).$$

Dowód całego Twierdzenia 4.37 jest zakończony. □

4.3 Funkcje mierzalne

Określimy teraz klasę funkcji, które można całkować względem danej miary. Niech X będzie dowolnym zbiorem, a $\mathscr{F}$ – ustalonym σ-ciałem podzbiorów X, wyposażonym w przeliczalnie addytywną miarę $\mu\colon \mathscr{F} \to [0, +\infty]$. Trójkę $(X, \mathscr{F}, \mu)$ nazywa się *przestrzenią z miarą*. Najważniejszym modelem takiej sytuacji będzie dla nas na razie $X = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{F} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \lambda_n$. Będziemy rozpatrywać funkcje $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definicja 4.38. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest *mierzalna* (względem σ-ciała $\mathscr{F}$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zbiór

$$f^{-1}\big((a, +\infty]\big) = \{x \in X : f(x) > a\}$$

należy do $\mathscr{F}$.

Jeśli $X = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{F} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \lambda_n$, to mówimy o funkcjach *mierzalnych w sensie Lebesgue'a*.

Stwierdzenie 4.39. *Niech $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *funkcja f jest mierzalna;*

(ii) *dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X : f(x) \le a\} \in \mathscr{F}$;*

(iii) *dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathscr{F}$;*

(iv) *dla każdego* $a \in \mathbb{R}$ *zbiór* $\{x \in X\colon f(x) \geq a\} \in \mathscr{F}$.

Dowód. Skorzystamy z tego, że σ-ciało $\mathscr{F}$ jest zamknięte ze względu na branie dopełnień i przeliczalnych sum.

Zauważmy, że zbiór $\{x \in X\colon f(x) \leq a\}$ jest dopełnieniem $\{x \in X\colon f(x) > a\}$. Dlatego (i) $\Rightarrow$ (ii). Następnie,

$$\{x \in X\colon f(x) < a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X\colon f(x) \leq a - \tfrac{1}{m}\}.$$

Dlatego drugi warunek pociąga za sobą trzeci.

Z warunku (iii) wynika (iv), gdyż $\{x \in X\colon f(x) \geq a\} = X \setminus \{x \in X\colon f(x) < a\}$. Wreszcie,

$$\{x \in X\colon f(x) > a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X\colon f(x) \geq a + \tfrac{1}{m}\};$$

dlatego (iv) pociąga za sobą warunek, podany w definicji funkcji mierzalnej. □

Stwierdzenie 4.40. *Jeśli* $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *są funkcjami mierzalnymi, to zbiory*

$$\{x \in X\colon f(x) > g(x)\}, \qquad \{x \in X\colon f(x) \geq g(x)\}, \qquad \{x \in X\colon f(x) = g(x)\}$$

należą do σ*-ciała* $\mathscr{F}$.

Dowód. Ponieważ zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$, więc

$$\begin{aligned}\{x \in X\colon f(x) > g(x)\} &= \bigcup_{w \in \mathbb{Q}} \{x \in X\colon f(x) > w > g(x)\} \\ &= \bigcup_{w \in \mathbb{Q}} \{x \in X\colon f(x) > w\} \cap \{x \in X\colon w > g(x)\}.\end{aligned}$$

Z poprzedniego stwierdzenia wynika więc, że $\{f > g\} \in \mathscr{F}$. Przez symetrię, $\{g > f\}$ też należy do $\mathscr{F}$. Zbiory $\{f \geq g\}$ i $\{g \geq f\}$ są dopełnieniami zbiorów, odpowiednio, $\{g > f\}$ i $\{f > g\}$, więc także należą do $\mathscr{F}$. Wreszcie,

$$\{x \in X\colon f(x) = g(x)\} = \{x \in X\colon f(x) \geq g(x)\} \cap \{x \in X\colon g(x) \geq f(x)\} \in \mathscr{F},$$

gdyż $\mathscr{F}$ jest zamknięte ze względu na branie iloczynu zbiorów. □

Stwierdzenie 4.41. *Jeśli* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *jest funkcją mierzalną, to przeciwobraz* $f^{-1}(B)$ *każdego zbioru borelowskiego* $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ *jest mierzalny.*

Dowód. Klasa $\mathscr{K}$ wszystkich tych podzbiorów prostej, których przeciwobrazy należą do σ-ciała $\mathscr{F}$, sama jest σ-ciałem (łatwe ćwiczenie). Ponadto, wszystkie przedziały otwarte należą do $\mathscr{K}$; to wynika ze Stwierdzenia 4.39. Dlatego $\mathscr{K}$ zawiera *najmniejsze* σ-ciało, zawierające wszystkie przedziały, tzn. σ-ciało $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. □

Twierdzenie 4.42. *Niech* $f_j\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2, \ldots$, *będzie dowolnym ciągiem funkcji mierzalnych. Wówczas każda z funkcji*

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j, \qquad \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j, \qquad \liminf_{j \to \infty} f_j, \qquad \limsup_{j \to \infty} f_j$$

jest mierzalna.

Zanim podamy dowód tego twierdzenia, sformułujmy oczywisty, ważny wniosek.

Wniosek 4.43. *Jeśli ciąg funkcji mierzalnych* $f_j\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *jest zbieżny punktowo na* X*, to* $f = \lim f_j$ *jest funkcją mierzalną.*

DOWÓD WNIOSKU 4.43. Jeśli ciąg f_j jest zbieżny punktowo na X, to $f = \lim f_j = \liminf f_j$. □

DOWÓD TWIERDZENIA 4.42. Wykorzystamy Stwierdzenie 4.39. Przy ustalonym $x \in X$ kres dolny zbioru $\{f_n(x)\colon n = 1, 2, \ldots\}$ jest mniejszy od $a \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ jest $f_n(x) < a$. Innymi słowy,

$$\left\{x \in X\colon \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X\colon f_n(x) < a\}\ .$$

Ponieważ kazdy ze zbiorów $\{x \in X\colon f_n(x) < a\}$ należy do $\mathscr{F}$, więc i zbiór po lewej stronie ostatniej równości należy do $\mathscr{F}$, to zaś oznacza, że funkcja $f = \inf_n f_n$ jest mierzalna.

Podobnie,

$$\left\{x \in X\colon \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X\colon f_n(x) > a\} \in \mathscr{F}\ .$$

Dlatego $\sup_n f_n$ jest funkcją mierzalną.

Aby wykazać mierzalność granicy dolnej i górnej, przypomnijmy (patrz np. skrypt wykładów z Analizy I, podrozdział 8.1), że

$$\liminf_{j\to\infty} a_j = \sup_{j\in\mathbb{N}}\left(\inf_{n>j} a_n\right), \qquad \limsup_{j\to\infty} a_j = \inf_{j\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n>j} a_n\right).$$

Z udowodnionej już części twierdzenia i tych wzorów wynika mierzalność funkcji $\liminf f_n$ i $\limsup f_n$. □

Okazuje się, że klasa funkcji mierzalnych jest zamknięta z uwagi na różne operacje algebraiczne.

Stwierdzenie 4.44. *Załóżmy, że* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, a funkcje* $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *są mierzalne. Wówczas mierzalna jest każda z funkcji*

$$\alpha \cdot f, \qquad \alpha f + \beta g, \qquad f^2, \qquad fg, \qquad |f|, \qquad \max(f, g), \qquad \min(f, g).$$

Uwaga 4.45.
1. Zakładamy milcząco, że podane wyżej funkcje są dobrze określone.
2. W wielu sytuacjach można się nie przejmować powyższym zastrzeżeniem. Wyjaśnijmy to nieco bliżej. Najpierw wprowadzimy ważny termin: mówi się, że funkcja mierzalna f ma własność W *prawie wszędzie* na X, jeśli zbiór tych punktów X, gdzie własność W jest naruszona, jest zbiorem miary zero.

   Jeśli $X = \mathbb{R}^n$ i $\mathscr{F} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, a funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna, to każda funkcja g, która jest równa f prawie wszędzie (tzn. jest taka, że $\{f \neq g\}$ jest zbiorem miary Lebesgue'a zero), też jest funkcją mierzalną. To wynika z faktu, że każdy podzbiór zbioru miary zero jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

Jeśli zatem funkcje f, g są *prawie wszędzie* skończone (tzn. zbiory $Z_f = \{f = \pm\infty\}$ i $Z_g = \{g = \pm\infty\}$ są zbiorami miary Lebesgue'a zero), to sumę $f + g$ oraz iloczyn $f \cdot g$ można bez kłopotu określić na zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus (Z_f \cup Z_g)$, a na zbiorze $Z_f \cup Z_g$ nadać im *jakąkolwiek* wartość. To nie wpłynie na mierzalność.

Dowód Stwierdzenia 4.44. *Krok 1.* Jeśli $\alpha > 0$, to

$$\{x \in X \colon \alpha f(x) > a\} = \left\{x \in X \colon f(x) > \frac{a}{\alpha}\right\} \in \mathscr{F} \qquad \text{dla każdego } a \in \mathbb{R}.$$

Jeśli $\alpha < 0$, to zmienia się kierunek jednej z nierówności w powyższym wzorze; mierzalność funkcji αf wynika wtedy z równoważności warunków, podanych w Stwierdzeniu 4.39.

Krok 2: mierzalność sumy dwóch funkcji. Mierzalność $\alpha f + \beta g$ wystarczy udowodnić, gdy $\alpha = \beta = 1$. Zauważmy najpierw, że jeśli h jest funkcją mierzalną, to $h + \mathrm{const}$ też jest mierzalna, gdyż $\{x \in X \colon h(x) + c > a\} = \{x \in X \colon h(x) > -c + a\}$. Dalej, dla każdego $a \in \mathbb{R}$ mamy

$$\{x \in X \colon f(x) + g(x) > a\} = \{x \in X \colon f(x) > -g(x) + a\};$$

funkcja $-g(x) + a = -1 \cdot g(x) + a$ jest mierzalna, więc mierzalność zbioru $\{f + g > a\}$ wynika ze Stwierdzenia 4.40.

Krok 3: mierzalność kwadratu funkcji mierzalnej. Dla $a \le 0$ zbiór $\{x \in X \colon f^2(x) \ge a\}$ jest po prostu równy X, a więc należy do $\mathscr{F}$. Dla $a > 0$ mamy

$$\{x \in X \colon f^2(x) \ge a\} = \left\{x \in X \colon f(x) \ge \sqrt{a}\,\right\} \cup \left\{x \in X \colon f(x) \le -\sqrt{a}\,\right\} \in \mathscr{F}.$$

Krok 4: mierzalność iloczynu wynika teraz natychmiast ze wzoru

$$fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big).$$

Krok 5: mierzalność $|f|$ sprawdzamy łatwo wprost z definicji; dla $a \ge 0$ jest

$$\{x \in X \colon |f(x)| \ge a\} = \{x \in X \colon f(x) \ge a\} \cup \{x \in X \colon f(x) \le -a\},$$

zaś dla $a < 0$ mamy po prostu $\{x \in X \colon |f(x)| \ge a\} = X$.

Krok 6: aby zakończyć cały dowód, stosujemy wzory

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}, \qquad \min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

i korzystamy z udowodnionej już mierzalności sumy, różnicy i wartości bezwzględnej funkcji mierzalnych. □

Stwierdzenie 4.46. *Jeśli $f \colon X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna, a $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to $g \circ f \colon X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna.*

Dowód. Dla dowolnych funkcji $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}\big(g^{-1}(Z)\big)$. Ponieważ g jest ciągła, więc zbiór $Z_a = g^{-1}\big((a, +\infty)\big)$ jest zbiorem otwartym, tzn. jest sumą przeliczalnie wielu rozłącznych przedziałów otwartych. Dlatego

$$\{x \in X \colon g \circ f(x) > a\} = (g \circ f)^{-1}\big((a, +\infty)\big) = f^{-1}(Z_a)$$

jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów, należących do $\mathscr{F}$. □

Funkcje proste

Definicja 4.47. Funkcję mierzalną $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, która ma skończony zbiór wartości, nazywamy *funkcją prostą*.

Stwierdzenie 4.48. *Funkcja $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją prostą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją parami rozłączne zbiory $A_1, \ldots, A_k \in \mathscr{F}$ oraz różne elementy $a_1, \ldots, a_k \in \overline{\mathbb{R}}$ takie, że*

$$f = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot \chi_{A_j} \tag{4.23}$$

Dowód. Proste ćwiczenie. Jeśli $A \in \mathscr{F}$, to χ_A jest funkcją mierzalną, gdyż zbiór $\{\chi_A > a\}$ jest albo pusty, albo równy A, albo równy X. Dlatego mierzalność kombinacji liniowej funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych wynika ze Stwierdzenia 4.44.

Załóżmy teraz, że $a_1 < a_2 < \ldots < a_k \in \overline{\mathbb{R}}$ są wszystkimi wartościami funkcji mierzalnej f. Dla $j = 1, 2, \ldots, k$ niech $A_j := \{x \in X \colon f(x) = a_j\}$. Oczywiście,

$$A_j = X \setminus \Big(\{x \in X \colon f(x) > a_j\} \cup \{x \in X \colon f(x) < a_j\} \Big)\,;$$

zbiory A_j są mierzalne, parami rozłączne i $f = \sum a_j \chi_{A_j}$. $\square$

Uwaga 4.49. Funkcja (4.23) ma skończony zbiór wartości także wtedy, gdy zbiory A_j nie są parami rozłączne.

Wniosek 4.50. *Kombinacja liniowa skończonej liczby funkcji prostych jest funkcją prostą.*

Twierdzenie 4.51. *Jeśli $f\colon X \to [0, \infty]$ jest mierzalna, to istnieje niemalejący ciąg funkcji prostych $f_n\colon X \to [0, \infty]$ zbieżny do f punktowo na X. Jeśli ponadto f jest ograniczona, to istnieje niemalejący ciąg nieujemnych funkcji prostych zbieżny do f jednostajnie na X.*

Dowód. Dla $n = 1, 2, \ldots$ połóżmy

$$A_{m,n} = \Big\{ x \in X \colon f(x) \colon \frac{m}{2^n} \le f(x) < \frac{m+1}{2^n} \Big\}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n \cdot 2^n - 1,$$

$$A_{2^n,n} = \{x \in X \colon n \le f(x)\}.$$

Zbiory $A_{m,n}$ są mierzalne i są, przy ustalonym n, parami rozłączne. Przyjmijmy

$$f_n = \sum_{m=0}^{n \cdot 2^n} \frac{m}{2^n} \chi_{A_{m,n}}\,.$$

(Intuicja jest prosta i naturalna: wykres f tniemy na części, prowadząc cięcia na wysokościach $m/2^n$, gdzie $m = 0, 1, \ldots, n2^n$; funkcja f_n jest stała między dwiema cięciami. Przechodząc od n do $n+1$, prowadzimy cięcia dwukrotnie gęściej i nieco wyżej – nie tylko do wysokości n, ale aż do $n+1$).

Wprost z definicji $f_n \le f$ na X, gdyż $f_n = m/2^n \le f$ na każdym ze zbiorów $A_{m,n}$. Jeśli $f(x) < \infty$, to dla wszystkich $n > f(x)$ mamy $f_n(x) \le f(x) < f(x) + 2^{-n}$ i dlatego $f_n(x) \to f(x)$ na zbiorze $\{f < \infty\}$. Jeśli $f(x) = \infty$, to $f(x) \ge n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i wtedy $f_n(x) = n$, a więc również w tym przypadku $f_n(x) = n \to f(x) = \infty$.

Wreszcie, nietrudno sprawdzić, że $f_{n+1} \geq f_n$, gdyż

$$A_{m,n} = A_{2m,n+1} \cup A_{2m+1,n+1}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n \cdot 2^n - 1,$$
$$A_{2^n,n} = A_{n2^{n+1},n+1} \cup A_{n2^{n+1}+1,n+1} \cup \ldots \cup A_{(n+1)2^{n+1},n+1}.$$

(Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi).

Jeśli f jest ograniczona, to dla $n > \sup f$ nierówność $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$ zachodzi na całym zbiorze X. To oznacza, że $f_n \rightrightarrows f$ na X. $\square$

Podamy teraz dwa twierdzenia, opisujące związek mierzalności z ciągłością.

Twierdzenie 4.52 (N. Łuzin). *Jeśli $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór domknięty $F \subset \mathbb{R}^n$, że $f\big|_F$ jest ciągła i $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F) < \varepsilon$.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $h(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} f(x)$. Funkcja h jest nieujemna i ograniczona na $\mathbb{R}^n$, zatem wobec Twierdzenia 4.51 istnieje ciąg funkcji prostych $h_k \rightrightarrows h$ na $\mathbb{R}^n$, $h - 2^{-k} \leq h_k \leq h$. Niech $h_k = \sum_{i=1}^{m_k} a_{k,i}\chi_{A_{k,i}}$, gdzie $A_{k,1}, A_{k,2}, \ldots, A_{k,m_k}$ są parami rozłączne. Można przyjąć, że $a_{k,1} = 0$ dla wszystkich k; wtedy $\mathbb{R}^n$ jest sumą zbiorów $A_{k,i}$.

Wobec Twierdzenia 4.26, charakteryzującego zbiory mierzalne, istnieją zbiory domknięte $F_{k,i} \subset A_{k,i}$ takie, że $\lambda_n(A_{k,i} \setminus F_{k,i}) < \varepsilon/(m_k 2^k)$. Połóżmy

$$F_k = F_{k,1} \cup F_{k,2} \cup \ldots \cup F_{k,m_k},$$

jest to zbiór domknięty, gdyż suma skończenie wielu zbiorów domkniętych jest domknięta. Ponadto,

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F_k) = \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_n(A_{k,i} \setminus F_{k,i}) < m_k \cdot \frac{\varepsilon}{m_k 2^k} = \frac{\varepsilon}{2^k} \tag{4.24}$$

Zbiór domknięty $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ spełnia, wobec wzorów de Morgana,

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F) = \lambda_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus F_k\right) \overset{(4.24)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Zauważmy, że h_k jest stała na każdym ze zbiorów $F_{k,i}$, a więc jest ciągła na F_k, tzn. jest ciągła także na $F \subset F_k$. Ponadto, na zbiorze F jest $|h_k - h| \leq 2^{-k}$. Innymi słowy, na zbiorze F ciąg $h_k\big|_F$ funkcji *ciągłych* jest zbieżny jednostajnie do $h\big|_F$. Wynika stąd ciągłość $h\big|_F$. Ponieważ $f = \operatorname{tg}(h - \frac{\pi}{2})$, więc $f\big|_F$ jest ciągła. $\square$

Twierdzenie 4.53 (M. Fréchet). *Jeśli $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, to istnieje ciąg funkcji ciągłych $\phi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zbieżny do f prawie wszędzie na $\mathbb{R}^n$.*

Dowód. Skorzystajmy z twierdzenia Łuzina. Dla $k \in \mathbb{N}$ niech F_k będzie takim zbiorem domkniętym, że $f_k = f\big|_{F_k}$ jest ciągła i $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F_k) < 2^{-k-1}$. Na mocy znanego z topologii *twierdzenia Tietzego o przedłużaniu* istnieje funkcja ciągła $\phi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że $\phi_k = f_k$ na zbiorze F_k.

Zbiory $D_k = F_k \cap F_{k+1} \cap F_{k+2} \cap \ldots$ są domknięte; ponadto,

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus D_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F_j) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \cdots = \frac{1}{2^k}\,. \tag{4.25}$$

Na zbiorze D_k jest $\phi_j = f_j = f$ dla wszystkich $j = k, k+1, k+2, \ldots$. Dlatego ciąg ϕ_j jest zbieżny punktowo do f na sumie $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ zbiorów D_k. Z oszacowania (4.25) wynika, że

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus S) = \lambda_n\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus D_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus D_k) \overset{(4.25)}{=} 0\,.$$

To spostrzeżenie kończy cały dowód. □

Naturalne jest pytanie, dla jakich przestrzeni z miarą $(X, \mathscr{F}, \mu)$ zachodzą odpowiedniki twierdzeń Łuzina i Frécheta. W dowodach wykorzystuje się tylko dwie szczególne własności przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i miary Lebesgue'a: charakteryzację zbiorów mierzalnych (ściślej: możliwość 'przybliżania' zbiorów mierzalnych zbiorami domkniętymi) oraz twierdzenie Tietzego o przedłużaniu, które zachodzi dla każdej przestrzeni topologicznej normalnej (w szczególności: dla każdej przestrzeni metrycznej).

Definicja 4.54 (miara regularna). Miara μ na σ-ciele $\mathscr{F}$ przestrzeni topologicznej, zawierającym σ-ciało $\mathscr{B}(X)$ zbiorów borelowskich, nazywa się regularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \in \mathscr{F}$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieją zbiór otwarty $\Omega \subset X$ i zbiór domknięty $F \subset X$ takie, że $F \subset A \subset \Omega$ i $\mu(\Omega \setminus F) < \varepsilon$.

Uwaga 4.55. Twierdzenie Łuzina zachodzi dla każdej przestrzeni topologicznej z miarą regularną μ, natomiast twierdzenie Frécheta zachodzi dla każdej przestrzeni topologicznej normalnej, wyposażonej w miarę regularną μ.