Rozdział 10

Całki niewłaściwe. Funkcje Γ i B Eulera oraz ich zastosowania

W tym rozdziale omówimy pojęcie całki niewłaściwej. Zajmiemy się też dwoma bardzo ważnymi konkretnymi typami takich całek: funkcjami Γ (gamma) i B (beta) Eulera, które stanowią, odpowiednio, naturalne uogólnienie silni oraz współczynników dwumianowych Newtona na wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie.

10.1 Całka niewłaściwa

Definicja 10.1 (całka niewłaściwa na przedziale nieskończonym). Załóżmy, że funkcja $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Jeśli istnieje skończona granica

$$\lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)\,dx\,, \tag{10.1}$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* funkcji f na przedziale $[a,\infty)$ (albo: od a do nieskończoności) i oznaczamy

$$\int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

Mówimy wtedy, że całka niewłaściwa f na $[a,\infty)$ jest *zbieżna*. Jeśli granica (10.1) nie istnieje, to mówimy, że całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest *rozbieżna*.

Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą funkcji $f\colon (-\infty,a] \to \mathbb{R}$, a także całkę niewłaściwą takiej funkcji $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ (odpowiednio, $f\colon (-\infty,a] \to \mathbb{R}$), która dla każdego $a < b < \infty$ (odpowiednio, każdego $-\infty < b < a$) jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale domkniętym o końcach a, b.

Spójrzmy na proste przykłady.

Przykład 10.2. Niech $f(x) = e^{-x}$ dla $x \in [0,\infty)$. Dla dowolnej liczby $y > 0$ jest

$$\int_0^y e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^y = 1 - e^{-y}\,.$$

Ponadto, $1 - e^{-y} \to 1$ dla $y \to +\infty$. Dlatego

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1\,.$$

Przykład 10.3. Niech $f(x)=1/x^s$, $x\ge 1$, $s\in\mathbb{R}$. Wówczas

$$\int_1^y f(x)\,dx=\int_1^y \frac{dx}{x^s}=\begin{cases} \ln x\Big|_1^y=\ln y & \text{dla } s=1,\\[2ex] \dfrac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_1^y=\dfrac{y^{1-s}-1}{1-s} & \text{dla } s\neq 1.\end{cases}$$

Jeśli $s=1$, to granica całek $\int_1^y f\,dx$ przy $y\to\infty$ jest nieskończona, gdyż $\ln y\to\infty$ dla $y\to\infty$. Całka niewłaściwa $\int_1^\infty(1/x)\,dx$ jest zatem rozbieżna.

Jeśli $s\neq 1$, to granica całek $\int_1^y f\,dx$ przy $y\to\infty$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja potęgowa y^{1-s} ma granicę skończoną dla $y\to\infty$, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy wykładnik $1-s<0$. Dla takich s mamy

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^{1-s}-1}{1-s}=\frac{1}{s-1}\qquad (s>1)\,.$$

Dla wszystkich pozostałych $s\in\mathbb{R}$ całka $\int_1^\infty x^{-s}\,dx$ jest rozbieżna.

Przykład 10.4. Niech $f(x)=1/(1+x^2)$, $x\ge 0$. Dla każdego $y>0$ jest

$$\int_0^y f(x)\,dx=\int_0^y\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^y=\operatorname{arc\,tg} y\,.$$

Dlatego

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{y\to\infty}\operatorname{arc\,tg} y=\frac{\pi}{2}\,.$$

Z uwagi na parzystość funkcji podcałkowej, mamy także

$$\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{y\to-\infty}(-\operatorname{arc\,tg} y)=\frac{\pi}{2}$$

Zatem,

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\pi\,.$$

Uwaga 10.5. Jeśli istnieje całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$, to dla każdego $b>a$ istnieje $\int_b^\infty f(x)\,dx$ i zachodzi równość

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^\infty f(x)\,dx\,. \tag{10.2}$$

Istotnie, dla każdego $y>b$ mamy przecież

$$\int_a^y f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^y f(x)\,dx\,.$$

Dlatego lewa strona ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy prawa strona ma granicę. Zachodzi też równość tych granic, czyli równość (10.2).

Twierdzenie 10.6 (warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych). *Całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek Cauchy'ego dla całek: dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje takie $M>a$, że dla wszystkich $y_2>y_1>M$ zachodzi nierówność*

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon\,.$$

Dowód. Jeśli $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna, tzn. istnieje granica

$$g = \lim_{y\to\infty} I(y)\,, \qquad \text{gdzie} \qquad I(y) = \int_a^y f(x)\,dx\,,$$

to zgodnie z definicją (Cauchy'ego) granicy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $M > 0$, że dla wszystkich $y > M$ jest $|I(y) - g| < \varepsilon/2$. Zatem, dla $y_2 > y_1 > M$ jest

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx\right| = |I(y_2) - I(y_1)| \le |I(y_2) - g| + |g - I(y_1)| < \varepsilon\,.$$

Na odwrót, załóżmy, że zachodzi warunek podany w twierdzeniu. Niech $(a_m) \subset [a,\infty)$ będzie dowolnym ciagiem zbieżnym do nieskończoności. Warunek Cauchy'ego dla całek jest po prostu warunkiem Cauchy'ego dla ciągu liczbowego $I(a_m)$. Zatem, istnieje granica tego ciągu, pewna liczba $g = \lim I(a_m) \in \mathbb{R}$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy do $\varepsilon/2$ liczbę $M > a$ tak, aby warunek Cauchy'ego dla całek zachodził dla wszystkich $y_2 > y_1 > M$ z liczbą $\varepsilon/2$ zamiast ε po prawej stronie nierówności. Niech $y > M$. Wybierzmy $m \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_m > y$ oraz $|I(a_m) - g| < \varepsilon/2$. Wówczas,

$$|I(y) - g| = \left|I(a_m) - \int_y^{a_m} f(x)\,dx - g\right| \le |I(a_m) - g| + \left|\int_y^{a_m} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Zatem, wprost z definicji granicy $I(y) \to g$ dla $y \to \infty$. □

Zajmiemy się teraz nieco bliżej związkiem całek niewłaściwych z szeregami.

Definicja 10.7 (całkowalność bezwzględna i całkowalność warunkowa). Niech $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$. Mówimy, że całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest *zbieżna bezwzględnie*, a funkcja f jest *bezwzględnie całkowalna* na $[a,\infty)$, wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka

$$\int_a^\infty |f(y)|\,dy\,.$$

Jeśli całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna, ale nie jest zbieżna bezwzględnie, to mówimy, że jest zbieżna *warunkowo*. Mówimy wtedy, że f jest *warunkowo całkowalna* na $[a,\infty)$.

Wniosek 10.8. *Jeśli $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ jest bezwzględnie całkowalna na $[a,\infty)$, to całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna.*

Dowód. Stosujemy kryterium całkowalności z Twierdzenia 10.6 i nierówność trójkąta dla całek,

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx\right| < \int_{y_1}^{y_2} \big|f(x)\big|\,dx\,.$$

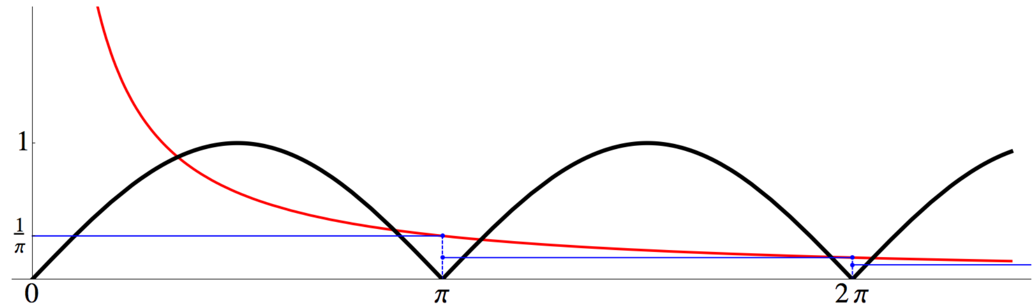
Jeśli całki z prawej strony nierówności są (dowolnie) małe dla wszystkich $y_2 > y_1$ dostatecznie dużych, to i całki z lewej strony są (dowolnie) małe dla wszystkich $y_2 > y_1$ dostatecznie dużych. □

Jest więc podobnie, jak dla szeregów: *bezwzględna zbieżność* implikuje zwykłą zbieżność. Nie musi być odwrotnie: spójrzmy na klasyczny przykład.

Przykład 10.9. Niech $f(x) = x^{-1}\sin x$ dla $x > 0$ i $f(0) = 1$. Wtedy funkcja f jest ciągła na $[0, \infty)$, gdyż $\frac{\sin x}{x} \to 1$ dla $x \to 0$. Wykażemy, że całka niewłaściwa funkcji f, tzw. *całka Dirichleta*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \tag{10.3}$$

jest zbieżna tylko warunkowo, tzn. zbieżna, ale nie bezwzględnie zbieżna.



Na przedziale $(k\pi, (k+1)\pi)$ jest $|\sin x| \ge 1/\big((k+1)\pi\big)$.

Zacznijmy od rozbieżności całki niewłaściwej z funkcji $|f(x)| = |\sin x|/x$. Niech $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$. Mamy

$$\frac{|\sin x|}{x} > \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} \qquad \text{dla } x \in (k\pi, (k+1)\pi)$$

i dlatego

$$\begin{aligned}
\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx &= \sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \\
&\ge \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin x\, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j} \\
&\longrightarrow +\infty \qquad \text{dla } n \to \infty,
\end{aligned}$$

gdyż szereg harmoniczny $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Zatem całka $\int_0^\infty |f(x)|\, dx$ jest rozbieżna.

Oznaczmy teraz

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Aby wykazać zbieżność całki Dirichleta (10.3), sprawdzimy najpierw, że szereg liczbowy $\sum_k I_k$ jest zbieżny. Posłużymy się w tym celu kryterium Leibniza (Wniosek 4.42). Zauważmy najpierw, że dla każdego $k = 0, 1, 2, \ldots$ jest

$$I_{2k} > 0 > I_{2k+1}$$

To łatwo wynika z monotoniczności całki i faktu, że sinus jest dodatni na przedziałach $(2k\pi, 2k\pi+\pi)$, a ujemny na przedziałach $(2k\pi+\pi, (2k+2)\pi)$. Ponadto, ponieważ w każdej z całek I_k funkcja podcałkowa ma stały znak, więc dla każdego $k = 0, 1, 2, \ldots$ jest

$$\begin{aligned} |I_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \quad &\geq \quad \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx \\ &= \quad \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} |\sin y|\, dy \geq \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{|\sin y|}{y}\, dy = |I_{k+1}|\,. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z okresowości modułu sinusa (środkowa równość) oraz z nierówności

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \geq \frac{1}{y} \qquad \text{dla wszystkich } 0 \leq k\pi < x \leq (k+1)\pi \leq y.$$

Zatem, znaki liczb I_k zmieniają się na przemian, zaś ciąg $|I_k|$ jest malejący. Z wypisanych oszacowań wnioskujemy ponadto, że $|I_{k+1}| \leq c/(k+1)$ dla $c = 2/\pi$. Spełnione są więc wszystkie założenia kryterium Leibniza; na mocy tego kryterium szereg $\sum I_k$ jest zbieżny. Niech S oznacza sumę tego szeregu.

Ustalmy teraz liczbę $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $M \in \mathbb{N}$, tak, aby spełnione były dwa warunki:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} I_k - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{dla } n > M$$

oraz

$$\frac{1}{x} < \frac{\varepsilon}{2\pi} \qquad \text{dla } x > M.$$

Niech $y > M\pi$ i $n = [y/\pi]$. Wtedy, z własności entier, $0 \leq y - n\pi < \pi$. Możemy więc oszacować

$$\begin{aligned} \left|\int_0^y \frac{\sin x}{x}\, dx - S\right| \quad &= \quad \left|\sum_{k=0}^{n-1} I_k + \int_{n\pi}^y \frac{\sin x}{x}\, dx - S\right| \\ &\leq \quad \left|\sum_{k=0}^{n-1} I_k - S\right| + \int_{n\pi}^y \frac{|\sin x|}{x}\, dx \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + (y - n\pi)\frac{\varepsilon}{2\pi} \;<\; \varepsilon. \end{aligned}$$

(Idea jest bardzo prosta: dla dużych y całka $\int_0^y f\, dx$ różni się bardzo niewiele od odpowiednio dobranej sumy częściowej szeregu całek I_k).

Otrzymaliśmy więc równość

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{y\to\infty} \int_0^y \frac{\sin x}{x}\, dx = S = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

Uwaga 10.10. Można wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Dla funkcji nieujemnych zbieżność całek niewłaściwych można bardzo wyraźnie powiązać ze zbieżnością szeregów. Dla uproszczenia przyjmijmy $a = 0$ (przedział całkowania zawsze można tak przesunąć, aby jego koniec znalazł się w zerze).

Twierdzenie 10.11. *Niech* $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *będzie funkcją ciągłą. Następujące warunki są wówczas równoważne:*

(i) Całka niewłaściwa $\int_0^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna.*

(ii) Dla każdego rosnącego ciągu liczb nieujemnych (a_m) *dążącego do* $+\infty$ *szereg*

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{a_m}^{a_{m+1}} f(x)\,dx$$

jest zbieżny.

(iii) Dla pewnego rosnącego ciągu liczb nieujemnych (a_m) *dążącego do* $+\infty$ *szereg*

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{a_m}^{a_{m+1}} f(x)\,dx$$

jest zbieżny.

Dowód. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii).* Niech (a_m) będzie jakimkolwiek ciągiem rosnącym liczb nieujemnych. Mamy

$$\int_0^{a_{m+1}} f(x)\,dx = \int_0^{a_1} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx\,.$$

Z warunku (i) wynika, że lewa strona ma skończoną granicę dla $m \to \infty$. Zatem prawa strona też ma skonczoną granicę, a to oznacza, że ciąg sum częściowych szeregu S jest zbieżny.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii).* To jest oczywiste.

(iii) $\Rightarrow$ *(i).* Załóżmy, że szereg S jest zbieżny. Niech $\varepsilon > 0$. Z kryterium Cauchy'ego dla szeregów wynika, że istnieje $M \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $N > M$ jest

$$\sum_{k=M}^{N} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx = \left|\sum_{k=M}^{N} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

(pamiętajmy, że $f \geq 0$). Niech teraz $y_2 > y_1 > a_M$ będą dowolne. Wybierzmy $N > M$ tak, aby $a_{N+1} > y_2$. Wówczas, dzięki monotoniczności całki,

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx\right| = \int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx \leq \int_{a_M}^{a_N} f(x)\,dx = \sum_{k=M}^{N} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx < \varepsilon\,.$$

Zachodzi więc warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych, podany w Twierdzeniu 10.6. Dlatego całka $\int_0^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna. $\square$

Czytelnik może sprawdzić, że analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji nieujemnych, które są całkowalne w sensie Riemanna na każdym przedziale skończonym $[0, b]$.

Twierdzenie 10.12. *Niech* $f\colon [a,\infty) \to [a,\infty)$*, gdzie* $a \geq 0$*, będzie funkcją nierosnącą. Następujące warunki są równoważne:*

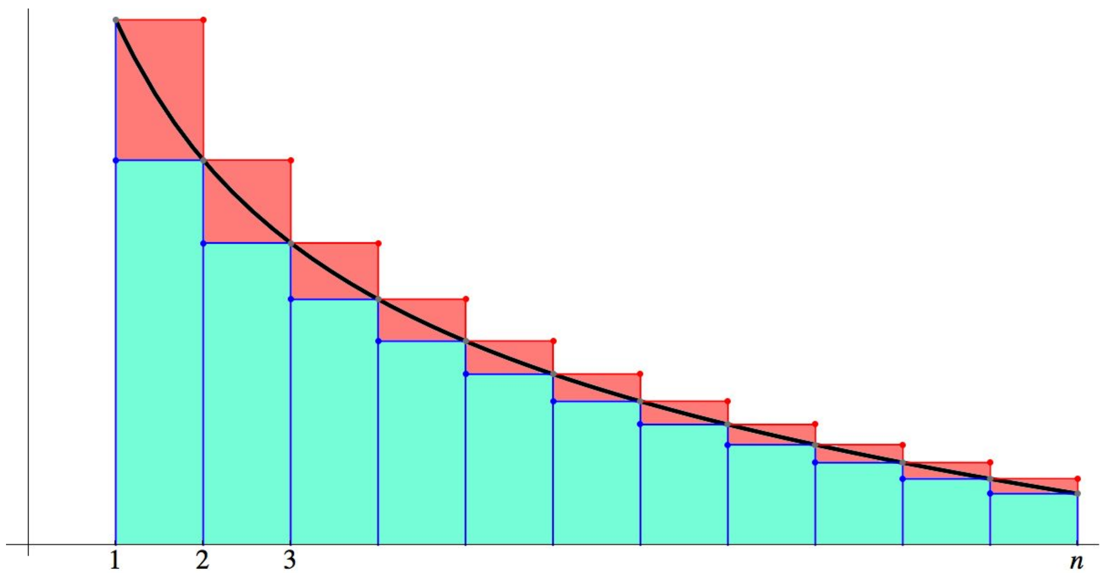
(i) Całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna.*

(ii) Szereg $S = \sum_{n=[a+1]}^{\infty} f(n)$ *jest zbieżny.*

Szkic dowodu. Ponieważ f jest nieujemna i nierosnąca, więc dla $n \geq a+1$ mamy

$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \geq 1 \cdot \inf_{[n-1,n]} f = f(n) = 1 \cdot \sup_{[n,n+1]} f \geq \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx\,.$$

Sumując takie nierówności względem n, łatwo porównujemy (z góry i z dołu, z dokładnością do stałych składników) sumy częściowe S_m szeregu S z całkami $I(m) = \int_a^m f(x)\,dx$. Zarówno sumy S_m, jak i całki $I(m)$, tworzą ciągi rosnące. Zatem jeden z tych ciągów jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest drugi z nich. (Patrz także rysunek). $\square$



Jeśli f jest funkcją malejącą np. na $[1,\infty)$, to dla każdego n jest

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^{n} f(k)\,.$$

Uwaga 10.13. Czytelnik zauważył być może, że w ostatnim twierdzeniu nie zakładaliśmy, że f jest ciągła (lub choćby całkowalna w sensie Riemanna na przedziałach ograniczonych). To nie jest potrzebne: zbiór punktów nieciągłości funkcji nierosnącej jest co najwyżej przeliczalny, więc z twierdzenia charakteryzującego funkcje całkowalne w sensie Riemanna wynika, że funkcja nierosnąca jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale skończonym.

Zadanie 10.14. Skonstruować przykład funkcji ciągłej $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, dla której całka niewłaściwa $\int_0^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna, ale f nie ma granicy dla $x \to +\infty$ i $\sup f = |\inf f| = +\infty$.

Aby podkreślić związki całek niewłaściwych z szeregami, sformułujemy jeszcze dwa kryteria zbieżności takich całek.

Stwierdzenie 10.15 (kryterium porównawcze dla całek niewłaściwych). *Jeśli f, g są nieujemne i ciągłe na przedziale $[a, \infty)$ i istnieją $a_1 \geq a$ i $C > 0$ takie, że $C \cdot f(x) \geq g(x)$ dla wszystkich $x > a_1$, to ze zbieżności całki $\int_a^\infty f(x)\,dx$ wynika zbieżność całki $\int_a^\infty g(x)\,dx$, natomiast z rozbieżności całki $\int_a^\infty g(x)\,dx$ wynika rozbieżność całki $\int_a^\infty f(x)\,dx$.*

Dowód pozostawiamy zainteresowanemu Czytelnikowi. Jest nietrudny i bardzo podobny do dowodu kryterium porównawczego dla szeregów.

Podamy też odpowiednik kryterium Abela i Dirichleta. W tym celu najpierw wykażemy pomocnicze twierdzenie o wartości średniej dla całek.

Twierdzenie 10.16 (drugie twierdzenie o wartości średniej dla całki).

1. *Załóżmy, że $f, h \in C([a, b])$ i $h \geq 0$. Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in [a, b]$, że*
$$f(\xi) \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)h(x)\,dx$$
2. *Załóżmy, że $f, g \in C([a, b])$, a ponadto g jest funkcją monotoniczną. Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in [a, b]$, że*
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\,dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\,dx\,.$$

Dowód. Najpierw udowodnimy pierwszy punkt. Ponieważ $h \geq 0$, więc dla każdego $x \in [a, b]$ mamy $h(x) \inf f \leq f(x)h(x) \leq h(x) \sup f$. Dlatego, z monotoniczności całki,
$$\inf_{[a,b]} f \int_a^b h(x)\,dx \leq I = \int_a^b f(x)h(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f \int_a^b h(x)\,dx\,.$$
Jeśli $\int_a^b h(x)\,dx = 0$, to $fh \equiv 0$ i jako ξ można wybrać dowolny punkt przedziału $[a, b]$. Jeśli $\int_a^b h(x)\,dx \neq 0$, to liczba
$$\left(\int_a^b f(x)h(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b h(x)\,dx\right)^{-1}$$
należy do przedziału $[\inf f, \sup f]$, a więc na mocy własności Darboux jest wartością funkcji f w pewnym punkcie $\xi \in [a, b]$. To kończy dowód punktu pierwszego.

Aby wykazać drugą część twierdzenia, połóżmy $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ dla $x \in [a, b]$. Funkcja F znika dla $x = a$ i jest funkcją pierwotną f.

Dla ułatwienia załóżmy, że g jest funkcją klasy C^1 i $g' \geq 0$ (wpp. można g pomnożyć przez -1). Całkując przez części, otrzymujemy
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \qquad \text{gdyż } F(a) = 0\\
&= F(b)g(b) - F(\xi) \int_a^b g'(x)\,dx \qquad \text{na mocy punktu 1.}\\
&= F(b)g(b) - F(\xi)\big(g(b) - g(a)\big)\\
&= g(b) \int_\xi^b f(x)\,dx + g(a) \int_a^\xi f(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Niech teraz g będzie dowolną funkcją ciągłą monotoniczną. Znajdziemy ciąg wielomianów g_n zbieżny do g jednostajnie na $[a,b]$. Można bez zmniejszenia ogólności zakładać, że każdy z wielomianów g_n jest monotoniczny na $[a,b]$. (To nietrudno wywnioskować np. z faktu, że wielomiany Bernsteina funkcji f zależą w sposób monotoniczny od f). Zatem, dla każdego n istnieje $\xi_n \in [a,b]$ takie, że

$$\int_a^b f(x)g_n(x)\,dx = g_n(a)\int_a^{\xi_n} f(x)\,dx + g_n(b)\int_{\xi_n}^b f(x)\,dx\,.$$

Ciąg ξ_n nie musi wprawdzie być zbieżny, lecz ma podciąg zbieżny; przyjmiemy więc, żeby nie komplikować oznaczeń, że ξ_n jest po prostu zbieżny. Przechodząc w powyższej równości do granicy $n \to \infty$ i korzystając z Twierdzenia 9.37 (o przejściu do granicy pod znakiem całki), żeby wykonać przejście graniczne po lewej stronie, otrzymujemy tezę punktu drugiego w ogólnym przypadku (bez założenia różniczkowalności g).

Dowód całego twierdzenia jest zakończony. □

Twierdzenie 10.17 (kryterium Abela–Dirichleta dla całek). *Załóżmy, że*

$$f,g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$$

są ciągłe, a ponadto:

1. *Funkcja g jest monotoniczna i ma granicę równą zero dla $x \to +\infty$.*
2. *Istnieje taka liczba $M > 0$, że dla wszystkich $x_2 > x_1 \ge a$ jest*

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| < M\,.$$

Wówczas całka

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$$

jest zbieżna.

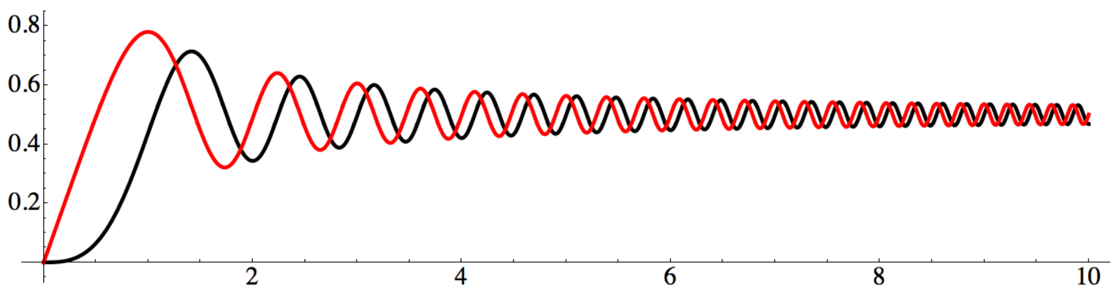
Dowód. Sprawdzimy, że spełniony jest warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $K > a$ tak, aby mieć $|g(x)| < \varepsilon/(2M)$ dla wszystkich $x > K$. Z drugiego twierdzenia o wartości średniej wnioskujemy, że dla dowolnych $y_2 > y_1 > K$ znajdzie się punkt $\xi \in [y_1, y_2]$ taki, że

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)g(x)\,dx\right| = \left|g(y_1)\int_{y_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(y_2)\int_{\xi}^{y_2} f(x)\,dx\right| < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M = \varepsilon\,.$$

(Skorzystaliśmy po prostu z nierówności trójkąta dla sumy. Obie całki z f szacują się przez M, a wartości g w punktach y_i – przez $\varepsilon/(2M)$; są dwa takie składniki). □

Przykład 10.18. 1. Z tego kryterium raz jeszcze można wywnioskować zbieżność całki Dirichleta

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$



Funkcje Fresnela

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt, \qquad C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt\,.$$

Czarny kolor odpowiada funkcji $S(x)$, gdyż $S'(0) = 0$, $C'(0) = 1 > 0$ (skale na osiach są różne).

Oczywiście można ograniczyć się do badania funkcji podcałkowej na $I = (1, \infty)$. Funkcja $g(x) = 1/x$ jest na tym przedziale ciągła i monotonicznie maleje do zera, natomiast

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \sin x\,dx \right| = |\cos y_2 - \cos y_1| \le 2$$

dla wszystkich y_1, y_2.

2. Całki Fresnela

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx\,, \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$$

są zbieżne, choć funkcje podcałkowe nie mają w ogóle granicy w nieskończoności! Znów, sprawdzimy, co się dzieje na przedziale $[1, \infty)$. Zamieniając zmienne ($t = \sqrt{x}$), otrzymujemy

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt\,.$$

Funkcja $g(t) = 1/2\sqrt{t}$ jest monotoniczna i ma w nieskończnoności granicę 0. Ograniczoność całek sinusa na dowolnym przedziale sprawdziliśmy wyżej. Tak samo można postąpić z drugą całką. (Tempo zbieżności obu całek jest powolne).

Całki niewłaściwe na przedziale skończonym

Z bardzo podobną sytuacją mamy do czynienia, gdy funkcja $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła (lub ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna) na każdym przedziale $[a + \varepsilon, b]$, gdzie $0 < \varepsilon < b - a$, ale nie można jej przedłużyć do funkcji ciągłej (odpowiednio: ograniczonej i całkowalnej w sensie Riemanna) na $[a, b]$, gdyż np. f ma w a granicę nieskończoną, lub w ogóle nie ma granicy w punkcie a, ani nie jest ograniczona w żadnym otoczeniu tego punktu. Mówimy wtedy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna, gdy istnieje skończona granica

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

Jeśli ta granica nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy, że całka jest rozbieżna.

Przykład 10.19. Całka
$$\int_0^1 x^{-s}\,dx$$
jest zbieżna dla $s<1$ i rozbieżna dla $s\ge 1$. Istotnie, mamy
$$\int_0^1 x^{-s}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-s}\,ds = \begin{cases} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \ln\dfrac{1}{\varepsilon} & \text{dla } s=1,\\[2ex] \dfrac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_\varepsilon^1 = \dfrac{1-\varepsilon^{1-s}}{1-s} & \text{dla } s\neq 1.\end{cases}$$
Gdy $s=1$, to $\ln(1/\varepsilon)\to+\infty$ dla $\varepsilon\to 0^+$. Dla $s\neq 1$ zbieżność rozpatrywanej całki jest równoważna istnieniu skończonej granicy ε^{1-s} przy $\varepsilon\to 0^+$, tzn. dodatniości wykładnika $1-s$. $\square$

Badając zbieżność całek niewłaściwych z nieograniczonych funkcji nieujemnych na przedziale ograniczonym, wolno oczywiście posługiwać się kryterium porównawczym: jeśli $Cf(x)\ge g(x)\ge 0$ dla pewnej stałej $C>0$ i wszystkich $x\in(a,b)$, to ze zbieżności całki $\int_a^b f(x)\,dx$ wynika zbieżność całki $\int_a^b g(x)\,dx$ i na odwrót, z rozbieżności całki z funkcji g na (a,b) wynika rozbieżność całki z f na tym przedziale.

Przykład 10.20. Całka
$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx$$
jest rozbieżna. Istotnie, $1-Cx^2>\cos x$ na $(0,1)$, gdy $C>0$ jest dostatecznie małą liczbą (wystarczy np. wziąć $C=1/\pi$; Czytelnik zechce to sprawdzić). Dlatego $1-\cos x\ge Cx^2$ i funkcja podcałkowa jest nie mniejsza od $g(x)=C/x$, zaś całka z tej ostatniej funkcji, $\int_0^1 g(x)\,dx = C\int_0^1 x^{-1}\,dx$ jest oczywiście rozbieżna.

Uwaga 10.21 (wzory rachunkowe dla całek niewłaściwych). W poprzednim rozdziale zetknęliśmy się z kilkoma wzorami rachunkowymi dla całek oznaczonych, np. wzorem na całkowanie przez części i wzorem na całkowanie przez podstawienie. Odpowiednikami tych wzorów można się posługiwać także dla całek niewłaściwych, tylko trzeba pamiętać, że po obu stronach mamy do czynienia z granicami pewnych całek. Stosujemy po prostu odpowiedni wzór na mniejszym przedziale i przechodzimy następnie do odpowiedniej granicy z końcami przedziału. Np. mając do czynienia z wzorem na całkowanie przez części dla całek niewłaściwych, piszemy
$$\int_a^\infty f(x)\cdot g'(x)\,dx = fg\Big|_a^\infty - \int_a^\infty f'(x)\cdot g(x)\,dx\,,$$
interpretując każdą całkę jako całkę niewłaściwą i przyjmując, że
$$fg\Big|_a^\infty = \lim_{b\to\infty} f(b)g(b) - f(a)g(a)\,.$$
Podobnie postępujemy z całkami niewłaściwymi na przedziałach skończonych: stosujemy odpowiedni wzór nie na $[a,b]$, tylko na mniejszym przedziale $[a+\varepsilon,b]$, a następnie przechodzimy do granicy $\varepsilon\to 0^+$.

Przy pewnej dozie ostrożności można po prostu całkować przez części i przez podstawienie *praktycznie tak samo*, jak dla zwykłych całek oznaczonych. Spotkamy się kilkakrotnie z taką sytuacją w następnym podrozdziale.

10.2 Funkcje Γ i B

Definicja 10.22. Dla $a > 0$ kładziemy

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\, dt\,. \tag{10.4}$$

Całkę (10.4) nazywamy funkcją gamma Eulera.

Nietrudno przekonać się, że definicja jest poprawna, tzn. całka jest zbieżna dla każdego parametru $a > 0$. Istotnie, ponieważ $e^{-t} \le 1$ dla $t \ge 0$, więc

$$\int_0^1 t^{a-1}e^{-t}\, dt \le \int_0^1 t^{a-1}\, dt = \frac{t^a}{a}\bigg|_0^1 = \frac{1}{a} < \infty\,. \tag{10.5}$$

Dla $t > 1$ i $k > a-1$ jest też

$$e^{t/2} \ge \frac{(t/2)^k}{k!} \ge \frac{t^{a-1}}{k!\cdot 2^k}$$

(porównujemy funkcję e^t z k-tym wyrazem jej szeregu potęgowego, a następnie korzystamy z monotoniczności funkcji wykładniczej o podstawie $t > 1$). Dlatego

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{a-1}\, dt \le k!\cdot 2^k \int_1^\infty e^{-t}e^{t/2}\, dt = k!\cdot 2^k \int_1^\infty e^{-t/2}dt = k!\cdot 2^{k+1}e^{-1/2} < \infty\,. \tag{10.6}$$

Całka określająca funkcję gamma jest sumą całek (10.5) i (10.6), więc jest zbieżna.

Stwierdzenie 10.23. *Funkcja Γ ma następujące własności:*

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad \textit{dla wszystkich } a > 0, \tag{10.7}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \textit{dla każdego } n \in \mathbb{N}. \tag{10.8}$$

Dowód. Liczbę $\Gamma(1)$ wyznaczamy wprost z definicji (patrz także Przykład 10.2):

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\bigg|_0^\infty = 1\,.$$

Całkując przez części, sprawdzamy, że

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\, dt = \frac{t^a}{a}e^{-t}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{t^a}{a}\cdot(-e^{-t})\, dt = 0 + \frac{\Gamma(a+1)}{a}\,.$$

Otrzymaliśmy więc (10.7). Równość (10.8) łatwo udowodnić przez indukcję: dla $n = 1$ wzór (10.8) zachodzi, i jeśli $\Gamma(n) = (n-1)!$, to $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\cdot(n-1)! = n!$. $\square$

Widzimy więc, że funkcja $\Gamma\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$ jest jednym z możliwych przedłużeń funkcji $n \mapsto n!$ ze zbioru liczb naturalnych na liczby dodatnie. Oczywiście wszystkich takich przedłużeń jest nieskończenie wiele. Funkcję Γ wyróżnia spośród nich jedna własność: okazuje się, że $\ln\Gamma\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$ jest *funkcją wypukłą*. Wyjaśnijmy ten fakt możliwie starannie.

Definicja 10.24. Niech I będzie przedziałem w $\mathbb{R}$ i niech $f\colon I\to(0,\infty)$. Mówimy, że f *jest logarytmicznie wypukła* wtedy i tylko wtedy, gdy $\ln f\colon I\to\mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą.

Równoważnie, $f\colon I \to (0,\infty)$ jest logarytmicznie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in I$ oraz $\lambda \in [0,1]$ zachodzi nierówność

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}\,.$$

Logarytmując tę nierówność stronami, co wolno zrobić, gdyż $\ln$ jest funkcją rosnącą, otrzymujemy nierówność Jensena dla funkcji $\ln f$ (patrz Definicja 5.66).

Stwierdzenie 10.25. *Iloczyn funkcji logarytmicznie wypukłych jest funkcją logarytmicznie wypukłą.*

Dowód. Suma funkcji wypukłych jest wypukła. Dlatego, jeśli $\ln f_i$ jest funkcją wypukłą dla $i = 1, 2$, to $\ln(f_1 f_2)$ też jest funkcją wypukłą. □

Logarytmiczną wypukłość funkcji Γ można sprawdzić na kilka sposobów. My przypomnimy w tym celu nierówność Höldera dla sum skończonych, a następnie wyprowadzimy z niej łatwy wniosek: nierówność Höldera dla całek. Jak pamiętamy (patrz Twierdzenie 5.72), jeśli $p, q > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \ge 0$ oraz $y_1, \ldots, y_n \ge 0$ jest

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}. \tag{10.9}$$

Łatwo stąd otrzymać

Stwierdzenie 10.26 (nierówność Höldera dla całek). *Jeśli $p, q > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to dla dowolnych funkcji f, g całkowalnych na przedziale $[a, b]$ zachodzi nierówność*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \le \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}. \tag{10.10}$$

Szkic dowodu. Z nierówności Höldera dla sum wynika, że dla każdego podziału $P = (t_0, \ldots, t_n)$ odcinka $[a, b]$ i punktów pośrednich $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ jest

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^n f(s_i)g(t_i)\Delta t_i\right| &\le \sum_{i=1}^n |f(s_i)|(\Delta t_i)^{1/p} \cdot |g(s_i)|(\Delta t_i)^{1/q} \\ &\le \left(\sum_{i=1}^n |f(s_i)|^p \cdot \Delta t_i\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |g(s_i)|^q \cdot \Delta t_i\right)^{1/q}, \end{aligned}$$

gdzie $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ dla $i = 1, \ldots, n$. Z takich nierówności dla sum całkowych otrzymujemy po przejściu granicznym nierówność Höldera dla całek. □

Uwaga 10.27. Nierówność Höldera (10.10) *zachodzi także dla całek niewłaściwych*. Wystarczy wypisać ją na mniejszych przedziałach (tam, gdzie całki oznaczone są właściwe), a następnie przejść do granicy z odpowiednim końcem (lub dwoma końcami) przedziału.

Wniosek 10.28. *Funkcja Γ jest logarytmicznie wypukła.*

Dowód. Ustalmy $x, y > 0$ i liczbę $\lambda \in (0,1)$. Posłużymy się nierównością Höldera z wykładnikami $p = 1/\lambda$ i $q = 1/(1-\lambda)$. Wtedy $1/p = \lambda$, $1/q = 1-\lambda$ i warunek $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ jest spełniony. Prosty rachunek daje

$$\begin{aligned} \Gamma\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &= \int_0^\infty t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1} e^{-t}\, dt \\ &= \int_0^\infty t^{\lambda(x-1)} e^{-\lambda t} \cdot t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-(1-\lambda)t}\, dt \\ &\le \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt\right)^{\lambda} \cdot \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t}\, dt\right)^{1-\lambda} \;=\; \Gamma(x)^\lambda \cdot \Gamma(y)^{1-\lambda}\,. \end{aligned}$$

Dowód jest zakończony. □

Uwaga 10.29. Nieco inny dowód logarytmicznej wypukłości funkcji Γ przebiega według następującego schematu.

1. Najpierw trzeba sprawdzić, że suma (dwóch) funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła. Można w tym celu skorzystać z kryterium wypukłości funkcji ciągłych podanego w Twierdzeniu 5.69. Przez indukcję wynika stąd, że suma n funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła.

2. Następnie, sprawdza się, że sumy całkowe Riemanna,
$$\sum_{i=1}^{n} t_i^{a-1} e^{-t_i} \Delta t_i$$
przybliżające całkę
$$I_N(a) = \int_0^N t^{a-1} e^{-t}\, dt$$
są funkcjami logarytmicznie wypukłymi zmiennej a.

3. Łatwo jest wykazać, że granica punktowo zbieżnego ciągu funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła. Stąd i z logarytmicznej wypukłości sum Riemanna wnioskujemy najpierw o logarytmicznej wypukłości całek $I_N(a)$, a następnie – logarytmicznej wypukłości funkcji $\Gamma(a) = \lim_{N\to\infty} I_N(a)$.

Zainteresowany Czytelnik zechce samodzielnie uzupełnić wszystkie szczegóły takiego rozumowania.

Okazuje się, że własność (10.7) funkcji Γ, połączona z jej logarytmiczną wypukłością, jednoznacznie identyfikuje tę funkcję.

Twierdzenie 10.30 (H. Bohr). *Jeśli funkcja* $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ *jest logarytmicznie wypukła, a ponadto* $f(1) = 1$ *i* $f(x+1) = xf(x)$ *dla wszystkich* $x > 0$*, to wówczas* $f(x) = \Gamma(x)$ *dla wszystkich* $x > 0$.

Dowód. *Krok 1.* Ponieważ $f(1) = 1$ i $f(x+1) = xf(x)$, więc po pierwsze $f(n) = (n-1)!$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, po drugie zaś funkcja f jest *jednoznacznie* wyznaczona przez swoje wartości na odcinku $(0,1]$. Podobną własność ma funkcja Γ: warunek (10.7) pozwala wyznaczyć jej wszystkie wartości, jeśli znamy $\Gamma(x)$ dla $x \in (0,1]$. Dlatego wystarczy sprawdzić, że

$$f(x) = \Gamma(x) \qquad \text{dla wszystkich } x \in (0,1].$$

Krok 2. Ustalmy $x \in (0, 1]$. Skorzystamy teraz z logarytmicznej wypukłości f. Niech $n \geq 2$ będzie dowolne. Ponieważ $\ln f$ jest funkcją wypukłą, więc na mocy Twierdzenia 5.75 o monotoniczności ilorazów różnicowych otrzymujemy

$$\frac{\ln f(n) - \ln f(n-1)}{1} \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{x} \leq \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{1}.$$

Upraszczając te wyrażenia z wykorzystaniem warunku $f(k+1) = k!$, a następnie mnożąc obie strony przez $x > 0$, otrzymujemy

$$\ln(n-1)^x = x\ln(n-1) \leq \ln f(x+n) - \ln(n-1)! \leq x \ln n = \ln n^x.$$

Przeto

$$\ln\Big((n-1)!\,(n-1)^x\Big) \leq \ln f(x+n) \leq \ln\Big((n-1)!\,n^x\Big),$$

stąd zaś

$$(n-1)!(n-1)^x \leq f(x+n) \leq (n-1)!n^x.$$

Jednak $f(x+n) = (x+n-1)f(x+n-1) = \ldots = (x+n-1)\cdot\ldots\cdot(x+1)xf(x)$. Podstawiając tę równość wyżej, otrzymujemy przybliżenie f z góry i z dołu:

$$\frac{(n-1)!\,(n-1)^x}{(x+n-1)\cdot\ldots\cdot(x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{(n-1)!\,n^x}{(x+n-1)\cdot\ldots\cdot(x+1)x}$$

Ponieważ takie nierówności zachodzą dla każdego $n \geq 2$, więc możemy po lewej stronie zastąpić n przez $n+1$. Zatem

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x) := \frac{n!\cdot n^x}{(x+n)\cdot\ldots(x+1)x} \leq f(x) &\leq \frac{(n-1)!\,n^x}{(x+n-1)\cdot\ldots\cdot(x+1)x}\\ &= \frac{n!\cdot n^x}{(x+n)\cdot\ldots(x+1)x}\cdot\frac{x+n}{n} = \Gamma_n(x)\cdot\frac{x+n}{n}.\end{aligned}$$

Równoważnie, dla $n \geq 2$ i $x \in (0,1]$ liczba $\Gamma_n(x)$ spełnia

$$f(x)\cdot\frac{n}{n+x} \leq \Gamma_n(x) \leq f(x).$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach, granica $\Gamma_n(x)$ dla $n \to \infty$ istnieje i jest równa $f(x)$. Otrzymaliśmy więc konkretny wzór na funkcję f:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^x}{(x+n)\cdot\ldots(x+1)x}, \qquad 0 < x \leq 1.$$

Jednak funkcja Γ też spełnia założenia twierdzenia i dlatego musi wyrażać się tym samym wzorem. Zatem $f \equiv \Gamma$ na przedziale $(0,1]$, a więc (jak stwierdziliśmy wcześniej) także na całym zbiorze liczb dodatnich. □

Analizując powyższy dowód, nietrudno stwierdzić następujący fakt.

Wniosek 10.31. *Wzór*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x), \qquad \textit{gdzie} \qquad \Gamma_n(x) = \frac{n!\cdot n^x}{(x+n)\cdot\ldots(x+1)x}, \tag{10.11}$$

zachodzi dla wszystkich $x > 0$.

DOWÓD. Ponieważ

$$\Gamma_n(x+1) = \frac{n!\cdot n^{x+1}}{(x+1+n)\cdot\ldots(x+1+1)(x+1)} = x\Gamma_n(x)\cdot\frac{n}{x+1+n}\,, \tag{10.12}$$

więc jeśli granica w (10.11) istnieje dla liczby x, to istnieje także dla $x+1$. Widać także, że $g(x) = \lim_n \Gamma_n(x)$ spełnia tożsamość $g(x+1) = xg(x)$. Widzieliśmy już, że $g(x) = \Gamma(x)$ dla $x \in (0,1]$. Z równości $g(x+1) = xg(x)$ i $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ wynika, że (10.11) zachodzi dla wszystkich $x > 0$. □

Wniosek 10.32. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

DOWÓD. Stosujemy poprzedni wniosek;

$$\begin{aligned}
\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{1/2}}{\big(\frac12+n\big)\cdot\ldots\big(\frac12+1\big)\cdot\frac12} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}n!\cdot n^{1/2}}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot\sqrt{n}\cdot\frac{2\sqrt{n}}{2n+1} \\
&\longrightarrow \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

na mocy wzoru Wallisa (patrz Twierdzenie 9.40). □

Jak widać, w ostatnim dowodzie obliczamy po prostu granicę pewnego konkretnego ciągu. Jednak interpretacja tej granicy – tzn. umiejętność zauważenia jej związku z funkcją Γ z jednej strony i ze wzorem Wallisa z drugiej strony – wymaga solidnej znajomości rachunku całkowego.

Wniosek 10.33 (całka Poissona). *Całka niewłaściwa*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx$$

jest zbieżna i równa $\sqrt{\pi}$.

DOWÓD. Sprawdźmy najpierw zbieżność całki. Dla $x > 1$ jest $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$, więc

$$\int_1^{\infty} \exp(-x^2)\,dx < \int_1^{\infty} e^{-x} = \frac{1}{e}\,.$$

Przez symetrię,

$$\int_{-\infty}^{-1} \exp(-x^2)\,dx < \frac{1}{e}\,.$$

Stąd już wynika zbieżność rozważanej całki (na przedziale $[-1,1]$ funkcja e^{-x^2} jest ciągła). Ponadto, dokonując na przedziale $(0,\infty)$ zamiany zmiennych $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac12 t^{-1/2}\,dt$, otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx = 2\int_0^{\infty} \exp(-x^2)\,dx = \int_0^{\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt = \Gamma\Big(\frac12\Big) = \sqrt{\pi}\,.$$

To jest żądany wynik. $\square$

Zamieniając zmienne ($x = t/\sqrt{2}$, $dx = (1/\sqrt{2})\,dt$) w równości $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,dt = 1\,. \tag{10.13}$$

Funkcja $g(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$ nazywa się *gęstością standardowego rozkładu normalnego*. Czytelnik spotka ją na studiach wielokrotnie, na zajęciach z Rachunku Prawdopodobieństwa i ze Statystyki, a także w opisie rozwiązań równania przewodnictwa cieplnego.

Teraz zdefiniujemy funkcję B (beta Eulera) i omówimy związek, łączący Γ i B.

Definicja 10.34. Dla $a, b > 0$ kładziemy

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt\,. \tag{10.14}$$

Całkę (10.14) nazywamy funkcją beta Eulera.

Zauważmy, że całka $B(a,b)$ jest zbieżna dla wszystkich $a, b > 0$. Dla $a, b \geq 1$ funkcja podcałkowa jest po prostu ciągła na $[0,1]$. Dla pozostałych a, b piszemy

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = \int_0^{1/2} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt + \int_{1/2}^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt\,.$$

W pierwszej całce osobliwość jest tylko w zerze. Mamy

$$\int_0^{1/2} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt \leq \int_0^{1/2} t^{a-1}(1-t)^{-1}\,dt \leq 2\int_0^{1/2} t^{a-1}\,dt = 2\cdot \left.\frac{t^a}{a}\right|_0^{1/2} < \infty\,.$$

Rozpatrywanie drugiej całki sprowadzamy do powyższego, zamieniając zmienne:

$$[1/2, 1] \ni t \longmapsto s = 1 - t \in [0, 1/2]\,,$$

zatem

$$\int_{1/2}^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = \int_{1/2}^0 (1-s)^{a-1}s^{b-1}\,(-ds) = \int_0^{1/2} s^{b-1}(1-s)^{a-1}\,ds < \infty$$

dla wszystkich $b > 0$ (szacujemy jak poprzednio, zamieniając a i b rolami).

Lemat 10.35. *Dla wszystkich $a, b > 0$ jest $B(a,b) = B(b,a)$. Ponadto, przy ustalonym $a > 0$ funkcja $B(a,\cdot)\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ jest logarytmicznie wypukła.*

Szkic dowodu. O równości $B(a,b) = B(b,a)$ przekonujemy się łatwo, dokonując zamiany zmiennych $t \mapsto s = 1 - t$. Logarytmicznej wypukłości $B(a,\cdot)$ dowodzi się tak samo, jak logarytmicznej wypukłości funkcji Γ – korzystając z nierówności Höldera. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi jako zadanie. $\square$

Twierdzenie 10.36. *Zachodzą następujące wzory:*

$$B(a+1,b) + B(a,b+1) = B(a,b) \qquad \textit{dla } a,b>0\,, \tag{10.15}$$

$$B(a,b+1) = \frac{b}{a+b}B(a,b) \qquad \textit{dla } a,b>0\,, \tag{10.16}$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad \textit{dla } a,b>0\,. \tag{10.17}$$

Uwaga. Wzór (10.17) bywa nazywany podstawowym związkiem między funkcjami Γ i B.

Dowód. Najpierw sprawdzimy wzory (10.15) i (10.16). Ustalmy liczby $a, b > 0$. Dodając całki, otrzymujemy

$$\begin{aligned} B(a+1,b) + B(a,b+1) &= \int_0^1 \Big(t^a(1-t)^{b-1} + t^{a-1}(1-t)^b \Big)\, dt \\ &= \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\Big(t + (1-t)\Big)\, dt = B(a,b)\,. \end{aligned}$$

To jest wzór (10.15). Aby sprawdzić (10.16), całkujemy najpierw przez części, zauważając, że funkcja $g(x) = x^a(1-x)^b$ ma granicę równą zero zarówno dla $x \to 0$, jak i dla $x \to 1$. Dlatego w poniższym rachunku można zaniedbać wartości funkcji na końcach przedziału:

$$\begin{aligned} B(a,b+1) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^b\, dt &= \int_0^1 \left(\frac{t^a}{a}\right)'(1-t)^b\, dt \\ &= -\frac{1}{a}\int_0^1 t^a\big(-b\big)(1-t)^{b-1}\, dt \\ &= \frac{b}{a}\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}\, dt = \frac{b}{a}B(a+1,b)\,. \end{aligned}$$

Zatem,

$$B(a,b+1) = \frac{b}{a}B(a+1,b) \overset{(10.15)}{=} \frac{b}{a}\Big(B(a,b) - B(a,b+1)\Big),$$

lub równoważnie $(a+b)B(a,b+1) = bB(a,b)$. To jest wzór (10.16).

Zajmijmy się teraz wzorem (10.17). Ustalmy $a > 0$. Niech

$$f(b) = \frac{B(a,b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \quad \text{dla } b > 0.$$

Ponieważ iloczyn funkcji logarytmicznie wypukłych jest funkcją logarytmicznie wypukłą, więc f jest logarytmicznie wypukła. Mamy

$$f(1) = \frac{B(a,1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} \overset{(10.7)}{=} aB(a,1) = a\int_0^1 t^{a-1}\, dt = 1\,.$$

Wreszcie, dzięki znanym już własnościom funkcji Γ i B,

$$\begin{aligned} f(b+1) = \frac{B(a,b+1)\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a)} &\overset{(10.7)}{=} \frac{B(a,b+1)(a+b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \\ &\overset{(10.16)}{=} \frac{b}{a+b}\cdot\frac{B(a,b)(a+b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \\ &= b\cdot\frac{B(a,b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} = bf(b)\,. \end{aligned}$$

Zatem funkcja f spełnia założenia Twierdzenia 10.30, charakteryzującego funkcję Γ. Mamy więc

$$\Gamma(b) = f(b) = \frac{B(a,b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \qquad \text{dla każdego } b > 0.$$

Ponieważ $a > 0$ było w całym rozumowaniu dowolne, więc dowód jest zakończony. $\square$

Przykład 10.37. Sprawdzimy powtórnie, że $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Na mocy wzoru podstawowego, zastosowanego dla $a = b = 1/2$, $a + b = 1$, jest

$$\Gamma(1/2)^2 = B\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)\Gamma(1) = B\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}\,.$$

Aby obliczyć ostatnią całkę, dokonajmy zamiany zmiennych $t = (1 + u)/2$. Zmiennej $t \in (0, 1)$ odpowiadają wartości $u \in (-1, 1)$; jest $dt = \frac{1}{2}\,du$, a ponadto

$$\sqrt{t(1-t)} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-u)(1+u)} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{2}\,.$$

Dlatego

$$\Gamma(1/2)^2 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u\Big|_{-1}^{1} = \pi\,.$$

(Jak widać, w ostatnim kroku obliczamy tę samą całkę, którą trzeba obliczyć, żeby wyznaczyć długość półokręgu o promieniu równym 1. To świadczy o tym, że całki niewłaściwe służą nie tylko do teoretycznych rachunków, ale także pojawiają się w prostych i naturalnych zagadnieniach geometrycznych).

10.3 Wzór iloczynowy Weierstrassa i kilka innych własności funkcji Γ

Zasadniczym celem tego i następnego podrozdziału jest po pierwsze uzyskanie pewnej liczby ciekawych wzorów, po drugie zaś – i to jest cel ważniejszy – przekonanie Czytelnika, że funkcjami, które są zdefiniowane jako całki zależne od parametru, lub granice wyrażeń zależnych od parametru, można operować niemal tak samo, jak dobrze znanymi funkcjami elementarnymi, prowadząc swobodnie najróżniejsze obliczenia.

To ilustracja tego, jaką rolę odgrywa w analizie pojęcie granicy i twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych oraz własnościach szeregów potęgowych. Cały ten aparat, łącznie z prostymi elementami rachunku różniczkowego, będzie obecny w dowodach i obliczeniach, jakie niżej przeprowadzimy. Tekst byłby znacznie krótszy, gdyby nie wyjaśniać, *dlaczego* można wykonać poszczególne kroki we wzorach, które z formalnego punktu widzenia są dość jasne.

Funkcja Γ, ważna w analizie, znakomicie się nadaje do przeprowadzenia takiej ilustracji. Zbieżność jednostajną ciągów i szeregów funkcyjnych oraz własności takich ciągów i szeregów wprowadza się i bada między innymi właśnie po to, żeby móc bez przeszkód operować funkcjami zdefiniowanymi w sposób nieelementarny.

Twierdzenie 10.38 (wzór iloczynowy Weierstrassa). *Dla wszystkich $x > 0$ zachodzi wzór*

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \cdot \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}} = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}}\,, \tag{10.18}$$

gdzie γ oznacza tzw. stałą Eulera, tzn.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

Dowód. Dokonamy prostych przekształceń wzoru (10.11), uzyskanego we Wniosku 10.31. Mamy

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^x}{(x+n)\cdot\ldots(x+1)x} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot e^{x\ln n}}{(x+n)\cdot\ldots(x+1)x} \\ &= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x\ln n}}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to\infty} e^{x(\ln n-1-\frac12-\frac13-\cdots-\frac1n)}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\exp(x/k)}{1+\frac{x}{k}}\,. \end{aligned} \tag{10.19}$$

Zauważmy teraz, że ciąg $a_n = 1+\frac12+\cdots+\frac1n-\ln n$ ma granicę skończoną. Istotnie, nietrudno zauważyć, że dla $n>1$ jest

$$\begin{aligned} b_n = a_n - \frac1n &= 1+\frac12+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln n \\ &= 1+\frac12+\cdots+\frac{1}{n-1}-\int_1^n\frac1x\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac1k-\frac1x\right)dx\,. \end{aligned}$$

Zatem b_n jest ciągiem rosnącym; ponadto, dzięki monotoniczności $1/x$, zachodzi nierówność[1]

$$b_n \le \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac1k-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac1n < 1\,.$$

Dlatego ciąg b_n jest zbieżny; liczba $\lim a_n = \lim(b_n+\frac1n) = \lim b_n = \gamma$ nazywa się *stałą Eulera* lub *stałą Eulera–Mascheroniego*. Możemy więc skorzystać we wzorze (10.19) z twierdzenia o granicy iloczynu ciągów zbieżnych i napisać

$$\Gamma(x) = \frac1x\cdot\lim_{n\to\infty} e^{x(\ln n-1-\frac12-\frac13-\cdots-\frac1n)}\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\exp(x/k)}{1+\frac{x}{k}} = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\exp(x/k)}{1+\frac{x}{k}}\,.$$

(Zauważmy: ostatnia granica istnieje, bo istnieje granica pierwszego czynnika, równa $\exp(-\gamma x)$ oraz granica iloczynu obu czynników.) $\square$

Stwierdzenie 10.39 (wzór Legendre'a). *Dla każdego* $x>0$ *jest*

$$\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x)\,. \tag{10.20}$$

[1] Czytelnik zechce porównać ten argument z dowodem całkowego kryterium zbieżności szeregów, patrz Twierdzenie krytcalkszer i towarzyszący mu rysunek – to takie samo rozumowanie!

Dowód. Raz jeszcze wykorzystujemy wzór (10.11). Rozszerzając ułamek tak, aby zauważyć wyrażenie $\Gamma_{2n}(x)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\cdot n^{x/2}\cdot n^{x/2}\cdot\sqrt{n}}{\frac{x}{2}\big(\frac{x}{2}+1\big)\cdots\big(\frac{x}{2}+n\big)\cdot\frac{x+1}{2}\big(\frac{x+1}{2}+1\big)\cdots\big(\frac{x+1}{2}+n\big)} \\ &= \frac{1}{2^x}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+2}(n!)^2\cdot(2n)^x\sqrt{n}}{x(x+2)\dots(x+2n)\cdot(x+1)(x+3)\dots(x+2n+1)} \\ &= \frac{1}{2^x}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!\cdot(2n)^x\sqrt{n}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+2n)}\cdot\left(\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot\ldots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot\frac{4n}{x+2n+1},\end{aligned} \tag{10.21}$$

gdyż

$$2^{2n+2}(n!)^2\sqrt{n} = 4n\cdot(2n)!\cdot\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot\ldots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

W ostatnim wyrażeniu we wzorze (10.21) mamy granicę trzech czynników. Pierwszy z nich, $\Gamma_{2n}(x)\to\Gamma(x)$ dla $n\to\infty$ – por. wzór (10.11). Drugi czynnik, rozważany już wcześniej w dowodzie Wniosku 10.32, na mocy wzoru Wallisa ma granicę $\sqrt{\pi}$. Ostatni czynnik, $4n/(x+2n+1)$, ma granicę 2. Dlatego

$$\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = 2^{-x}\Gamma(x)\cdot2\sqrt{\pi}\,.$$

Ta obserwacja kończy cały dowód. □

Dotychczas rozważaliśmy funkcję Γ tylko dla $x>0$. Definicja $\Gamma(x)$ jako całki niewłaściwej $\int_0^\infty t^{x-1}\exp(-t)\,dt$ ma sens *tylko* dla takich x. Gdy $x\le0$, całka jest rozbieżna, z uwagi na zachowanie funkcji podcałkowej w pobliżu zera.

Wiemy już jednak (patrz Wniosek 10.31), że

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)\,, \qquad \text{gdzie} \qquad \Gamma_n(x) = \frac{n!\cdot n^x}{(x+n)\cdot\ldots(x+1)x}\,.$$

Przypomnijmy: aby wykazać tę równość, skorzystaliśmy z tego, że granica istnieje dla $x\in(0,1]$ oraz z równości (10.12):

$$\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x)\cdot\frac{n}{x+1+n}\,.$$

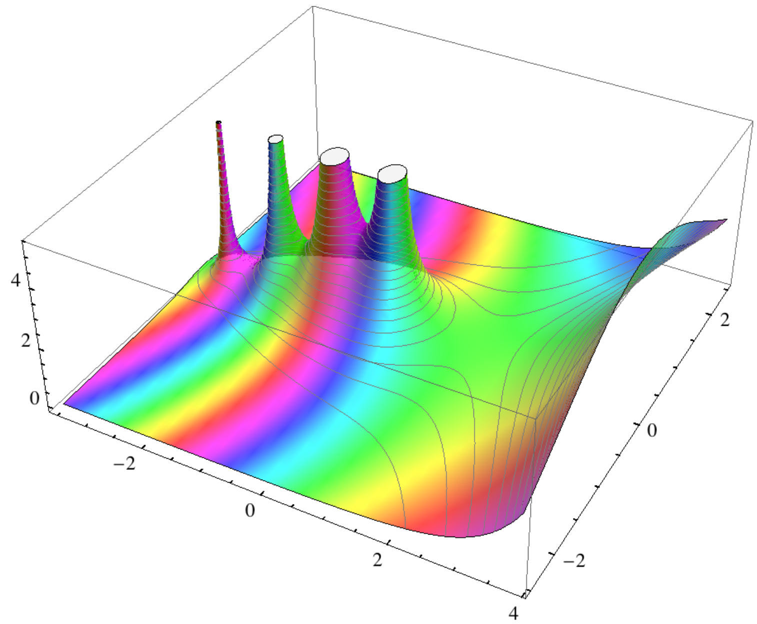
Podstawmy $x=t-1$. Otrzymamy

$$\Gamma_n(t-1) = \frac{\Gamma_n(t)}{t-1}\cdot\frac{t+n}{n}$$

Wzór określający $\Gamma_n(t)$ ma sens *dla wszystkich* $t\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$. Dlatego z powyższej równości wynika, że jeśli $t\ne0,-1,-2,\ldots$ i $\Gamma_n(t)$ ma granicę dla $n\to\infty$, to $\Gamma_n(t-1)$ też ma granicę dla $n\to\infty$. Wiemy już jednak, że granica $\lim_n\Gamma_n(t)$ istnieje dla wszystkich $t>0$ i jest równa funkcji Γ. Dlatego następująca definicja jest poprawna i pozwala rozszerzyć funkcję Γ na cały zbiór $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$.

Definicja 10.40 (alternatywna definicja funkcji Γ). Dla $t\in\mathbb{R}$, $t\ne0,-1,-2,\ldots$ przyjmujemy

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(t)\,.$$



Wykres funkcji $z = (x,y) \mapsto |\Gamma(x+iy)|$, tzn. zbiór punktów $\big(x,y,|\Gamma(x+iy)|\big)$ w $\mathbb{R}^3$, gdzie $x,y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0,-1,-2,\ldots$. Widoczne są osobliwości (tzw. bieguny) funkcji Γ w punktach $0,-1,-3$. Kolor powierzchni odpowiada argumentowi liczby $\Gamma(x+iy)$.

Dla $t>0$ definicja ta jest równoważna wcześniejszej, wykorzystującej wzór (10.4).

Uwaga. W istocie, funkcję Γ można zdefiniować tak, jak wyżej (albo wzorem iloczynowym Weierstrassa) dla wszystkich zespolonych $t \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$. Nie będziemy jednak badać zachowania Γ dla argumentów spoza prostej rzeczywistej.

Stwierdzenie 10.41. *Dla wszystkich* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$ *jest* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. □

Ponieważ w dowodzie wzoru iloczynowego Weierstrassa i wzoru Legendre'a korzystaliśmy jedynie z istnienia granicy $\Gamma_n(x)$ oraz z ciągłości funkcji wykładniczej, więc oba te wzory zachodzą dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ z wyjątkiem liczb całkowitych niedodatnich.

Stwierdzenie 10.42. *Dla wszystkich* $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0,-1,-2,\ldots$ *zachodzą wzory Weierstrassa i Legendre'a:*

$$\Gamma(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{t} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(t/k)}{1+\frac{t}{k}}\,, \tag{10.22}$$

$$\Gamma\Big(\frac{t}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{t+1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{t-1}}\Gamma(t)\,. \tag{10.23}$$

Wniosek 10.43. $\Gamma\colon \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją klasy* C^1.

Dowód. Dla $x>0$ mamy $\Gamma(x)>0$ wobec definicji (10.4) (gdyż $\Gamma(x)$ jest całką dodatniej funkcji na niezerowym przedziale). Na mocy wzoru Weierstrassa dla $x>0$, dzięki ciągłości logarytmu naturalnego, jest

$$\begin{aligned}\ln\Gamma(x) &= -\gamma x - \ln x + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{x}{k} - \ln\Big(1+\frac{x}{k}\Big)\Big)\\ &= -\gamma x - \ln x + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{x}{k} - \ln\Big(1+\frac{x}{k}\Big)\Big) \qquad (10.24)\end{aligned}$$

Zauważmy: mamy pewność, że ostatni szereg jest zbieżny, gdyż zbieżny był iloczyn nieskończony występujący we wzorze Weierstrassa.

Sprawdzimy teraz w standardowy sposób, że $g(x) = \ln\Gamma(x)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły na $(0,\infty)$. Wystarczy w tym celu sprawdzić, czy szereg pochodnych, otrzymany przez różniczkowanie szeregu w (10.24) wyraz po wyrazie, jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale $(0, M]$, gdzie $M < \infty$. Po zróżniczkowaniu otrzymujemy szereg o wyrazach

$$a_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{k}{x+k}\cdot\frac{1}{k} = \frac{x}{k(x+k)}\,.$$

Jeśli $x \in (0, M]$, to

$$0 < a_k(x) = \frac{x}{k(x+k)} < \frac{x}{k^2} \le \frac{M^2}{k}\,.$$

Z kryterium Weierstrassa wynika zatem jednostajna zbieżność szeregu $\sum_k a_k(x)$ na każdym przedziale $(0, M]$, a z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych – równość

$$g'(x) = \big(\ln\Gamma(x)\big)' = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(x+k)}\,.$$

i ciągłość g' na $(0,\infty)$. Oczywiście $\Gamma = e^{\ln\Gamma} = \exp\circ g$ też jest klasy C^1 na przedziale $(0,\infty)$. Dla $x < 0$, $x \notin \mathbb{Z}$ różniczkowalność Γ i ciągłość jej pochodnej Γ' w punkcie x wynika łatwo z tożsamości $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$. $\square$

Korzystając ze wzorów Weierstrassa i Legendre'a wykażemy teraz dość prosty (choć dla niewtajemniczonych zupełnie nieoczekiwany) związek między funkcją Γ i sinusem. Okazuje się, że zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10.44. *Dla $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ połóżmy*

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x\,.$$

Wówczas funkcja $\phi\colon \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ jest stała i równa 1.

Dowód. Plan postępowania jest następujący. Sprawdzimy, że funkcję ϕ można dookreślić w punktach $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby otrzymać funkcję okresową klasy $C^1(\mathbb{R})$, o okresie 1. Wzór Legendre'a pozwoli wypisać pewne równanie funkcyjne na ϕ. W końcówce sprawdzimy, że z tego równania wynika łatwo, że $\ln\phi(x)$ jest funkcją stałą (bo ma pochodną zero). Oto szczegóły.

Krok 1. Funkcja ϕ jest okresowa i ma okres równy 1. Istotnie, niech

$$f(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x), \qquad h(x) = \frac{\sin\pi x}{\pi}\,.$$

Dzięki równościom $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ oraz $\sin(y+\pi) = -\sin y$, otrzymujemy dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ związki

$$f(x+1) = \Gamma(x+1)\Gamma(1-(x+1)) = x\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\Gamma(x)\Gamma(-x+1) = -f(x)\,,$$
$$h(x+1) = \frac{\sin \pi(x+1)}{\pi} = -\frac{\sin \pi x}{\pi} = -h(x)\,.$$

Stąd oczywiście $\phi(x+1) = f(x+1)h(x+1) = (-1)^2 f(x)h(x) = \phi(x)$.

Krok 2. Dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ zachodzi tożsamość

$$\phi\Big(\frac{x}{2}\Big)\phi\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = \phi(x)\,. \tag{10.25}$$

Aby się o tym przekonać, skorzystamy (dwa razy: dla $t = x$ i $t = 1-x$) ze wzoru Legendre'a:

$$\begin{aligned}
\phi\Big(\frac{x}{2}\Big)\phi\Big(\frac{x+1}{2}\Big) &= \frac{1}{\pi^2}\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{x}{2}\Big)\sin\frac{\pi x}{2} \\
&\qquad \cdot\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1-x}{2}\Big)\sin\frac{\pi(x+1)}{2} \\
&= \frac{1}{\pi^2}\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\cdot\Gamma\Big(\frac{1-x}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{(1-x)+1}{2}\Big)\cdot\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2} \\
&= \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{(1-x)-1}}\Gamma(1-x)\cdot\frac{1}{2}\sin\pi x \\
&= \frac{1}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x \\
&= \phi(x)\,.
\end{aligned}$$

Krok 3. Istnieje granica

$$\lim_{x\to 0}\phi(x) = 1\,. \tag{10.26}$$

Istotnie,

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x = x\Gamma(x)\Gamma(1-x)\cdot\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\cdot\frac{\sin\pi x}{\pi x}\,.$$

Wiemy jednak, że Γ jest ciągła w 1, $\Gamma(1) = 1$ i $(\sin y)/y \to 1$ dla $y \to 0$. Stąd już wynika równość (10.26).

Krok 4. Funkcję ϕ można przedłużyć do dodatniej funkcji klasy $C^1(\mathbb{R})$, mającej okres 1. Będziemy tę funkcję oznaczać nadal tą samą literą.

Wystarczy po prostu przyjąć

$$\phi(k) = \lim_{x\to k}\phi(x), \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Z okresowości ϕ na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ oraz (10.26) wynika, że ta granica istnieje i jest równa 1 dla każdego $k \in \mathbb{Z}$. Otrzymana funkcja jest różniczkowalna w punktach $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, a jej pochodna ϕ' jest na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ciągła, gdyż $\Gamma(x)$ i $\Gamma(1-x)$ są na tym zbiorze różniczkowalne w sposób ciągły. Ciągłość ϕ w punktach $\mathbb{Z}$ i jej okresowość na $\mathbb{R}$ wynika wprost z definicji.

Pozostaje sprawdzić istnienie i ciągłość ϕ' w punktach całkowitych. Korzystając (jak wyżej) z tożsamości $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, a następnie rozwijając w szereg potęgowy funkcję $(\phi x)^{-1}\sin \pi x$, piszemy

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x = \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\cdot \frac{\sin \pi x}{\pi x} \\ &= \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\cdot\left(1 - \frac{\pi^2x^2}{3!} + \frac{\pi^4x^4}{5!} - \cdots\right) \end{aligned} \tag{10.27}$$

Ostatni wzór ma sens dla wszystkich $x \in (-1,1)$. Każdy z trzech czynników prawej strony jest na tym przedziale funkcją różniczkowalną w sposób ciągły (korzystamy z własności Γ i z twierdzenia o pochodnej sumy szeregu potęgowego). Dlatego $\phi'(0)$ istnieje i ϕ' jest ciągła w zerze. Dzięki okresowości, $\phi' \in C(\mathbb{R})$.

Krok 5. Jest $\phi'(0) = 0$. Istotnie, różniczkując prawą stronę wzoru (10.27), otrzymujemy ze wzoru na pochodną iloczynu

$$\phi'(0) = \Gamma'(1)\cdot\Gamma(1)\cdot 1 - \Gamma(1)\cdot\Gamma'(1)\cdot 1 + \Gamma(1)^2\cdot 0 = 0\,.$$

(pochodna szeregu potęgowego w (10.27) znika w zerze, gdyż nie ma wyrazu liniowego).

Krok 6. Wykażemy, że

$$L(x) = (\ln\phi(x))', \qquad x\in\mathbb{R}$$

jest funkcją stałą, równą zero.

Funkcja L ma okres 1 i jest ciągła. Osiąga zatem swój kres górny

$$M = \sup_{\mathbb{R}} L = \sup_{[0,1]} L = L(a)$$

w pewnym punkcie $a \in [0,1]$. Z (10.25) po zlogarytmowaniu, a następnie po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\ln\phi\Big(\frac{x}{2}\Big) + \ln\phi\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = \ln\phi(x)\,, \qquad \frac12 L\Big(\frac{x}{2}\Big) + \frac12 \ln L\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = L(x)\,.$$

Zatem

$$M = \sup L = L(a) = \frac12 L\Big(\frac{a}{2}\Big) + \frac12 \ln L\Big(\frac{a+1}{2}\Big) \le \frac12 M + \frac12 M = M\,.$$

Nierówność oczywiście nie może być ostra. Dlatego, w szczególności, $L(a/2) = M$. Przez indukcję $L(a/2^n) = M$. Stąd

$$L(0) = \lim_{n\to\infty} L\Big(\frac{a}{2^n}\Big) = M\,.$$

Z drugiej strony,

$$L(0) = (\ln\phi(x))'\Big|_{x=0} = \frac{\phi'(0)}{\phi(0)} = \phi'(0) = 0\,.$$

Przeto, $M = \sup L = 0$.

W pełni analogiczne rozumowanie pozwala sprawdzić, że $m = \inf L = 0$. Dlatego $L(x) = (\ln\phi(x))' \equiv 0$, tzn. $\ln\phi(x) \equiv \mathrm{const} = \ln\phi(1) = \ln 1 = 0$. Stąd już $\phi \equiv 1$. $\square$

Wniosek 10.45. *Dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ zachodzi wzór*

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}\,. \tag{10.28}$$

Dowód. Sprawdziliśmy, że

$$\phi(x) := \frac{1}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x \equiv 1 \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Stąd i z równości $x\Gamma(x) = \Gamma(1+x)$ dla $x \notin \mathbb{Z}$ wynika teza wniosku. □

Uwaga. Wzór (10.28) ma sens także w punktach $x \in \mathbb{Z}$. Wystarczy umówić się, że $\Gamma = \infty$ w punktach $\{0, -1, -2, \ldots\}$ i $1/\infty = 0$. Co więcej, można sprawdzić (co wykracza poza ramy tego wykładu) że przy takiej umowie obie strony mają sens dla wszystkich punktów płaszczyzny zespolonej i są funkcjami analitycznymi zmiennej zespolonej na całej płaszczyźnie.

Wniosek 10.46. *Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór*

$$\sin \pi x \;=\; \pi x \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \Bigl(1 - \frac{x^2}{k^2}\Bigr)\pi x \;=\; \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{x^2}{k^2}\Bigr)\,. \tag{10.29}$$

Mówiąc nieformalnie, powyższy wzór pozwala patrzeć na funkcję $\sin \pi x$ tak, jakby była wielomianem o nieskończonej liczbie miejsc zerowych w punktach całkowitych, równym (nieskończonemu) iloczynowi czynników $1 \pm \frac{x}{k}$ (znikających w punktach $x = \mp k$, $k \in \mathbb{N}$) oraz czynnika πx. Podobne przedstawienia funkcji w postaci iloczynów nieskończonych, zawierających czynniki liniowe, znikające tam, gdzie dana funkcja ma zera, odgrywają ważną rolę w analizie zespolonej.

Dowód Wniosku 10.46 pozostawimy jako zadanie, łatwe przy obecnej wiedzy Czytelnika. Trzeba skorzystać ze wzoru na dopełnienie podanego w poprzednim wniosku i wyrazić funkcję $1/\Gamma(t)$ wzorem iloczynowym Weierstrassa 10.22, biorąc $t = 1 \pm x$.

Przykład 10.47. Sprawdzimy po raz trzeci, że $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Ze wzoru (10.28) i własności $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ łatwo otrzymujemy

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\,.$$

Dla $x = 1/2$ dostajemy stąd $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. □

10.4 Rozwinięcie cotangensa w szereg ułamków prostych

Z rozważań poprzedniego rozdziału wyprowadzimy teraz tożsamość, jaką spełnia funkcja $\operatorname{ctg} \pi x$ w punktach $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, a następnie zastosujemy tę tożsamość do obliczenia sum szeregów

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Twierdzenie 10.48. *Dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ zachodzi równość*

$$\pi \operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) . \tag{10.30}$$

Dowód. Niech $M > 0$. Mamy

$$\left| \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right| = \left| \frac{2x}{x^2 - n^2} \right| \le \frac{4M}{n^2} \qquad \text{dla } |x| \le M,\ n^2 > 2M^2 \ge 2|x|^2. \tag{10.31}$$

Dlatego na zbiorze $[-M, M] \setminus \mathbb{Z}$ szereg w (10.30) określa funkcję ciągłą (korzystamy z kryterium Weierstrassa). Z dowolności M wynika, że wzór (10.30) ma sens na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Oznaczmy

$$S_N(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) , \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} .$$

Nietrudno sprawdzić, że dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ jest

$$\begin{aligned} S_N(x+1) &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)+N} + \frac{1}{(x+1)+N-1} + \cdots + \frac{1}{(x+1)+1} \\ &\qquad + \frac{1}{(x+1)-1} + \frac{1}{(x+1)-2} + \cdots + \frac{1}{(x+1)-N} \\ &= S_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N+1} + \frac{1}{x+N} . \end{aligned}$$

Dlatego $\lim_N S_N(x+1) = \lim_N S_{N-1}(x) = \lim_N S_N(x)$. Prawa strona (10.30) jest więc na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ funkcją okresową o okresie 1. Lewa strona (10.30) też ma tę własność. Dlatego wystarczy sprawdzić równość z tezy dla $x \in (0, 1)$.

Wobec Wniosku 10.46 i nierówności $\sin \pi x > 0$, która zachodzi dla $x \in (0, 1)$, możemy dla takich x napisać

$$\ln \sin \pi x = \ln \pi + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) + \ln \left(1 - \frac{x}{k}\right) \right) .$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny.[2] Pochodna lewej strony jest równa $\pi \operatorname{ctg} \pi x$. Różniczkując prawą stronę wyraz po wyrazie, otrzymujemy

$$\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k} \right) .$$

Korzystając z wykazanej wcześniej jednostajnej zbieżności tego szeregu oraz twierdzenia o różniczkowaniu ciągów i szeregów funkcyjnych, kończymy dowód. □

Przykład 10.49 (liczby Bernoullego i wartości funkcji dzeta Riemanna). Opierając się na Twierdzeniu 10.48, można wyznaczyć liczby

$$\zeta(2m) = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \cdots , \qquad m = 1, 2, \ldots ,$$

[2] Można to sprawdzić bezpośrednio, ale można też po prostu odwołać się do udowodnionego już Wniosku 10.46 i ciągłości logarytmu naturalnego.

tzn. wartości w liczbach naturalnych parzystych funkcji *dzeta Riemanna*, wspomnianej przelotnie w Przykładzie 4.21.

Trzeba w tym celu dwoma sposobami rozwinąć funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \pi x \operatorname{ctg} \pi x, & x \in (-1,1),\ x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

w szereg potęgowy wokół zera i porównać otrzymane współczynniki. (Zauważmy, że f jest ciągła w zerze).

Posługując się Twierdzeniem 10.48, wzorem na sumę szeregu geometrycznego i Lematem 8.20 o zmianie kolejności sumowania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \pi x \operatorname{ctg} \pi x &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x+n} + \frac{x}{x-n} \right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{1}{\bigl(1 - (x^2/n^2)\bigr)} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2} \right)^k \\ &= 1 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \ = \ 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} x^{2m} \zeta(2m)\,. \end{aligned} \tag{10.32}$$

(przechodząc do ostatniej linijki, zmieniliśmy kolejność sumowania, a następnie wprowadziliśmy nowy indeks $m = k + 1 = 1, 2, \ldots$).

Aby uzyskać rozwinięcie f w szereg inną metodą, wykorzystamy wiedzę o funkcjach trygonometrycznych i funkcji wykładniczej, oraz ich związek, określony w Definicji 4.58. Otóż,

$$\begin{aligned} \pi x \operatorname{ctg} \pi x = \pi x \cdot \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} &\overset{\text{Def. 4.58}}{=} i\pi x \cdot \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \qquad (\text{niech } z = 2\pi i x) \\ &= \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \\ &= \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} \ = \ \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}\,. \end{aligned} \tag{10.33}$$

Zauważmy, że funkcja

$$g(z) = f\Bigl(\frac{z}{2i}\Bigr) - \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z - 1}$$

jest dobrze określona na zbiorze $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 2\pi\}$. To wynika z faktu, że f nie ma osobliwości w zerze, a funkcja wykładnicza przyjmuje wartość 1 tylko w punktach $z = 2\pi i k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (patrz Wniosek 4.72).

Sprawdzimy teraz, że

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m=2}^{\infty} b_m z^m, \tag{10.34}$$

gdzie współczynniki b_m spełniają zależność

$$\sum_{m=0}^{N} \frac{b_m}{(N+1-m)!} = \begin{cases} 1, & N=0, \\ 0, & N=1,2,\ldots \end{cases} \tag{10.35}$$

Istotnie, pierwsza równość (10.34) jest równoważna innej,

$$\begin{aligned} 1 = \frac{e^z-1}{z} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m\right) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{N} \frac{b_m}{(N-m+1)!}\right) z^N . \end{aligned}$$

Przechodząc do drugiej linii, wypisaliśmy iloczyn Cauchy'ego dwóch szeregów. Równość (10.35) wynika z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy i porównania współczynników. Wypada się tylko upewnić, że szereg potęgowy $\sum b_m z^m$ ma dodatni promień zbieżności.[3] Jednak z (10.35) otrzymujemy $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, a następnie

$$b_N = -\frac{b_{N-1}}{2!} - \frac{b_{N-2}}{3!} - \cdots - \frac{b_0}{(N+1)!} .$$

Łatwo wykazać przez indukcję, że $|b_N| \le 1$. Istotnie, dla $N = 0, 1$ teza zachodzi, a z nierówności trójkąta i założenia indukcyjnego $|b_k| \le 1$ dla $k = 0, 1, \ldots, N-1$ otrzymujemy

$$|b_N| \le \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(N+1)!} < e - 2 < 1 .$$

Zatem promień R zbieżności szeregu, występującego we wzorze (10.34), spełnia zależność $R^{-1} = \limsup_{N\to\infty} \sqrt[N]{|b_N|} \le 1$, tzn. $R \ge 1$. Podstawiając rozwinięcie (10.34) do wzoru (10.33), otrzymujemy

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} b_m (2\pi i x)^m .$$

Jednak lewa strona jest parzystą funkcją zmiennej $x \in (-1, 1)$. Dlatego $b_{2s+1} = 0$ dla wszystkich $s \in \mathbb{N}$ (pochodne nieparzystego rzędu funkcji parzystej są funkcjami nieparzystymi, a więc znikają w zerze). Możemy zatem napisać

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} (2\pi)^{2m} (-1)^m x^{2m} = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}(2\pi)^{2m}}{2 \cdot (2m)!} (-1)^{m+1} x^{2m} , \tag{10.36}$$

gdzie

$$B_k = k!\, b_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.37}$$

Liczby B_k nazywają się *liczbami Bernoullego*. Można je wyznaczać rekurencyjnie, korzystając z zależności (10.35). Porównując prawe strony wzorów (10.32) i (10.36), otrzymujemy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}(2\pi)^{2m}}{2 \cdot (2m)!} (-1)^{m+1} x^{2m} = \sum_{m=1}^{\infty} \zeta(2m) x^{2m} .$$

[3] To wynika z ogólnego twierdzenia, orzekającego, że jeśli g jest nieznikającą funkcją analityczną zmiennej rzeczywistej lub zestolonej, to $1/g$ też jest funkcją analityczną. Nie dowodziliśmy jednak tego twierdzenia. Dlatego wskażemy prosty argument, dostosowany do rozważanego przypadku.

n	B_n	n	B_n	n	B_n
2	$\frac{1}{6}$	18	$\frac{43\,867}{798}$	34	$\frac{2\,577\,687\,858\,367}{6}$
4	$-\frac{1}{30}$	20	$-\frac{174\,611}{330}$	36	$-\frac{26\,315\,271\,553\,053\,477\,373}{1\,919\,190}$
6	$\frac{1}{42}$	22	$\frac{854\,513}{138}$	38	$\frac{2\,929\,993\,913\,841\,559}{6}$
8	$-\frac{1}{30}$	24	$-\frac{236\,364\,091}{2730}$	40	$-\frac{261\,082\,718\,496\,449\,122\,051}{13\,530}$
10	$\frac{5}{66}$	26	$\frac{8\,553\,103}{6}$	42	$\frac{1\,520\,097\,643\,918\,070\,802\,691}{1806}$
12	$-\frac{691}{2730}$	28	$-\frac{23\,749\,461\,029}{870}$	44	$-\frac{27\,833\,269\,579\,301\,024\,235\,023}{690}$
14	$\frac{7}{6}$	30	$\frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322}$	46	$\frac{596\,451\,111\,593\,912\,163\,277\,961}{282}$
16	$-\frac{3617}{510}$	32	$-\frac{7\,709\,321\,041\,217}{510}$	48	$-\frac{5\,609\,403\,368\,997\,817\,686\,249\,127\,547}{46\,410}$

Liczby $B_2, B_4, \ldots, B_{48}$. Tabelkę wykonano w programie Mathematica, korzystając z wbudowanej funkcji `BernoulliB[ ·]`.

Oba szeregi mają dodatni promień zbieżności; wobec jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy,

$$\zeta(2m) = \frac{B_{2m}(2\pi)^{2m}}{2\cdot(2m)!}(-1)^{m+1}\,, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{10.38}$$

Ten wzór znał około 1750 roku Leonard Euler. Wyznaczył zeń wartości $\zeta(2m)$ dla $1 \le m \le 15$, obliczając odpowiednie liczby Bernoullego. My zauważmy, że

$$b_2 = -\frac{b_1}{2} - \frac{b_0}{3!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,, \qquad B_2 = 2!\,b_2 = \frac{1}{6}\,,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{B_2(2\pi)^2}{2\cdot 2!} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Jest także

$$b_4 = -\underbrace{\frac{b_3}{2!}}_{=0} - \frac{b_2}{3!} - \frac{b_1}{4!} - \frac{b_0}{5!} = -\frac{1}{72} + \frac{1}{48} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}\,, \qquad B_4 = -\frac{1}{30}\,,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \zeta(4) = -\frac{B_4(2\pi)^4}{2\cdot 4!} = \frac{16\pi^4}{30\cdot 2\cdot 24} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

Na tych dwóch wzorach poprzestaniemy, zamieszczając tabelkę z wartościami B_{2k} dla $2k \le 48$, którą program Mathematica produkuje, zużywając około 10^{-4} sekundy.

Warto podkreślić, że o liczbach $\zeta(2m+1)$ wiadomo znacznie mniej. Dopiero w 1978 roku niewymierność $\zeta(3)$ wykazał Roger Apéry. Wśród liczb $\zeta(2m+1)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, jest nieskończenie wiele liczb niewymiernych, ale tożsamości podobne do (10.38) nie są znane.