

Rozdział 6

Miara powierzchniowa na rozmaitościach zanurzonych

W tym rozdziale zajmiemy się definicją tzw. *miary powierzchniowej* na m -wymiarowej rozmaitości zanurzonej $M \subset \mathbb{R}^n$ oraz opisem własności tej miary. Definicję wprowadzimy tak, aby dla $m = 1$ otrzymać długość krzywej, a dla $m = 2$ – pojęcie *poła* powierzchni gładkiej, odpowiadające naturalnym intuicjom.

Czytelnik pamięta zapewne, że na I roku studiów określiliśmy długość krzywej jako kres górny długości łamanych wpisanych w tę krzywą. Pomysł, stojący za definicją miary powierzchniowej, jest w istocie podobny. Zaczniemy jednak od przykładu, który świadczy o tym, że definiowanie pola powierzchni gładkiej wiąże się z pewnymi trudnościami.

Przykład 6.1 (chińska latarnia H. A. Schwarza, 1880). Dla danych liczb naturalnych $m, n > 1$ opiszemy powierzchnię wielościenną $L_{m,n}$, złożoną z $2mn$ przystających trójkątów równoramiennych o wierzchołkach położonych na powierzchni bocznej walca obrotowego o promieniu podstawy $r = 1$ i wysokości $h = 1$.

Poprowadźmy $n + 1$ płaszczyzn poziomych $\pi_0, \pi_2, \dots, \pi_n$; pierwsza z nich zawiera dolną podstawę walca, ostatnia – górną podstawę, a odległość sąsiednich płaszczyzn jest równa $1/n$. Płaszczyzny te przecinają powierzchnię boczną walca wzdłuż $n + 1$ okręgów. Na każdym okręgu ustalamy m punktów, stanowiących wierzchołki m -kąta foremego; robimy to tak, aby punkty na $(j + 1)$ -szym okręgu leżały nad środkami łuków, wyznaczonych przez punkty na j -tym okręgu.¹ Liczba wszystkich punktów wynosi $(n + 1) \cdot m$.

Powierzchnia $L_{m,n}$ jest sumą wszystkich trójkątów, których podstawa łączy dwa sąsiednie punkty na tym samym okręgu, a trzeci wierzchołek znajduje się na sąsiednim okręgu, nad lub pod środkiem łuku wyznaczonego przez końce podstawy. Otrzymujemy w ten sposób $2m$ trójkątów między każdą parą sąsiednich okręgów. Razem trójkątów jest $2mn$. Rozwiązując dwa łatwe zadania z geometrii płaskiej, sprawdzamy, że każdy z tych trójkątów ma podstawę $a_{m,n}$ i wysokość $h_{m,n}$ dane wzorami

$$a_{m,n} = 2 \sin \frac{\pi}{m}, \quad h_{m,n} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}$$

¹Czytelnik, dbający o pełną formalną ścisłość, może opisać współrzędne tych punktów w $\mathbb{R}^3$. Rzeczą bardziej pouczającą jest jednak samodzielnie wykonanie kilku rysunków.

Dlatego pole $P_{m,n}$ chińskiej latarni $L_{m,n}$ wynosi

$$\begin{aligned} P_{m,n} &= 2mn \cdot \frac{a_{m,n} h_{m,n}}{2} = 2mn \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} \\ &= 2\pi \cdot \frac{\sin(\pi/m)}{\pi/m} \cdot \sqrt{1 + 4n^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}. \end{aligned}$$

Nietrudno zauważyć, że granica podwójna $\lim_{m,n \rightarrow \infty} P_{m,n}$ *nie istnieje*, z uwagi na zachowanie czynnika pod pierwiastkiem kwadratowym. Dla $m = n \rightarrow \infty$ otrzymujemy $P_{n,n} \rightarrow 2\pi$. Jednak np. dla $n = 2m^2$ jest

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{m,2m^2} = 2\pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/m)}{\pi/m} \cdot \sqrt{1 + 16m^4 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} = 2\pi \sqrt{1 + \pi^4}.$$

Łatwo wskazać takie ciągi $n_j, m_j \rightarrow \infty$, dla których $P_{m_j, n_j} \rightarrow 2\pi \cdot A$, gdzie $A \geq 1$ jest z góry zadaną liczbą (zainteresowany Czytelnik zrobi to bez trudu sam). Wreszcie, $P_{m, m^3} \rightarrow \infty$ dla $m \rightarrow \infty$.

Widać więc, że wynik przybliżania powierzchni bocznej walca za pomocą trójkątów o bokach o coraz mniejszej długości zależy nie tylko od liczby tych trójkątów, ale i od proporcji ich boków. Różne wyniki uzyskuje się dlatego, że dla $n \gg m$ kąt między płaszczyzną trójkąta i powierzchnią walca jest *oddzielony od zera*. $\square$

6.1 Definicja miary powierzchniowej

6.1.1 Wyznacznik Grama. Intuicje geometryczne.

Przypomnijmy, że wyznacznikiem Grama wektorów $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę

$$G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = \det \left(\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \right)_{i,j=1,\dots,m}. \quad (6.1)$$

Na wykładach Geometrii z Algebrą Liniową dowodzi się następujących własności wyznacznika Grama:

1. $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = 0$, gdy wektory $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$ są liniowo zależne.
2. Zachodzi wzór

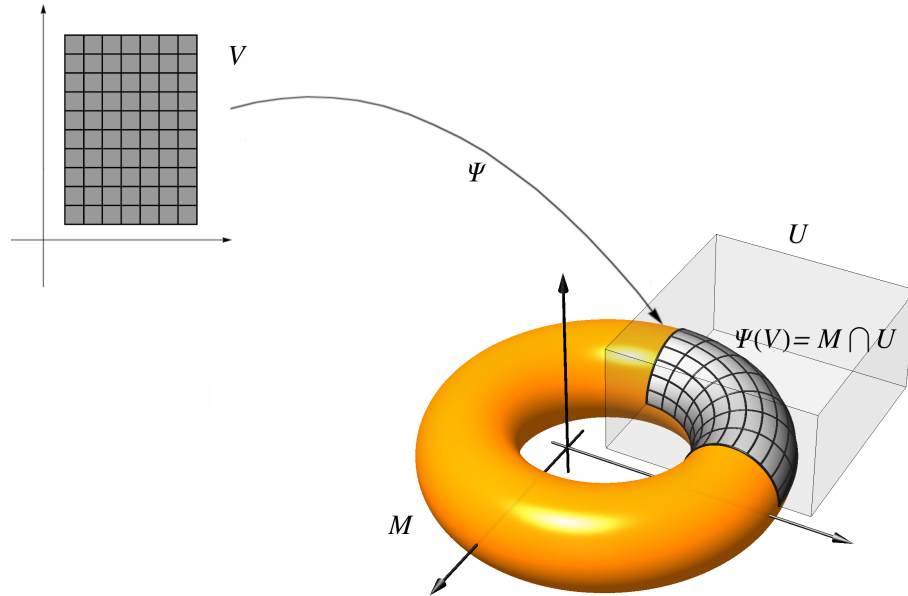
$$G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = h^2 \cdot G(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m),$$

gdzie $h = \text{dist}(\mathbf{w}_1, \text{span}(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m))$ jest długością rzutu prostopadłego wektora $\mathbf{w}_1$ na podprzestrzeń $\mathbb{R}^n$ prostopadłą do $\text{span}(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$. W szczególności,

$$G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = \|\mathbf{w}_1\|^2 \cdot G(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m),$$

gdzy wektor $\mathbf{w}_1 \perp \mathbf{w}_j$ dla $j = 2, \dots, m$. (6.2)

Ponadto, wprost z definicji wyznacznika Grama i definicji iloczynu dwóch macierzy wynika, że dla $m = n$ liczba $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ jest równa kwadratowi wyznacznika macierzy o kolumnach $\mathbf{w}_i$, a więc kwadratowi n -wymiarowej miary Lebesgue'a równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{w}_i$.



Parametryzacja fragmentu rozmaitości dwuwymiarowej; obrazy małych kwadratów w dziedzinie V parametryzacji Ψ są krzywoliniowymi czworokątami na powierzchni M .

Posługując się wzorem (6.2) i definicją, nietrudno zauważyć, że dla $m = 2$ i $n = 3$ liczba $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ jest kwadratem pola równoległoboku rozpiętego na wektorach $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^3$. Przyjmuje się, że m -wymiarowa objętość równoległościanu, rozpiętego na wektorach $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$, jest równa *pierwiastkowi z wyznacznika Grama tych wektorów*. Z powyższych uwag wynika, że jest to interpretacja naturalna i sensowna.

Intuicje geometryczne

Opiszemy teraz intuicję, kryjącą się za definicją m -wymiarowej miary powierzchniowej na rozmaitości $M \subset \mathbb{R}^n$. Przypuśćmy, że dla pewnego zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^n$ część wspólna $U \cap M$ jest równa $\Psi(V)$, gdzie V jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$. Zakładamy, że przekształcenie

$$\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \Psi(V) = M \cap U \subset \mathbb{R}^n$$

jest homeomorfizmem na obraz, klasy C^1 , a jego różniczka $D\Psi(\mathbf{x})$ ma maksymalny rząd m (tzn. jest monomorfizmem liniowym) w każdym punkcie $\mathbf{x} \in V$.

Dla uproszczenia pomyślmy najpierw o przypadku $m = 2$, $n = 3$; przekształcenie Ψ określa wtedy, jak należy umieścić (płaski, dwuwymiarowy) zbiór V jako (pozbawioną zagięć i sklejeń) powyginaną powierzchnię w trójwymiarowej przestrzeni.² Obrazami kwadracików w dziedzinie V są krzywoliniowe czworokąty na powierzchni $M \cap U$. Jeśli $K \subset V$ jest małym kwadratem o wierzchołku $\mathbf{x} \in V$ i bokach równoległych do osi układu współ-

²Z taką sytuacją spotkał się już Czytelnik np. w Przykładzie 1.62, gdzie opisywaliśmy powierzchnię torusa obrotowego jako obraz pewnego przekształcenia $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Obcinając to przekształcenie do kwadratu $(0, 2\pi)^2$, otrzymamy parametryzację torusa z usuniętymi dwoma okręgami.

rzędnych, to obraz $\Psi(K)$ jest – niemalże, z bardzo dobrym przybliżeniem! – równoległobokiem zawartym w (afinicznej) płaszczyźnie stycznej do M , o bokach równoległych do wektorów $D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$ i $D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$, gdzie $\mathbf{e}_i$ oznaczają wektory standardowej bazy w $\mathbb{R}^2$. Zatem

$$\text{Pole}(\Psi(K)) \approx \text{pole równoległoboku} = \sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} \cdot \lambda_2(K).$$

Proszę zauważyć, że przekształcenie liniowe $D\Psi(\mathbf{x}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ przeprowadza kwadrat jednostkowy $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ na równoległobok rozpięty na wektorach $\mathbf{w}_1 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{w}_2 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$; kwadrat pola tego równoległoboku jest równy wyznacznikowi Grama $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))$, gdyż elementy macierzy $D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x})$ to właśnie iloczyny skalarne wektorów $\mathbf{w}_1 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{w}_2 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$.

Dlatego jest rzeczą naturalną przyjąć, dla $m = 2$ i $n = 3$ oraz zbiorów mierzalnych $A \subset V \subset \mathbb{R}^2$, definicję

$$\sigma_2(\Psi(A)) = \int_A \sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} d\lambda_2(\mathbf{x}); \quad (6.3)$$

symbol σ_2 oznacza tu *dwuwymiarową miarę powierzchniową* na rozmaitości $M \subset \mathbb{R}^3$, parametryzowanej przez odwzorowanie Ψ .

W ogólnym przypadku, dla $1 \leq m \leq n$, postępuje się podobnie, przyjmując, że dla $M \cap U = \Psi(V)$, gdzie parametryzacja Ψ jest różnowartościowa i jej różniczka ma rząd m , miara powierzchniowa σ_m podzbiorów $M \cap U$ określona jest wzorem

$$\sigma_m(\Psi(A)) = \int_A \sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} d\lambda_m(\mathbf{x}) \quad \text{dla } A \subset V \subset \mathbb{R}^m, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m). \quad (6.4)$$

Sens powyższego wzoru jest następujący. W małej skali przekształcenie klasy C^1 jest z dobrym przybliżeniem liniowe. Dlatego miarę gładkiej, m -wymiarowej powierzchni przybliżamy za pomocą sumy m -wymiarowych objętości równoległoscianów, będących obrazami (pod działaniem różniczki parametryzacji) małych, m -wymiarowych kostek, zawartych w dziedzinie przekształcenia.

Cały powyższy opis należy jednak traktować wyłącznie jako pewną intuicję. Nie znamy na razie odpowiedzi na następujące pytania:

1. Czy każdy zbiór $M \subset \mathbb{R}^n$, dopuszczający (lokalnie) podany wyżej *opis parametryczny*, rzeczywiście jest rozmaitością?
2. Czy definicja miary σ_m na $M \cap U$ nie zależy od *wyboru* parametryzacji Ψ ? Jak postąpić, gdy rozmaitość M jest sumą wielu części $M \cap U_i$, opisanych za pomocą różnych parametryzacji $\Psi_i: V_i \rightarrow M \cap U_i \subset \mathbb{R}^n$?

W kolejnym podrozdziałach (patrz 6.1.2 i 6.1.3 niżej) przekonamy się, że wzory (6.3)–(6.4) istotnie nie zależą od wyboru parametryzacji $\Psi: V \rightarrow M \cap U$. Zanim jednak przejdziemy do ogólnych, abstrakcyjnych rozważań, poczynimy dwie uwagi, które ułatwiają obliczanie pola gładkich powierzchni w $\mathbb{R}^3$.

Uwaga 6.2. Niech $m = 2$, $n = 3$ i $\Psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$, gdzie $f: \mathbb{R}^2 \supset V \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 . Rozmaitość (powierzchnia) $M = \Psi(V)$ jest wtedy wykresem funkcji f . Mamy

$$D\Psi^T D\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_{x_1} \\ 0 & 1 & f_{x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_{x_1} & f_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f_{x_1}^2 & f_{x_1} f_{x_2} \\ f_{x_1} f_{x_2} & 1 + f_{x_2}^2 \end{pmatrix}$$

i dlatego

$$\sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} = \sqrt{1 + f_{x_1}^2(\mathbf{x}) + f_{x_2}^2(\mathbf{x})}. \quad (6.5)$$

Zadanie 6.3 (tożsamość Lagrange’a). Niech M będzie macierzą o trzech wierszach i dwóch kolumnach. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$\det(M^T M) = A^2 + B^2 + C^2, \quad (6.6)$$

gdzie A , B i C oznaczają minory 2×2 macierzy M . Ogólniej, dla dowolnych wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi równość

$$\|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (u_i v_j - v_i u_j)^2.$$

Przykład 6.4 (pole sfery). Niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}$ będzie połówką sfery jednostkowej. Wtedy M jest wykresem funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 < 1$$

Łatwo obliczamy

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Dlatego, posługując się wzorem (6.3) i równością (6.5), a następnie przechodząc do całkowania we współrzędnych biegunowych (jak wtedy, gdy korzystając z twierdzenia Fubini’ego i twierdzenia o zamianie zmiennych obliczaliśmy całkę $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_2(M) &= \int_{\{(x,y): x^2+y^2 < 1\}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} d\lambda_2(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} \right) d\theta = 2\pi \cdot \left(-\sqrt{1 - r^2} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} = 2\pi. \end{aligned}$$

Wynik, jak widać, jest zgodny z oczekiwaniami. $\square$

Przejdziemy teraz do uściślenia wszystkiego, co zostało powiedziane wyżej.

6.1.2 Parametryczny opis rozmaitości zanurzonych

W podrozdziale 3.5 definiowaliśmy m -wymiarowe rozmaitości zanurzone w $\mathbb{R}^k$ jako zbiory, które lokalnie, w otoczeniu każdego ze swoich punktów, są wykresami $k - m$ pewnego układu funkcji m zmiennych. Do definiowania miary powierzchniowej i jej obliczania przyda się nam równoważny, tzw. *parametryczny* opis takich rozmaitości.

Definicja 6.5. Niech $1 \leq m < n$ i niech $V \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym. Będziemy mówić, że przekształcenie

$$\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

jest *parametryzacją klasy* C^k wtedy i tylko wtedy, gdy $\Psi \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$ jest homeomorfizmem na obraz, a ponadto przekształcenie $D\Psi(\mathbf{x})$ jest włożeniem liniowym (monomorfizmem) dla każdego $\mathbf{x} \in V$.

Twierdzenie 6.6. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ i niech $\mathbf{p} \in M$ będzie ustalonym punktem. Następujące warunki są równoważne:

- (i) Istnieje kula $B(\mathbf{p}, r)$ w $\mathbb{R}^n$ taka, że $M \cap B(\mathbf{p}, r)$ jest wykresem pewnej funkcji m zmiennych klasy C^k , tzn. istnieje m -wymiarowa podprzestrzeń liniowa

$$P = \text{span}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_m}) \subset \mathbb{R}^m,$$

zbiór Ω otwarty w P i funkcja $\varphi \in C^k(P, P^\perp)$ takie, że

$$M \cap B(\mathbf{p}, r) = \text{wykres } \varphi \cap B(\mathbf{p}, r),$$

gdzie

$$\text{wykres } \varphi = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n = P \oplus P^\perp : \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})\}.$$

- (ii) Punkt $\mathbf{p}$ ma takie otoczenie otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$, że $M \cap U = \Psi(V)$ dla pewnej parametryzacji $\Psi \in C^k$, $\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Pierwszy warunek powyższego twierdzenia pojawił się, dla $k = 1$, w definicji rozmaitości zanurzonej klasy C^1 (patrz podrozdział 3.5).

Dowód. Z pierwszego warunku wynika oczywiście drugi. Jeśli $M \cap B(\mathbf{p}, r)$ jest wykresem funkcji $\varphi: \mathbb{R}^m \cong P \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \cong P^\perp$, to wówczas przekształcenie

$$\Psi: \mathbb{R}^m \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in P \oplus P^\perp \cong \mathbb{R}^n$$

jest parametryzacją, tej samej klasy gładkości, co φ . Nietrudno sprawdzić, że Ψ jest homeomorfizmem na obraz. Wreszcie, macierz różniczki Ψ , która ma n wierszy i m kolumn, zawiera – w górnych wierszach – klatkę, która jest macierzą identycznościową $m \times m$. Dlatego rząd $D\Psi(\mathbf{x})$ jest maksymalny dla każdego $\mathbf{x}$.

Wykażemy, że drugi warunek pociąga za sobą pierwszy. Niech $M \cap U = \Psi(V)$ dla pewnej parametryzacji Ψ klasy C^k i niech $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$. Z definicji, pewien minor $m \times m$ macierzy $D\Psi(\mathbf{a})$ nie znika; to oznacza, że dla pewnych $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ przekształcenie

$$f = (\Psi_{i_1}, \Psi_{i_2}, \dots, \Psi_{i_m}): V \rightarrow \mathbb{R}^m$$

spełnia w punkcie $\mathbf{a} \in V$ założenia Twierdzenia 3.9 o funkcji odwrotnej. Zatem, f jest dyfeomorfizmem klasy C^k (patrz Uwaga 3.15) pewnego otoczenia V_1 punktu $\mathbf{a}$ na otoczenie otwarte V_2 punktu $f(\mathbf{a})$.

Oznaczmy teraz $P = \text{span}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_m})$ (dla numerów i_k , użytych w definicji f); płaszczyzna P zawiera obraz V_2 dyfeomorfizmu f . Płaszczyzna $P^\perp$ jest wówczas rozpięta na pozostałych $n - m$ wektorach standardowej bazy; oznaczmy je $\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_{n-m}}$. Niech π_1 oznacza rzut prostopadły na P , zaś $\pi_2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} - \pi_1$ – rzut prostopadły na $P^\perp$.

Nietrudno teraz wskazać funkcję $\varphi: P \rightarrow P^\perp$, której wykres pokrywa się ze zbiorem M w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$. Połóżmy mianowicie

$$\varphi = \pi_2 \circ \Psi \circ f^{-1}: \mathbb{R}^m \cong P \supset V_2 \rightarrow P^\perp \cong \mathbb{R}^{n-m}.$$

Zauważmy, że dla każdego $\mathbf{y} = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}) \in V_2 \subset P$ jest $(\Psi \circ f^{-1})_{i_s}(\mathbf{y}) = y_{i_s}$; to wynika wprost z określenia f . Innymi słowy, $\pi_1 \circ \Psi \circ f^{-1}$ jest identycznością na V_2 . Dlatego wykres φ to zbiór punktów $(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$, gdzie

$$\begin{aligned} P \supset V_2 \ni \mathbf{x} &= \pi_1 \circ \Psi \circ f^{-1}(\mathbf{x}), \\ P^\perp \ni \varphi(\mathbf{x}) &= \pi_2 \circ \Psi \circ f^{-1}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Innymi słowy,

$$(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \Psi \circ f^{-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V_2, \quad (6.7)$$

więc (w małym otoczeniu punktu $\mathbf{p}$) wykres funkcji φ jest tym samym, co obraz przekształcenia Ψ . $\square$

Definicja 6.7. Będziemy mówić, że $M \subset \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością m -wymiarową klasy C^k , jeśli w każdym punkcie $\mathbf{p} \in M$ spełniony jest jeden z warunków równoważnych Twierdzenia 6.6. Jeśli $\Psi: V \rightarrow \Psi(V) = U \cap M$ jest parametryzacją części wspólnej zbioru otwartego U z rozmaitością M , to przekształcenie $\Psi^{-1}: M \cap U \rightarrow V$ nazywa się *mapą*. Zbiór map, których dziedziny pokrywają rozmaitość M , nazywa się *atlasem*.

Uwaga 6.8 (przestrzeń styczna). W Twierdzeniu 3.26 opisaliśmy przestrzeń styczną do rozmaitości M w punkcie $\mathbf{p}$. Przypomnijmy: jeśli w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$ rozmaitość M jest wykresem funkcji $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, to kładąc $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$ i przyjmując $\mathbf{a} = \Phi^{-1}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^m$, otrzymujemy

$$T_{\mathbf{p}}M = \text{Im } D\Phi(\mathbf{a}).$$

Porównując ten wynik ze wzorem (6.7), wnioskujemy łatwo, że jeśli $U \cap M = \Psi(V)$, gdzie Ψ jest jakąkolwiek parametryzacją klasy C^k i $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{p} \in M$ dla pewnego $\mathbf{a} \in V \subset \mathbb{R}^m$, to wówczas

$$T_{\mathbf{p}}M = \text{Im } D\Psi(\mathbf{a}),$$

gdyż różniczka $D(f^{-1})$ dyfeomorfizmu f^{-1} we wzorze (6.7) jest izomorfizmem liniowym.

6.1.3 Twierdzenie o rzędzie. Poprawność definicji miary σ_m .

Aby wykazać niezależność definicji miary powierzchniowej na rozmaitości M od wyboru parametryzacji, udowodnimy ważne twierdzenie, opisujące strukturę takich przekształceń klasy C^k , których różniczka ma stały rząd.

Twierdzenie 6.9 (o rzędzie). Załóżmy, że przekształcenie $\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^k , a jego różniczka $D\Psi(\mathbf{x})$ ma we wszystkich punktach $\mathbf{x}$ zbioru V rząd równy r , gdzie r jest ustaloną liczbą naturalną. Wówczas dla każdego punktu $\mathbf{a} \in V$ istnieją zbiory otwarte $U_1 \ni \mathbf{a}$ i $U_2 \ni \Psi(\mathbf{a})$ oraz dyfeomorfizmy klasy C^k ,

$$f_1: \mathbb{R}^m \supset U_1 \rightarrow f_1(U_1) \subset \mathbb{R}^m, \quad f_2: \mathbb{R}^n \supset U_2 \rightarrow f_2(U_2) \subset \mathbb{R}^n,$$

takie, że

$$f_2 \circ \Psi \circ f_1^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ zer}}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in f_1(U_1).$$

Dowód. Ustalmy $\mathbf{a} \in V$. Z założenia, pewien minor $r \times r$ macierzy $D\Psi(\mathbf{a})$ nie znika. Przenumerowując w razie potrzeby zmienne (w dziedzinie i w obrazie), możemy bez zmniejszenia ogólności przyjąć, że

$$\det\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)_{i,j=1,\dots,r} \neq 0.$$

Położmy

$$f_1(\mathbf{x}) = (\Psi_1(\mathbf{x}), \dots, \Psi_r(\mathbf{x}), x_{r+1}, \dots, x_m), \mathbf{x} \in V.$$

Nietrudno sprawdzić, że macierz Df_1 ma blokową postać

$$Df_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,r} & * \\ \mathbf{0} & \text{Id}_{(m-r) \times (m-r)} \end{pmatrix}.$$

Dlatego

$$\det Df_1(\mathbf{a}) = \det\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)_{i,j=1,\dots,r} \neq 0.$$

Wybermy otoczenie U_1 punktu $\mathbf{a}$ tak, aby f_1 było na U_1 dyfeomorfizmem klasy C^k na pewien m -wymiarowy przedział otwarty $f_1(U_1)$. Wprost z określenia f_1 wynika, że

$$\Psi \circ f_1^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_r, h_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, h_n(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in f_1(U_1),$$

gdzie h_s są pewnymi funkcjami klasy C^k . Mamy

$$D(\Psi \circ f_1^{-1}) = D\Psi \circ D(f_1^{-1}),$$

a ponieważ różniczka $D(f_1^{-1})$ dyfeomorfizmu f_1^{-1} jest izomorfizmem liniowym, więc rząd przekształcenia $D(\Psi \circ f_1^{-1})$ jest taki sam, jak rząd $D\Psi$, tzn. równy r . Stąd łatwo wynika, że

$$\frac{\partial h_s}{\partial x_t}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dla } s, t > r$$

– w przeciwnym razie rząd macierzy $D(\Psi \circ f_1^{-1})$ byłby większy od r . Zatem funkcje h_s na przedziale $f_1(U_1)$ zależą tylko od zmiennych $x_1, \dots, x_r$. Położmy teraz

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, x_{r+1} - h_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, x_n - h_n(x_1, \dots, x_r)).$$

Łatwo sprawdzić, że f_2 jest dyfeomorfizmem (dyfeomorfizm odwrotny uzyskujemy, zmieniając w powyższym wzorze minusy na plusy!) i że $f_2 \circ \Psi \circ f_1^{-1}$ przeprowadza punkt $\mathbf{x}$ w $(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$. $\square$

Odnotujemy ważny wniosek z twierdzenia o rzędzie.

Lemat 6.10 (o funkcjach przejścia). *Jeśli $M \subset \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością m -wymiarową, zbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, a przekształcenia*

$$\Psi_i: \mathbb{R}^m \supset V_i \rightarrow \Psi_i(V_i) = U \cap M \subset \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

są parametryzacjami klasy C^k , to złożenie $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1: V_1 \rightarrow V_2$ jest dyfeomorfizmem klasy C^k zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^m$.

Dowód. Ustalmy $\mathbf{a} \in V_1 \subset \mathbb{R}^m$. Z Twierdzenia 6.9 wynika, że dla pewnych dyfeomorfizmów f_1, f_2 równość

$$f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

zachodzi w otoczeniu punktu $f_1(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$. Obraz przekształcenia $f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1}$ można utożsamić z $\mathbb{R}^m$, a samo to przekształcenie — z identycznością na $\mathbb{R}^m$, która jest gładka i odwracalna. Zauważmy teraz, że

$$(f_1)^{-1} \circ (f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1})^{-1} \circ f_2 \circ \Psi_2 = \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$$

jest klasy C^k , bo lewa strona powyższej równości jest złożeniem przekształceń klasy C^k . Zamieniając Ψ_1 i Ψ_2 rolami w powyższym rozumowaniu, wnioskujemy, że również $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1$ jest klasy C^k . Ponieważ parametryzacje Ψ_i są homeomorfizmami, więc $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1$ (i przekształcenie doń odwrotne, $\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$) jest dyfeomorfizmem. $\square$

Stwierdzenie 6.11 (niezależność miary powierzchniowej od wyboru parametryzacji). Załóżmy, że $M \subset \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością m -wymiarową klasy C^1 , zbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, a przekształcenia

$$\Psi_i: \mathbb{R}^m \supset V_i \rightarrow \Psi_i(V_i) = U \cap M \subset \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

są parametryzacjami klasy C^1 . Niech $B = \Psi_1(A_1) = \Psi_2(A_2)$, gdzie $A_i \subset V_i$ dla $i = 1, 2$, będzie borelowskim podzbiorem M . Wówczas

$$\int_{A_1} \sqrt{\det(D\Psi_1(\mathbf{x})^T D\Psi_1(\mathbf{x}))} d\lambda_m(\mathbf{x}) = \int_{A_2} \sqrt{\det(D\Psi_2(\mathbf{x})^T D\Psi_2(\mathbf{x}))} d\lambda_m(\mathbf{x}).$$

Dowód. Wystarczy skorzystać z tego, że wyznacznik iloczynu dwóch macierzy kwadratowych jest iloczynem wyznaczników tych macierzy, a następnie zastosować twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie. Oznaczmy $\Phi = \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$; z ostatniego lematu wynika, że $\Phi: V_2 \rightarrow V_1$ jest dyfeomorfizmem klasy C^1 . Zatem $\Psi_2(\mathbf{x}) = \Psi_1(\Phi(\mathbf{x}))$; kładąc $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$, otrzymujemy ze wzoru na różniczkę złożenia

$$\begin{aligned} D\Psi_2(\mathbf{x})^T D\Psi_2(\mathbf{x}) &= \left(D\Psi_1(\mathbf{y}) D\Phi(\mathbf{x}) \right)^T D\Psi_1(\mathbf{y}) D\Phi(\mathbf{x}) \\ &= D\Phi(\mathbf{x})^T \cdot \left(D\Psi_1(\mathbf{y})^T D\Psi_1(\mathbf{y}) \right) \cdot D\Phi(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

stąd zaś i ze wzoru na wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych,

$$\sqrt{\det(D\Psi_2(\mathbf{x})^T D\Psi_2(\mathbf{x}))} = |\det D\Phi(\mathbf{x})| \cdot \sqrt{\det(D\Psi_1(\mathbf{y})^T D\Psi_1(\mathbf{y}))}, \quad \mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}).$$

Oznaczając $f_i = \sqrt{\det(D\Psi_i^T \cdot D\Psi_i)}$, zapisujemy powyższą zależność krótko:

$$f_2 = |\det D\Phi| \cdot (f_1 \circ \Phi) \quad \text{na zbiorze } V_2.$$

Teza wynika natychmiast z Twierdzenia 5.22 o zamianie zmiennych. $\square$

Definicja miary σ_m

Nietrudno teraz podać formalną definicję miary powierzchniowej σ_m na rozmaitości m -wymiarowej $M \subset \mathbb{R}^n$. Ponieważ topologia przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ma przeliczalną bazę, więc na M istnieje atlas złożony z co najwyżej przeliczalnie wielu map. Innymi słowy, istnieje co najwyżej przeliczalnie wiele parametryzacji

$$\Psi_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \Psi_i(V_i) = U_i \cap M \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{gdzie } M \subset \bigcup U_i,$$

których obrazy pokrywają całą rozmaitość M . Każdy zbiór borelowski $B \subset M$ można przedstawić jako sumę przeliczalnie wielu zbiorów borelowskich parami rozłącznych B_i , zawartych w dziedzinach poszczególnych map, kładąc

$$B_1 = B \cap U_1, \quad B_2 = (B \cap U_2) \setminus U_1, \quad B_3 = (B \cap U_3) \setminus (U_1 \cup U_2), \quad \dots$$

Niech $V_i \supset A_i = \Psi_i^{-1}(B_i)$; przyjmujemy

$$\sigma_m(B_i) = \int_{A_i} \sqrt{\det(D\Psi_i^T D\Psi_i)} \, d\lambda_m, \quad (6.8)$$

$$\sigma_m(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_m(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \sqrt{\det(D\Psi_i^T D\Psi_i)} \, d\lambda_m. \quad (6.9)$$

Liczba $\sigma_m(B)$ nie zależy ani od wyboru poszczególnych parametryzacji Ψ_i , ani od wyboru zbiorów otwartych U_i , pokrywających rozmaitość M . To pierwsze wynika ze Stwierdzenia 6.11; druga własność bierze się stąd, że mając dwa otwarte pokrycia przeliczalne M , zbiorami U_i oraz U'_j , można rozważyć trzecie, drobniejsze od nich obu, pokrycie zbiorami $U_i \cap U'_j$ (a na każdym $U_i \cap M$ funkcja σ_m jest miarą).

Uwaga 6.12. Powyższą miarę σ_m , określoną na borelowskich podzbiorach M , można uzupełnić (tak, aby każdy podzbiór zbioru miary σ_m zero był mierzalny!), korzystając z twierdzenia Carathéodory'ego.

6.2 Wzór Cauchy'ego–Bineta. Przykłady.

Twierdzenie Cauchy'ego–Bineta jest uogólnieniem tożsamości Lagrange'a. Można dzięki niemu obliczać wyznacznik Grama układu wektorów, nie obliczając iloczynów skalarnych tych wektorów.

Niech $S = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, gdzie $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, będzie dowolnym m -elementowym podzbiorem $\{1, 2, \dots, n\}$. Jeśli A jest macierzą o m wierszach i n kolumnach, to przez $A(S)$ oznaczmy macierz kwadratową $m \times m$, która powstaje z A przez wybranie kolumn o numerach $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ (należących do zbioru S). Podobnie, jeśli B jest macierzą o n wierszach i m kolumnach, to przez $B(S)$ oznaczmy macierz kwadratową $m \times m$, która powstaje z B przez wybranie wierszy o numerach $i_1 < i_2 < \dots < i_m$.

Twierdzenie 6.13 (wzór Cauchy'ego–Bineta). *Jeśli A jest macierzą o m wierszach i n kolumnach, zaś B — macierzą o n wierszach i m kolumnach, gdzie $1 \leq m \leq n$, to*

$$\det AB = \sum_{S=\{i_1, i_2, \dots, i_m\}} \det A(S) \cdot \det B(S). \quad (6.10)$$

Dowód. Niech $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, gdzie pierwszy indeks oznacza numer wiersza, a drugi – kolumny. Wówczas

$$AB = \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right).$$

Innymi słowy, k -ta kolumna macierzy AB jest kombinacją liniową kolumn macierzy A , ze współczynnikami b_{kj} :

$$(AB)_{\text{kol. } k} = \sum_j b_{jk} (A)_{\text{kol. } j}$$

Wyznacznik macierzy jest wieloliniową funkcją jej kolumn; dlatego, z powyższej równości otrzymujemy

$$\det AB = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m} b_{j_1, 1} b_{j_2, 2} \dots b_{j_m, m} \det ((A)_{\text{kol. } j_1}, (A)_{\text{kol. } j_2}, \dots, (A)_{\text{kol. } j_m})$$

Jeśli któreś dwa indeksy w ostatniej sumie są równe, to wyznacznik macierzy, która ma dwie identyczne kolumny, znika. Zatem,

$$\det AB = \sum_{S=\{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}} \beta(B, S) \det A(S), \quad (6.11)$$

gdzie współczynniki $\beta(B, S)$ zależą od macierzy B i podzbioru $S = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$. Aby wyznaczyć $\beta(B, S)$, wypiszemy powyższą równość dla konkretnych A . Ustalmy $S = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$ i niech A będzie macierzą, której j_s -ta kolumna jest równa $\mathbf{e}_s$ dla $s = 1, \dots, m$, a pozostałe kolumny są zerowe. Wówczas $\det A(S) = \det \text{Id} = 1$ i $\det A(S') = 0$ dla $S' \neq S$. Ponadto, $AB = B(S)$. Podstawiając te zależności do wzoru (6.11), otrzymujemy $\det B(S) = \beta(B, S)$ dla każdego $S = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$. $\square$

Przykład 6.14 (pole ‘płaskiego’ torusa w $\mathbb{R}^4$). W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ rozważmy torus

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\}.$$

Czytelnik zechce sam sprawdzić, że $\mathbb{T}^2$ jest mnogością dwuwymiarową. Niech

$$\Psi : (0, 2\pi)^2 \ni (t, s) \longmapsto (\cos t, \sin t, \cos s, \sin s) \in \mathbb{T}^2;$$

obrazem parametryzacji Ψ jest torus $\mathbb{T}^2$ bez dwóch okręgów, tzn. zbiór pełnej miary powierzchniowej w $\mathbb{T}^2$. Dlatego

$$\sigma_2(\mathbb{T}^2) = \int_{(0, 2\pi)^2} \sqrt{\det ((D\Psi)^T \cdot D\Psi)} \, d\lambda_2.$$

Łatwo sprawdzamy, że

$$(D\Psi)^T = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin s & \cos s \end{pmatrix}.$$

Ze wzoru Cauchy’ego–Bineta otrzymujemy

$$\begin{aligned} \det ((D\Psi)^T \cdot D\Psi) &= \sin^2 t \sin^2 s + \sin^2 t \cos^2 s + \cos^2 t \sin^2 s + \cos^2 t \cos^2 s \\ &= \sin^2 t + \cos^2 t = 1, \end{aligned}$$

więc

$$\sigma_2(\mathbb{T}^2) = \int_{(0,2\pi)^2} \sqrt{\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi)} \, d\lambda_2 = \int_{(0,2\pi)^2} 1 \, d\lambda_2 = 4\pi^2.$$

Równość $\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi) = 1$ ma następujący sens geometryczny: parametryzacja Ψ zachowuje miarę podzbiorów kwadratu $(0, 2\pi)^2$.

Przykład 6.15. Wykażemy, że miara powierzchniowa $s_{n-1} := \sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, 1))$ sfery jednostkowej $\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$ spełnia równość

$$s_{n-1} = n\omega_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma((n+2)/2)}, \quad (6.12)$$

gdzie $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma((n+2)/2)$ jest miarą Lebesgue’a kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$ (patrz Twierdzenie 5.29).

Niech, dla $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)$,

$$\varphi(\mathbf{x}') = \sqrt{1 - \|\mathbf{x}'\|^2} = \sqrt{1 - \sum_{1 \leq i \leq n-1} x_i^2}.$$

Sfera jednostkowa $\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$ z usuniętą płaszczyzną równika $\{x_n = 0\}$ jest sumą zbioru $\mathbb{S}_+^{n-1} = \{(\mathbf{x}', x_n) \in \mathbb{R}^n: \mathbf{x}' \in B^{n-1}(\mathbf{0}, 1), x_n = \varphi(\mathbf{x}')\}$ i jego lustrzanego odbicia względem hiperpłaszczyzny $\{x_n = 0\}$. Dlatego

$$\sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = 2\sigma_{n-1}(\mathbb{S}_+^{n-1}) = 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \sqrt{\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi)} \, d\lambda_{n-1},$$

gdzie $\Psi(\mathbf{x}') = (\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))$. Macierz $D\Psi$ składa się z klatki identityczności $(n-1) \times (n-1)$ i n -tego wiersza φ_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, n-1$. Wobec wzoru Cauchy’ego–Bineta, wyznacznik macierzy $(D\Psi)^T D\Psi$ jest równy sumie kwadratów minorów $(n-1) \times (n-1)$; jeden z tych minorów jest równy 1, a pozostałe wynoszą $\pm\varphi_{x_i}$. Zatem

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \sqrt{\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi)} \, d\lambda_{n-1} \\ &= 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \sqrt{1 + \sum \varphi_{x_i}^2} \, d\lambda_{n-1} = 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \sum x_i^2}} \, d\lambda_{n-1} =: 2I_{n-1}. \end{aligned}$$

Całkę I_n obliczymy rekurencyjnie, korzystając z funkcji B i Γ Eulera.³ Stosując twierdzenie Fubiniego, a następnie liniową zamianę zmiennych

$$\mathbf{x}' = \sqrt{1 - x_n^2} \cdot \mathbf{y}', \quad \mathbf{y}' \in B^{n-1}(\mathbf{0}, 1),$$

³Podobną metodę wykorzystywaliśmy już wcześniej, całkując wielomiany Tonellego w dowodzie Twierdzenia 5.58, oraz obliczając miarę kuli jednostkowej.

otrzymujemy⁴

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_{B^n(\mathbf{0},1)} (1 - \|\mathbf{x}\|^2)^{-1/2} d\lambda_n(\mathbf{x}) \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, \sqrt{1-x_n^2})} (1 - x_n^2 - \|\mathbf{x}'\|^2)^{-1/2} d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \right) dx_n \\
 &= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{-1/2} \left(\int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, \sqrt{1-x_n^2})} \left(1 - \left\| \frac{\mathbf{x}'}{\sqrt{1-x_n^2}} \right\|^2 \right)^{-1/2} d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \right) dx_n \\
 &= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-2}{2}} \left(\int_{B^{n-1}(\mathbf{0},1)} (1 - \|\mathbf{y}'\|^2)^{-1/2} d\lambda_{n-1}(\mathbf{y}') \right) dx_n \\
 &= I_{n-1} \cdot 2 \int_0^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-2}{2}} dx_n.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Podstawiając $x_n^2 = t$, sprawdzamy, że

$$2 \int_0^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-2}{2}} dx_n = \int_0^1 (1 - t)^{\frac{n-2}{2}} t^{-1/2} dt = B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma((n+1)/2)}.$$

Ostatnia równość zachodzi na mocy znanego związku między funkcjami Γ i B . Równość (6.13) można teraz przepisać jako

$$I_n = \frac{\Gamma(n/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma((n+1)/2)} \cdot I_{n-1};$$

stąd, przez łatwą indukcję, otrzymujemy

$$I_n = \frac{\Gamma(1/2)^{n-1}}{\Gamma((n+1)/2)} I_1 = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)} I_1, \quad s_{n-1} = 2I_{n-1} = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma(n/2)} s_1,$$

a ponieważ $s_1 = \sigma_1(\mathbb{S}^1(\mathbf{0}, 1)) = 2\pi$ jest po prostu długością okręgu jednostkowego, więc ostatecznie

$$s_{n-1} = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot 2\pi = \frac{n\pi^{n/2}}{(n/2) \cdot \Gamma(n/2)} = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma((n+2)/2)} = n\omega_n.$$

(Skorzystaliśmy ze związku $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ i równości $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma((n+2)/2)$, wykazanej w Twierdzeniu 5.29). Wzór (6.12) został udowodniony. $\square$

Uwaga 6.16 (miara wykresu). Dokonując obliczeń w ostatnim przykładzie, sprawdziliśmy przy okazji następujący ogólniejszy fakt: jeśli $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^m$ jest zbiorem otwartym, a

$$W = \{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{x} \in V\}$$

jest wykresem φ , to wówczas

$$\sigma_m(W) = \int_V \sqrt{1 + \|\text{grad } \varphi\|^2} d\lambda_m.$$

Istotnie, $\Phi: V \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in W \subset \mathbb{R}^{m+1}$ jest naturalną parametryzacją wykresu, a ze wzoru Cauchy'ego–Bineta otrzymujemy

$$\det(D\Phi^T \cdot D\Phi) = 1 + \sum (\varphi_{x_i})^2 = 1 + \|\text{grad } \varphi\|^2.$$

⁴Proszę porównać poniższy rachunek z (5.50): to tak, jakby w tamtym wzorze użyć $N = -1/2$.

Uwaga 6.17. Nietrudno stwierdzić, posługując się liniową zamianą zmiennych, że

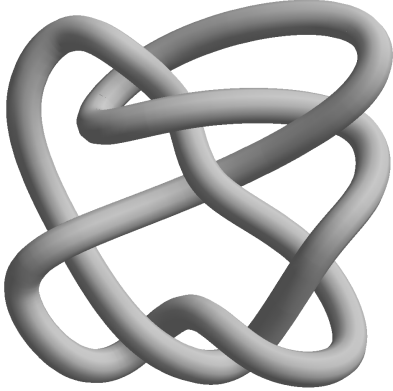
$$s(r) := \sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, r)) = n\omega_n r^{n-1}.$$

Jak wiemy, miara Lebesgue'a n -wymiarowej kuli o promieniu r wynosi $m(r) = \omega_n r^n$. Zachodzi więc równość

$$s(r) = m'(r), \quad r > 0.$$

Okazuje się, że nie jest to związek przypadkowy. Wyjaśnimy to nieco dokładniej w następnym podrozdziale.

6.3 Otoczenia tubularne i twierdzenie o materacu



W całym podrozdziale symbol X_ε oznacza zbiór $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\mathbf{y}, X) < \varepsilon\}$ wszystkich punktów przestrzeni, odległych od ustalonego zbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ mniej niż o $\varepsilon > 0$. (Jeśli np. X jest gładką krzywą w $\mathbb{R}^3$, to X_ε jest rurką o grubości 2ε wokół tej krzywej, patrz rysunek).

Twierdzenie 6.18 (o otoczeniu tubularnym). Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie m -wymiarową zanurzoną rozmaitością zwartą klasy C^2 . Wówczas, dla wszystkich dostatecznie małych $\varepsilon > 0$, zbiór M_ε spełnia zależność

$$M_\varepsilon = \bigcup_{\mathbf{p} \in M} D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon), \quad (6.14)$$

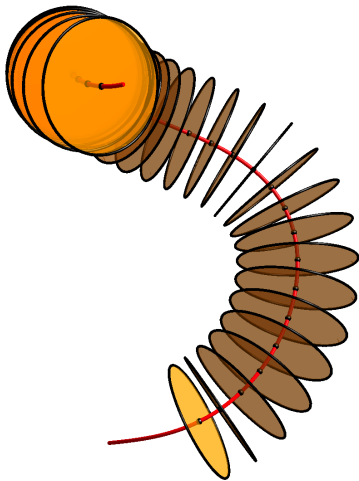
przy czym dyski

$$D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon) = \{\mathbf{p} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{v}\| < \varepsilon, \mathbf{v} \perp T_{\mathbf{p}}M\} \quad (6.15)$$

położone w przestrzeniach $(T_{\mathbf{p}}M)^\perp$, są parami rozłączne dla różnych punktów $\mathbf{p} \in M$.
Przekształcenie

$$P: M_\varepsilon \ni \mathbf{y} \mapsto P(\mathbf{y}) \in M,$$

gdzie $\|P(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\| = \min_{\mathbf{z} \in M} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$, jest dobrze określonym przekształceniem klasy C^1 .



Fragment gładkiej krzywej zamkniętej w $\mathbb{R}^3$ i jej otoczenia tubularnego.

Przed przystąpieniem do dowodu spróbujemy wyjaśnić poglądowo treść tego ważnego twierdzenia. Przekształcenie P nazywane jest *rutowaniem na najbliższy punkt*. Punktowni $\mathbf{y}$, należącemu do wąskiej tuby M_ε wokół rozmaitości M , przypisujemy ten punkt $\mathbf{z} = P(\mathbf{y}) \in M$, który jest najbliższy $\mathbf{y}$. Twierdzenie mówi, że dla zwartych rozmaitości klasy C^2 , przy dostatecznie małym $\varepsilon > 0$, istnieje dokładnie jeden taki punkt $\mathbf{z}$.

Czytelnik zechce pomyśleć najpierw o przypadkach, które względnie łatwo można sobie wyobrazić: $m = 1$ i $n = 2$, $m = 1$ i $n = 3$, wreszcie $m = 2$ i $n = 3$. W pierwszym z nich M jest gładką krzywą zamkniętą w $\mathbb{R}^2$. Dyski $D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$ są po prostu odcinkami otwartymi długości 2ε , prostopadłymi do krzywej i mającymi środki w jej punktach. *Twierdzenie o otoczeniu tubularnym orzeka, że dla małych $\varepsilon > 0$ takie odcinki są rozłączne, a ich suma jest zbiorem wszystkich punktów, odległych od krzywej mniej niż o ε .* Przekształcenie P nietrudno opisać geometrycznie: każdy punkt zbioru M_ε należy do dokładnie jednego odcinka $D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$ i jeśli $\mathbf{y} \in D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$, to $P(\mathbf{y}) = \mathbf{p}$.

Dla $m = 1, n = 3$ mamy do czynienia z krzywą zamkniętą w $\mathbb{R}^3$; jej otoczenie tubularne to rurka, zbudowana z małych, płaskich, parami rozłącznych dysków, prostopadłych do tej krzywej i mających środki w jej punktach. Wreszcie, dla $m = 2$ i $n = 3$ rozmaitość $M \subset \mathbb{R}^3$ jest zwartą, gładką powierzchnią bez brzegu. Zbiór M_ε jest wtedy – jak gęsty ‘jeź’ – sumą parami rozłącznych odcinków o długościach równych 2ε ; każdy z tych odcinków ma środek na M i jest prostopadły do M (tj. do przestrzeni stycznej do M).

SZKIC DOWODU TWIERDZENIA 6.18. Dla każdego $\mathbf{y} \in M_\varepsilon$ istnieje (co najmniej jeden) punkt $P(\mathbf{y}) \in M$ taki, że $\|P(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\| = \text{dist}(\mathbf{y}, M) = \min_{\mathbf{z} \in M} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$. To wynika stąd, że przy ustalonym $\mathbf{y}$ funkcja $f(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$ osiąga swój kres dolny na zbiorze zwartym M . Zauważmy, że jeśli $\mathbf{p} = P(\mathbf{y})$, to wektor $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{p}$ jest prostopadły do $T_{\mathbf{p}}M$ (gdyby tak nie było, odległość $\mathbf{y}$ od M nie osiągałaby w punkcie $\mathbf{p}$ najmniejszej wartości – Czytelnik ze chce to sprawdzić, posługując się np. prostopadłością gradientu do rozmaitości w punkcie ekstremum warunkowego). Inaczej mówiąc,

$$M_\varepsilon = \bigcup_{\mathbf{p} \in M} D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon).$$

Sprawdźmy, że dla małych ε dyski $D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$ są parami rozłączne dla różnych $\mathbf{p}$. Przypuśćmy, że jest przeciwnie: dla $\varepsilon_j = 1/j$, gdzie $j = 1, 2, \dots$ istnieją punkty $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{p}'_j \in M$ takie, że iloczyn $D^\perp(\mathbf{p}_j, \frac{1}{j}) \cap D^\perp(\mathbf{p}'_j, \frac{1}{j})$ jest niepusty. Wtedy $\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}'_j\| < 2/j \rightarrow 0$; dzięki zwartości M , przechodząc do odpowiedniego podciągu, można założyć, że $\lim \mathbf{p}_j = \lim \mathbf{p}'_j = \mathbf{p} \in M$.

Niech $\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow U \cap M \subset \mathbb{R}^n$ będzie parametryzacją klasy C^2 pewnego otoczenia $\mathbf{p}$ w M . Bez zmniejszenia ogólności, obracając i przesuwając w razie potrzeby układ współrzędnych, założmy, że $\mathbf{p} = \mathbf{0} = \Psi(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$,

$$T_0M = \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m), \quad (T_0M)^\perp = \text{span}(\mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Niech $I: \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow (T_0M)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ oznacza włożenie liniowe, polegające na utożsamieniu $\mathbf{v} = (v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$ z wektorem $I(\mathbf{v}) = \sum_{i>m} v_i \mathbf{e}_i$ w $(n-m)$ -wymiarowej podprzestrzeni $(T_0M)^\perp$. Określmy odwzorowanie

$$F: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \supset V \times B^{n-m}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

następująco:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \Psi(\mathbf{x}) + \pi(\Psi(\mathbf{x}))(I(\mathbf{v})),$$

gdzie dla ustalonego $\mathbf{y} \in M$ przekształcenie $\pi(\mathbf{y})$ jest rzutem ortogonalnym $\mathbb{R}^n$ na przestrzeń $(T_{\mathbf{y}}M)^\perp$. Jeśli $\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{q} \in M$, to $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in D^\perp(\mathbf{q}, 1)$.

Można sprawdzić, że jeśli M jest klasy C^2 , to wyrazy macierzy rzutu $\pi(\Psi(\mathbf{x}))$ w standardowej bazie $\mathbb{R}^n$ są funkcjami klasy C^1 zmiennej $\mathbf{x}$.⁵ Dlatego $F \in C^1$. Obliczmy jacobian F w punkcie $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Ponieważ $I(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, a $\pi(\mathbf{y})$ jest liniowe przy ustalonym $\mathbf{y}$, więc

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial F}{\partial v_i}(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_i = \frac{\partial F}{\partial v_i}(\mathbf{0}, \mathbf{v}).$$

⁵To niezbyt trudne zadanie; do jego rozwiązania trzeba wykorzystać geometryczną charakteryzację rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń liniową.

Zatem macierz $DF(0, 0)$ ma kolumny $\frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(0) \in T_0 M$ (dla $j = 1, \dots, m$) oraz $e_j \in (T_0 M)^\perp$ dla $j = m+1, \dots, n$. Są to wektory liniowo niezależne w $\mathbb{R}^n$ i dlatego $\det DF(0, 0) \neq 0$. Wobec twierdzenia o funkcji odwrotnej, F jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia otwartego $W = V_1 \times B^{n-m}(0, r) \subset V \times B(0, 1)$ punktu $(0, 0)$ na obraz $F(W) \subset \mathbb{R}^n$.

Dla dostatecznie dużych j dyski $D_j = D^\perp(p_j, 1/j)$ i $D'_j = D^\perp(p'_j, 1/j)$ są zawarte w $F(W)$. Mamy $p_j = \Psi(x_j)$ i $p'_j = \Psi(x'_j)$ dla pewnych $x_j, x'_j \in V_1$. W punkcie wspólnym dysków D_j i D'_j spełniony jest warunek $F(x_j, v_j) = F(x'_j, v'_j)$, ale $x_j \neq x'_j$. To jest sprzeczność z różnowartościowością F na zbiorze W .

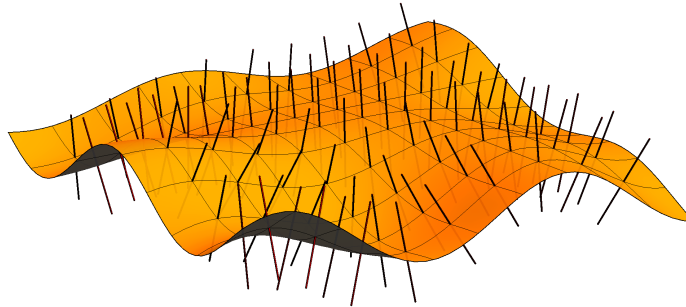
Zatem istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że wszystkie dyski $D^\perp(p, \varepsilon_0)$ są rozłączne. Pokrywając rozmaitość M skończoną liczbą otoczeń takich, jak $F(W)$ przed chwilą, wnioskujemy, że rzut P z M_ε na najbliższy punkt M jest dobrze określony. Jeśli w opisanych wyżej współrzędnych $y = F(x, v)$, to $P(y) = \Psi(x)$. Innymi słowy, oznaczając przez A rzut ortogonalny $A: (x, v) \mapsto x$ przestrzeni $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ na $\mathbb{R}^m$, widzimy, że $P = \Psi \circ A \circ F^{-1}$ jest klasy C^1 . $\square$

Uwaga 6.19. Jest rzeczą jasną, że teza ostatniego twierdzenia nie zachodzi dla wszystkich $\varepsilon > 0$. Jeśli np. $M \subset \mathbb{R}^3$ jest powierzchnią torusa, powstającego przez obrót okręgu o promieniu $r > 0$ wokół prostej, położonej w płaszczyźnie tego okręgu i oddalonej o R od jego środka, to dla $\varepsilon > r$ teza twierdzenia nie zachodzi. Istotne jest też założenie, że M jest klasy C^2 . Czytelnik zechce rozpatrzyć wykres $y = h(x) := |x|^{3/2}$ w otoczeniu zera w $\mathbb{R}^2$: punkt wykresu h najbliższy do $(0, \varepsilon)$ nie jest określony jednoznacznie dla żadnego $\varepsilon > 0$.

Między objętością otoczenia tubularnego rozmaitości a jej miarą powierzchniową zachodzi naturalny, zgodny z intuicją związek.

Twierdzenie 6.20 (twierdzenie o materacu). Załóżmy, że M jest m -wymiarową rozmaitością zwartą klasy C^2 , zanurzoną w $\mathbb{R}^n$. Niech $M_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(y, M) < \varepsilon\}$. Wówczas

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_n(M_\varepsilon)}{\omega_{n-m} \varepsilon^{n-m}} = \sigma_m(M).$$



Fragment rozmaitości $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Krótkie odcinki prostopadłe do M , które mają środki w M , są rozłączne.

Czytelnik zechce pomyśleć o przypadku $n = 3, m = 2$. Otoczenie tubularne $M_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ powierzchni M jest wtedy sumą rozłącznych odcinków długości 2ε , prostopadłych do M . Można myśleć o M_ε jako o ‘materacu’ grubości 2ε ; powierzchnia M biegnie przez środek materaca. Twierdzenie orzeka, że pole powierzchni M jest granicą ilorazu objętości materaca i grubości materaca,

$$\sigma_2(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_3(M_\varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

Ogólnie, dla $n = m + 1$ i rozmaitości $M = M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ klasy C^2 jest

$$\sigma_m(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_{m+1}(M_\varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

Przykład 6.21 (miara sfery $\mathbb{S}^{n-1}$ raz jeszcze). Niech $M = \mathbb{S}^{n-1}(0, r)$. Nietrudno zauważyć, że dla $\varepsilon < r$ zbiór M_ε jest równy $B^n(0, r + \varepsilon) \setminus \overline{B^n(0, r - \varepsilon)}$. Dlatego

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega_n(r + \varepsilon)^n - \omega_n(r - \varepsilon)^n}{2\varepsilon} \\ &= \frac{\omega_n}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{(r + \varepsilon)^n - r^n}{\varepsilon} + \frac{r^n - (r - \varepsilon)^n}{\varepsilon} \right) = \frac{\omega_n}{2} \cdot 2 \frac{d}{dt}(t^n) \Big|_{t=r} = \omega_n \cdot nr^{n-1}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy ponownie wynik, wspomniany już w Uwadze 6.17. $\square$

Dowód Twierdzenia 6.20. Dla uproszczenia podamy dowód tylko w przypadku $n = m + 1$. Wybierzmy zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ taki, że $M \cap U$ jest wykresem funkcji $\varphi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^m$ jest otwarty. Niech $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$ dla $\mathbf{x} \in V$ będzie parametryzacją $U \cap M$. Korzystając z twierdzenia o otoczeniu tubularnym, możemy zakładać, że

$$U = \{\mathbf{q} + \mathbf{v} \mid \mathbf{q} \in \Phi(V) \subset M, \quad \mathbf{v} \perp T_{\mathbf{p}}M, \quad \|\mathbf{v}\| < \varepsilon\}.$$

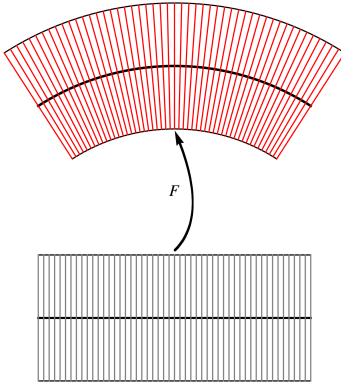
jest fragmentem otoczenia tubularnego rozmaitości M ; dokładniej $U = P^{-1}(\Phi(V))$, gdzie P oznacza rzutowanie otoczenia tubularnego rozmaitości na jej najbliższy punkt.

Jeśli $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$, to $T_{\mathbf{y}}M = \text{Im } D\Phi(\mathbf{x})$. Kolumny macierzy $D\Phi(\mathbf{x})$, tzn. wektory

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{miejsce } j}, 0, \dots, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right)^T \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

tworzą bazę $T_{\mathbf{y}}M$. Wektor $N(\mathbf{x}) = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(\mathbf{x}), 1 \right)^T$ jest prostopadły do nich wszystkich, a więc rozpiną (jednowymiarową) przestrzeń $(T_{\mathbf{y}}M)^\perp$. Niech

$$\nu(\mathbf{x}) = \frac{N(\mathbf{x})}{\|N(\mathbf{x})\|} = \frac{N(\mathbf{x})}{\sqrt{1 + \sum (\varphi_{x_i})^2}}$$



F przeprowadza $V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ na fragment otoczenia tubularnego M .

oznacza (unormowany) wektor normalny do wykresu φ i niech $F: V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ będzie dane wzorem $F(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) + t\nu(\mathbf{x})$. Ponieważ $\varphi \in C^2$, więc $\nu \in C^1$ i $F \in C^1$. Na mocy twierdzenia o otoczeniu tubularnym, F jest dyfeomorfizmem $V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ na U , gdy liczba $\varepsilon > 0$ jest dostatecznie mała. Wobec twierdzenia o zamianie zmiennych,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n(U)}{2\varepsilon} &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_U 1 d\lambda_n \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_V \det F(\mathbf{x}, t) d\lambda_m(\mathbf{x}) \right) dt \quad (6.16) \\ &\rightarrow \int_V \det F(\mathbf{x}, 0) d\lambda_m(\mathbf{x}) \quad \text{dla } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdyż funkcja $t \mapsto h(t) = \int_V \det F(\mathbf{x}, t) d\lambda_m(\mathbf{x})$ zależy od t w sposób ciągły.⁶ Obliczmy wyznacznik $\det DF(\mathbf{x}, 0)$. Jest oczywiście

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}, t) + t \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \mathbf{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \nu(\mathbf{x}).$$

Stąd łatwo wynika, że

$$DF(\cdot, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}/d \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}/d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}/d \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} & 1/d \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } d = \sqrt{1 + \sum (\varphi_{x_i})^2}.$$

Zatem iloczyn liczby d i wyznacznika $\det DF(\cdot, 0)$ jest równy

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \underbrace{1 + \sum \varphi_{x_i}^2}_{=d^2} \end{pmatrix} = d^2.$$

(Pierwszą równość uzyskujemy, dodając do ostatniego wiersza kolejno pierwszy wiersz pomnożony przez $-\varphi_{x_1}$, potem drugi wiersz pomnożony przez $-\varphi_{x_2}$, itd.). To oznacza, że

$$\det DF(\mathbf{x}, 0) = d = \sqrt{1 + \sum_{1 \leq i \leq m} \varphi_{x_i}^2(\mathbf{x})} = \sqrt{\det (D\Phi(\mathbf{x})^T D\Phi(\mathbf{x}))}.$$

Podstawiając ten wynik do równości (6.16), otrzymujemy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_{m+1}(U)}{2\varepsilon} = \int_V \det F(\mathbf{x}, 0) d\lambda_m(\mathbf{x}) = \int_V \sqrt{\det (D\Phi^T \cdot D\Phi)} d\lambda_m = \sigma_m(\Phi(V)).$$

Pokrywając rozmaitość M takimi zbiorami otwartymi U i korzystając z addytywności miary, łatwo otrzymujemy tezę. $\square$

⁶Ciągłość h łatwo wywnioskować np. z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej. Dla każdej funkcji h ciągłej w otoczeniu zera mamy $(2\varepsilon)^{-1} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} h(t) dt \rightarrow h(0)$.