Rozdział 2

Ciągi. Pojęcie granicy ciągu.

Definicja 2.1. Ciąg jest to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych.

Będziemy rozważać ciągi o wyrazach rzeczywistych, czyli – zgodnie z powyższą definicją – funkcje $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wartości takiej funkcji w kolejnych liczbach naturalnych nazywa się *wyrazami ciągu* i oznacza

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots$$

Zarówno na wykładzie, jak i na ćwiczeniach spotkamy wielokrotnie ciągi zdefiniowane w różny sposób: przez podanie ogólnego wzoru na n-ty wyraz, np. $a_n = 1/n$ dla $n \in \mathbb{N}$, albo przez określenie rekurencyjnej reguły, która pozwala obliczyć następny wyraz ciągu, gdy znane są wyrazy o wcześniejszych numerach, np.

$$F_1 = F_2 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

(nawiasem: ciąg (F_n) nazywa się ciągiem Fibonacci'ego).

Ciągi służą matematykowi m.in. do tego, żeby nowe, nieznane jeszcze liczby rzeczywiste *przybliżać* liczbami prostszymi, już oswojonymi – np. liczbami wymiernymi. Bywa i na odwrót: znamy jakiś ciąg liczb, wyrażony skomplikowanym wzorem lub regułą, a chcemy powiedzieć coś względnie prostego i jasnego o zachowaniu dalekich wyrazów ciągu. Aby robić jedno i drugie w sposób możliwie ścisły, wprowadza się fundamentalne w całej Analizie pojęcie *granicy ciągu*. Zanim je wprowadzimy, przypomnijmy definicję wartości bezwzględnej.

Definicja 2.2 (wartość bezwględna liczby rzeczywistej)**.** Dla $x \in \mathbb{R}$ kładziemy

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0, \\ -x, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Interpretacja wartości bezwzględnej, z którą będziemy nieustannie mieć do czynienia, jest następująca: $|x|$ to odległość liczby (punktu) x od 0 na prostej rzeczywistej, a $|x - a|$ to odległość punktów $x \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$.

Stwierdzenie 2.3 (nierówność trójkąta)**.** *Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{2.1}$$

Dowód. Sprawdzenie przypadków, gdy obie liczby są tego samo znaku lub co najmniej jedna z nich jest zerem, jest łatwe. W nierówności trójkąta zachodzi wtedy równość. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

Pozostaje wykazać nierówność dla $x < 0 < y$ (przypadek $y < 0 < x$ jest w pełni analogiczny, wystarczy zamienić x i y rolami). Prawa strona (2.1), którą oznaczymy P, jest wtedy równa $|x| + |y| = y - x$. Lewa strona, L, jest równa $x + y$ lub $-x - y$.

Jeśli $L = x + y$, to nierówność $L \le P$ jest równoważna temu, że $x + y \le y - x$, czyli temu, że $2x \le 0$, a wiemy, że ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż $x < 0$.

Jeśli natomiast $L = -x - y$, to nierówność $L \le P$ jest równoważna temu, że $-x - y \le y - x$, czyli temu, że $0 \le 2y$, a wiemy, że ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż $y > 0$. $\square$

2.1 Granica ciągu i jej podstawowe własności

Definicja 2.4. Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$ (inaczej: ma granicę $g \in \mathbb{R}$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich numerów $m > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność

$$|a_m - g| < \varepsilon\,.$$

Pozwólmy sobie na nieformalny komentarz. Warunek z definicji należy rozumieć tak: jakkolwiek *małą* liczbę $\varepsilon > 0$ weźmiemy, można będzie wskazać taką liczbę n_ε, odpowiednio dobraną do ε, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych od n_ε będą się różnić od liczby g – *granicy ciągu* – mniej niż o ε. Mówiąc inaczej, liczba ε określa żądany poziom dokładności przybliżenia $a_m \approx g$, natomiast n_ε wskazuje moment, od którego jesteśmy w stanie taką dokładność zapewnić.

Oznaczenia i terminologia. Ciąg, który ma granicę, nazywa się *zbieżny*. Ciąg *rozbieżny* to taki ciąg, który nie ma granicy $g \in \mathbb{R}$. Jeśli (a_n) ma granicę, która jest równa liczbie $g \in \mathbb{R}$, to piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

(skrót lim pochodzi od łacińskiego *limes*), lub czasem po prostu: $a_n \to g$ dla $n \to \infty$. Proszę pamiętać,

Przykład 2.5. Ciąg stały, $a_n = a \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, ma granicę równą a. $\square$

Przykład 2.6. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ ma granicę równą zero, tzn. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Sprawdzimy to, posługując się definicją. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Mamy wskazać n_ε tak, żeby $|a_m - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $m > n_\varepsilon$. Zobaczmy więc, kiedy nierówność $|a_m - g| < \varepsilon$ jest spełniona. Mamy

$$|a_m - g| = \left|\frac{1}{m} - 0\right| = \frac{1}{m} < \varepsilon$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $m > 1/\varepsilon$. Można więc wybrać np. $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > 1/\varepsilon$; wtedy dla $m > n_\varepsilon$ jest $m > 1/\varepsilon$, a więc $\frac{1}{m} = |a_m - g| < \varepsilon$, zgodnie z warunkiem podanym w definicji granicy.

Uwaga (banalna, ale nie pozbawiona pewnego sensu). W tym przykładzie równie dobrze moglibyśmy użyć jako n_ε *dowolnej* liczby naturalnej większej od $1/\varepsilon$, np. wziąć

$$n'_\varepsilon = \left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 7\right)^3 + 2010^{2010}\,.$$

Z implikacji $m > n'_\varepsilon$ wynika przecież, że $m > 1/\varepsilon$, a więc $\frac{1}{m} = |a_m - g| < \varepsilon$. W definicji granicy *nie ma mowy o tym, że powinniśmy liczbę* n_ε *wybrać najlepiej, jak tylko się da.*

Spójrzmy teraz na kolejny przykład, gdzie powyższa banalna uwaga ma pewne znaczenie.

Przykład 2.7. Niech $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Wykażemy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

Postępujemy podobnie, jak w poprzednim przykładzie. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Warunek

$$|a_m - g| = \left|\frac{1}{m!} - 0\right| = \frac{1}{m!} < \varepsilon$$

jest równoważny innemu, $m! > 1/\varepsilon$. W przeciwieństwie do poprzedniego przykładu, tej nierówności nie potrafimy łatwo *rozwiązać*, tzn. wyznaczyć wszystkich liczb m, które ją spełniają. Możemy jednak skorzystać z oczywistej nierówności $m! \geq m$ i zauważyć, że jeśli $m > n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, to

$$m! \geq m > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

a zatem warunek $|a_m - g| < \varepsilon$ jest spełniony. Zatem, wprost z definicji $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

W obu powyższych przykładach było rzeczą względnie jasną, jaka liczba powinna być granicą ciągu. Nie zawsze tak jest.

Przykład 2.8. Znajdziemy granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{n}$. Ktoś, kto nie dowiedział się wcześniej, że jest to ciąg zbieżny, ma prawo tego nie wiedzieć; ma także prawo mieć wątpliwość: *jaka właściwie liczba powinna być granicą tego ciągu?*

Aby wskazać możliwą odpowiedź na to pytanie, użyjemy brutalnej siły, tzn. przyjrzymy się odpowiednio dużej liczbie wyrazów ciągu. Odpowiedni eksperyment można przeprowadzić z użyciem dowolnego pakietu do obliczeń symbolicznych, np. pakietu *Mathematica*, dostępnego dla każdego użytkownika w laboratorium komputerowym Wydziału MIM. Krótki program

```
Do[Print[{n, N[n^{1/n}, 8]}], {n, 1, 10000}]
```

pozwala wypisać przybliżone wartości wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_{10000}$ z dokładnością do 8 miejsc znaczących. Jego wykonanie nie trwa szczególnie długo. Oględziny wyników eksperymentu wskazują, że

$$a_2 = 1{,}414\ldots, \quad a_3 = 1{,}442\ldots, \quad a_4 = a_2, \quad a_5 < a_4,$$
$$a_{10} = 1{,}258\ldots, \quad a_{100} = 1{,}047\ldots, \quad a_{1000} = 1{,}0069\ldots, \quad a_{10000} = 1{,}0009\ldots\,.$$

Naturalna, nawet temu, kto wątpi, że programy komputerowe robią naprawdę to, co im każemy, wydaje się więc hipoteza: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Aby sprawdzić, że tak rzeczywiście jest, oznaczymy różnicę $\sqrt[n]{n} - 1$ symbolem δ_n. Użyjemy *dwumianu Newtona*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n\,,$$

gdzie tzw. *symbol Newtona* dany jest wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(Umowa: $0! = 1$.) Podstawiając $a = 1$ i $b = \delta_n$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1+\delta_n)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\delta_n + \binom{n}{2}\delta_n^2 + [\text{cała reszta składników}] \\ &= 1 + n\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 + \cdots \end{aligned}$$

Stąd $n > \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2$ dla $n > 1$, gdyż suma składników dodatnich jest większa od każdego z nich; równoważnie,

$$\delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \qquad \text{dla } n > 1. \tag{2.2}$$

Ponieważ w tym przykładzie $|a_n - g| = |\sqrt[n]{n} - 1| = \delta_n$, więc wystarczy sprawdzić, dla jakich n zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon\,.$$

Nietrudno się przekonać, że spełniają ją wszystkie liczby $n > 1+(2/\varepsilon^2)$. Zatem, dla wszystkich $n > n_\varepsilon := 2 + [2/\varepsilon^2]$ mamy

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = \delta_n \overset{(2.2)}{<} \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon,$$

a to, zgodnie z definicją granicy, oznacza, że $\sqrt[n]{n} \to 1$ dla $n \to \infty$. $\square$

Przykład 2.9. Ciąg $a_n = (-1)^n$, czyli ciąg liczb $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ jest rozbieżny. Gdyby liczba $g \in \mathbb{R}$ była jego granicą, to biorąc w warunku z definicji granicy $\varepsilon = 1/2$ otrzymalibyśmy

$$g - \frac{1}{2} < a_n < g + \frac{1}{2} \qquad \text{dla wszystkich } n > n_\varepsilon = n_{1/2}.$$

To jednak jest niemożliwe: przedział $(g - 1/2, g + 1/2)$ ma długość 1, więc punkty 1 i -1 (odległe o 2) nie mogą do niego jednocześnie należeć, niezależnie od tego, jaką weźmiemy liczbę g.

Podobnie pokazuje się, że jeśli $a \neq b$, to ciąg $a, b, a, b, a, b, \dots$ jest rozbieżny. $\square$

Posługiwanie się bezpośrednio definicją granicy ciągu za każdym razem, gdy chcemy wykazać, że jakiś ciąg jest zbieżny, i obliczyć jego granicę, byłoby rzeczą niewygodną. Bardzo pożyteczne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.10 (arytmetyczne własności granicy)**.** *Załóżmy, że ciągi liczb rzeczywistych (a_n) i (b_n) są zbieżne odpowiednio do a i b, tzn.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b, \tag{2.3}$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = a-b, \tag{2.4}$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = ab. \tag{2.5}$$

Ponadto, jeśli $b\neq 0$ *i* $b_n\neq 0$ *dla wszystkich* $n\in\mathbb{N}$*, to*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}\,. \tag{2.6}$$

Dowód tego nietrudnego, ale ważnego twierdzenia wygodnie będzie poprzedzić pewnym przygotowaniem.

Definicja 2.11. Ciąg (a_n) nazywa się *ograniczony* wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $A=\{a_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ jest ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}$.

Analogicznie definiuje się ciągi ograniczone *z góry* i *z dołu*. Nietrudno zobaczyć, że np. ciąg $a_n=n^2$ nie jest ograniczony z góry, choć jest ograniczony z dołu. Ciąg $a_n=(-1)^n n$ nie jest ograniczony ani z góry, ani z dołu.

Stwierdzenie 2.12. *Każdy zbieżny ciąg liczb rzeczywistych jest ograniczony.*

Dowód. Niech $a_n\to g$ dla $n\to\infty$. Weźmy w definicji granicy $\varepsilon=1$. Istnieje taka liczba n_1, że

$$g-1<a_n<g+1 \qquad \text{dla wszystkich } n>n_1. \tag{2.7}$$

Połóżmy teraz

$$M=\max(g+1,\max(a_1,\ldots,a_{n_1}))\,,\qquad m=\min(g-1,\min(a_1,\ldots,a_{n_1}))\,,$$

gdzie symbol $\max(x_1,\ldots,x_m)$ oznacza największą z liczb rzeczywistych $x_1,\ldots,x_m$, a symbol $\min(x_1,\ldots,x_m)$ – najmniejszą z tych liczb. Nietrudno zobaczyć, że $m\le a_n\le M$ dla wszystkich $n\in M$. Dla $n>n_1$ wynika to z doboru n_1, tzn. z warunku (2.7), i z nierówności

$$m\le g-1\le g+1\le M$$

Dla $n\le n_1$ nierówność $m\le a_n\le M$ wynika wprost z definicji liczb m, M. $\square$

Stwierdzenie 2.13 (o szacowaniu granic)**.** *Załóżmy, że* (a_n) *i* (b_n) *są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych. Zachodzą wtedy następujące implikacje:*

(i) Jeśli $\lim_{n\to\infty}a_n>a$*, to istnieje takie* $n_1\in\mathbb{N}$*, że* $a_n>a$ *dla wszystkich* $n>n_1$*.*

(ii) Jeśli $\lim_{n\to\infty}b_n<b$*, to istnieje takie* $n_1\in\mathbb{N}$*, że* $b_n<b$ *dla wszystkich* $n>n_1$*.*

(iii) Jeśli $\lim_{n\to\infty}a_n>\lim_{n\to\infty}b_n$*, to istnieje takie* $n_1\in\mathbb{N}$*, że* $a_n>b_n$ *dla wszystkich* $n>n_1$*.*

(iv) Jeśli istnieje takie $n_1\in\mathbb{N}$*, że* $a_n\le b_n$ *dla wszystkich* $n>n_1$*, to wówczas*

$$\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n$$

Dowód. Zacznijmy od własności (i). Biorąc w definicji granicy $\varepsilon = \lim_{n\to\infty} a_n - a > 0$, a następnie dobierając doń n_ε, otrzymujemy

$$a_n > \lim_{n\to\infty} a_n - \varepsilon = \lim_{n\to\infty} a_n - (\lim_{n\to\infty} a_n - a) = a \quad \text{dla wszystkich } n_\varepsilon.$$

Dowód własności (ii) jest analogiczny; Czytelnik może przeprowadzić go samodzielnie, lub skorzystać z własności

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (-b_n) = (-b),$$

która pozwala wyprowadzić (ii) z udowodnionej już (i).

Aby sprawdzić (iii), bierzemy dowolną liczbę rzeczywistą x taką, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n > x > \lim_{n\to\infty} b_n$$

Istnieje wtedy takie n_1, że $a_n > x$ dla wszystkich $n > n_1$; to wynika z punktu (i). Podobnie, istnieje wtedy takie n_2, że $x > b_n$ dla wszystkich $n > n_2$; to wynika z punktu (ii). Dla $n > \max(n_1, n_2)$ obie nierówności zachodzą jednocześnie, a więc, dzięki przechodniości, $a_n > b_n$.

Wreszcie, własność (iv) wynika z (iii) przez zaprzeczenie. Istotnie, gdyby nie zachodziła teza (iv), to dysponowalibyśmy założeniem (iii), a więc zgodnie z (iii) byłoby $a_n > b_n$ dla wszystkich $n > n_1$, co przeczyłoby założeniu (iv). $\square$

Wróćmy teraz do arytmetycznych własności granicy.

Dowód Twierdzenia 2.10. *1. Granica sumy ciągów.* Ustalmy $\varepsilon > 0$. Korzystając z definicji granicy dla liczby $\varepsilon/2$ (można tak zrobić, bowiem warunek z definicji ma zachodzić dla *każdej* liczby dodatniej, a $\varepsilon/2 > 0$) dobierzmy liczby n_1 i n_2 tak, żeby

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_1, \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_2\,.$$

Wówczas, dla $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$, zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\le |a_n - a| + |b_n - b| \qquad \text{z nierówności trójkąta} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że liczba $g = a + b$ jest granicą ciągu $a_n + b_n$.

Przerwijmy dowód na chwilę i skomentujmy całe rozumowanie.

Komentarz (dla początkujących). Czytelnik, który po raz pierwszy styka się z podobnym dowodem, może zapytać: *skąd było wiadomo, że trzeba skorzystać z definicji granicy ciągu a_n i ciągu b_n, biorąc w nich $\varepsilon/2$ zamiast ε?* Po pierwsze, akurat w tym przypadku rachunki są na tyle krótkie, że można je przemyśleć w pamięci (lub szybko wykonać na brudno) i odgadnąć, że tak będzie wygodnie, bo na końcu otrzymamy wynik ε. Można jednak postąpić inaczej, i to co najmniej na dwa różne sposoby:

1. Użyć obu definicji, biorąc w nich ε, a nie $\varepsilon/2$; otrzymujemy wtedy, dla $n > n_3$,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

ale przecież 2ε *jest* dowolną liczbą dodatnią, więc otrzymaliśmy warunek z definicji granicy, tylko dla liczby o *innej nazwie*.

2. Użyć obu definicji, biorąc w nich ostrożnie $\eta > 0$ zamiast $\varepsilon > 0$, bowiem *a priori* nie mamy pewności, jaki będzie wynik; otrzymujemy wtedy, dla $n > n_3$,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \eta + \eta = 2\eta.$$

Teraz nietrudno już powiedzieć: *niech $\eta = \varepsilon/2$; w dodatku, mogliśmy tak rozumować od samego początku.* W dłuższych dowodach, uzasadniających, że jakaś granica ma tę, a nie inną wartość, taki sposób postępowania bywa wygodny.

2. Granica różnicy ciągów. Postępujemy tak samo, jak w poprzedniej części dowodu. Ustalmy $\varepsilon > 0$; liczby n_1 i n_2 dobierzmy tak, żeby

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_1, \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_2\,.$$

Wówczas, dla $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (a - b)| &= |(a_n - a) + (b - b_n)| \\ &\le |a_n - a| + |b - b_n| \qquad \text{z nierówności trójkąta} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że różnica liczb a i b jest granicą różnicy ciągów a_n i b_n.

3. Granica iloczynu ciągów. Dowód jest podobny do poprzednich, jednak nieco dłuższy. Najpierw trzeba zapisać różnicę $a_nb_n - ab$ tak, żeby zobaczyć wyrażenia $a_n - a$ i $b_n - b$. Oto odpowiedni rachunek

$$\begin{aligned} |a_nb_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\le |b_n|\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| \qquad \text{z nierówności trójkąta} \\ &=: W_n. \end{aligned}$$

Ciąg b_n jest ograniczony, więc istnieje taka *dodatnia* liczba M, że $|b_n| \le M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, dla ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją takie $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, że

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{dla wszystkich } n > n_1, \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a| + 1} \quad \text{dla wszystkich } n > n_2\,.$$

Zatem, dla $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$ możemy oszacować

$$W_n < M\frac{\varepsilon}{2M} + |a|\frac{\varepsilon}{2|a| + 1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

gdyż $|a|/(2|a| + 1) < \frac{1}{2}$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$. Otrzymaliśmy $|a_nb_n - ab| \le W_n < \varepsilon$ dla wszystkich $n > n_3$; dzięki dowolności $\varepsilon > 0$ wynika stąd, że $a_nb_n \to ab$ dla $n \to \infty$.

3. Granica ilorazu ciągów. Wystarczy wykazać, że $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ dla $n \to \infty$, a następnie skorzystać z poprzedniego punktu twierdzenia, gdyż $a_n/b_n = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$.

Ponieważ $b \ne 0$, więc istnieje taki przedział otwarty $(c, d) \subset \mathbb{R}$, że $b \in (c, d)$, ale $0 \notin (c, d)$. Posługując się dwukrotnie Stwierdzeniem 2.13, przekonujemy się, że

$$b_n \in (c, d) \qquad \text{dla wszystkich } n \text{ większych od pewnego } n_1 \in \mathbb{N}.$$

Zatem
$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b|\,|b_n|} \le \frac{|b-b_n|}{\min(|c|,|d|)^2}.$$
Ustalamy teraz $\varepsilon > 0$ i wybieramy liczbę $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, żeby mieć $|b-b_n| \le \varepsilon \min(|c|,|d|)^2$ dla $n > n_2$. Dla $n > \max(n_1, n_2)$ mamy wtedy
$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| < \frac{|b-b_n|}{\min(|c|,|d|)^2} < \varepsilon,$$
czyli istotnie $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ dla $n \to \infty$. Dowód całego twierdzenia jest zakończony. □

Podamy teraz dwa inne twierdzenia. W połączeniu z Twierdzeniem 2.10 tworzą one wygodny zestaw narzędzi do badania zbieżności wielu ciągów o wyrazach rzeczywistych. Zobaczymy też pewne przykłady zastosowań tych twierdzeń.

Oto pierwsze z zapowiedzianych twierdzeń.

Twierdzenie 2.14 (o trzech ciągach)**.** *Załóżmy, że* $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$*, a ponadto*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g$$
i istnieje takie $n_1 \in \mathbb{N}$*, że dla wszystkich* $n > n_1$ *zachodzą nierówności*
$$a_n \le c_n \le b_n\,.$$
Wówczas $\lim_{n\to\infty} c_n = g$.

Dowód. To twierdzenie jest stosunkowo prostym wnioskiem ze Stwierdzenia 2.13. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Ponieważ $g = \lim a_n > g - \varepsilon$, więc istnieje takie $n_2 \in \mathbb{N}$, że $a_n > g - \varepsilon$ dla $n > n_2$. Podobnie, $g = \lim b_n < g + \varepsilon$, więc istnieje takie $n_3 \in \mathbb{N}$, że $b_n < g + \varepsilon$ dla $n > n_3$.

Dla $n > \max(n_1, n_2, n_3)$ możemy skorzystać ze wszystkich nierówności, w których występują a_n, b_n i c_n. Zatem, dla takich n,
$$g - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < g + \varepsilon\,,$$
stąd zaś wynika, że $|c_n - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > \max(n_1, n_2, n_3)$. □

Twierdzenie o trzech ciągach jest bardzo wygodnym narzędziem. Popatrzmy na przykłady jego zastosowań.

Przykład 2.15. Niech $x \in (0,1)$. Obliczymy granicę ciągu $c_n = \sqrt[n]{x}$. Załóżmy najpierw, że $x \ge 1$. Wtedy dla wszystkich $n > n_1 = [x] + 1 > x$ zachodzą nierówności
$$1 \le c_n = \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{n}\,.$$
Wiemy już jednak, że $b_n = \sqrt[n]{n} \to 1$ dla $n \to \infty$, a ciąg stały $a_n \equiv 1$ też ma granicę 1. Zatem, z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1\,. \tag{2.8}$$
Jeśli $x \in (0,1)$, to $\sqrt[n]{x} = 1/\sqrt[n]{y}$ dla $y = 1/x > 1$, a więc wzór (2.8) także zachodzi. □

Przykład 2.16. Niech $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0\,.$$

Ponieważ $|q^n - 0| = |q^n| = \big||q|^n - 0\big|$, więc wystarczy ograniczyć się do przypadku $q \in [0,1)$. Dla $q = 0$ mamy do czynienia z ciągiem stałym, $q^n \equiv 0$; wtedy nie ma czego dowodzić.

Niech więc $q \in (0,1)$; oznaczmy $a = \frac{1}{q} - 1$. Wtedy $a > 0$, $1/q = 1 + a$ i z nierówności Bernoulliego mamy

$$\frac{1}{q^n} = (1+a)^n \ge 1 + na > na \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zatem,

$$0 \longleftarrow \; 0 < q^n < \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n} \; \longrightarrow 0,$$

gdyż $\frac{1}{n} \to 0$, i dla dowolnej liczby rzeczywistej c z twierdzenia o iloczynie granicy ciągów wynika, że $c \cdot \frac{1}{n} \to 0$. Z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy teraz, że $q^n \to 0$ dla $n \to \infty$. $\square$

Przykład 2.17. Wykażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} = 4. \tag{2.9}$$

Wskażemy w tym celu odpowiednie oszacowania $\sqrt[n]{3^n + 4^n}$ z góry i z dołu. Ponieważ $0 < 3^n < 4^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc

$$4 = \sqrt[n]{4^n} < \sqrt[n]{3^n + 4^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{2}\,.$$

Jednak $4\sqrt[n]{2} \to 1$, gdy $n \to \infty$; to wynika z udowodnionego wcześniej wzoru (2.8). Oszacowaliśmy więc $\sqrt[n]{3^n + 4^n}$ z góry i z dołu przez wyrazy ciągów zbieżnych do liczby 4; można zastosować twierdzenie o trzech ciągach i stwierdzić, że wzór (2.9) rzeczywiście zachodzi. $\square$

W istocie, prawdziwy jest wzór nieco ogólniejszy od (2.9).

Przykład 2.18. Jeśli k jest liczbą naturalną i $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k$, to

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n} = x_k\,. \tag{2.10}$$

Istotnie, możemy wypisać oczywiste nierówności

$$x_k = \sqrt[n]{x_k^n} \le \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n} \le \sqrt[n]{k \cdot x_k^n} = x_k\sqrt[n]{k}\,.$$

Wiemy już jednak, że $\sqrt[n]{k} \to 1$, zatem, podobnie jak w poprzednim przykładzie, wzór (2.10) wynika z twierdzenia o trzech ciągach. $\square$

Uważny Czytelnik spostrzegł zapewne, że praktycznie we wszystkich sytuacjach posługiwaliśmy się w istocie prostym wnioskiem z twierdzenia o trzech ciągach.

Wniosek 2.19. *Jeśli* $b \le c_n \le b_n$ *dla wszystkich* $n > n_1$*, a ponadto* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*, to wtedy także* $\lim_{n\to\infty} c_n = b$*.* $\square$

Drugie z zapowiedzianych twierdzeń zasługuje na osobny podrozdział.

2.2 Ciągi monotoniczne.

Definicja 2.20. Ciąg liczb rzeczywistych (a_n) jest:

(i) *malejący*, gdy $a_n > a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;

(ii) *niemalejący*, gdy $a_n \leq a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;

(iii) *rosnący*, gdy $a_n < a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;

(iv) *nierosnący*, gdy $a_n \geq a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.21. Ciąg (a_n) jest monotoniczny, gdy spełnia któryś z warunków (i)–(iv) poprzedniej definicji. Ciąg (a_n) jest ściśle monotoniczny, gdy jest rosnący albo malejący.

Twierdzenie 2.22. *Załóżmy, że ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest niemalejący i ograniczony z góry. Wówczas ciąg (a_n) jest zbieżny. Jego granicą jest liczba*

$$M = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że zbiór wyrazów ciągu, $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, jest ograniczony z góry, więc liczba $M = \sup A \in \mathbb{R}$ istnieje.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $M - \varepsilon < M$, więc $M - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym zbioru A. Zatem, znajdziemy takie n_1, że

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \leq M\,.$$

Ciąg (a_n) jest niemalejący; dlatego $a_m \geq a_{n_1}$ dla wszystkich $m > n_1$. Jednak oczywiście mamy też $a_m \leq M$, gdyż M jest ograniczeniem górnym zbioru wyrazów ciągu. Podsumowując, mamy

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \leq a_m \leq M < M + \varepsilon \qquad \text{dla wszystkich } m > n_1,$$

tzn. $|a_m - M| < \varepsilon$ dla $m > n_1$. Przeto, zgodnie z definicją granicy ciągu, $\lim_{n\to\infty} a_n = M$. □

Ponieważ ciąg (a_n) jest niemalejący wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(-a_n)$ jest nierosnący, a $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -\inf\{(-a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, więc zachodzi oczywiście następujący, bliźniaczy fakt.

Wniosek 2.23. *Załóżmy, że ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest nierosnący i ograniczony z dołu. Wówczas ciąg (a_n) jest zbieżny. Jego granicą jest liczba*

$$M = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Przykład 2.24. Niech $a_1 = \sqrt{6}$ i $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, tzn.

$$a_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}\,, \quad a_3 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \quad a_4 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}, \quad \ldots$$

Sprawdzimy, że ciąg a_n jest rosnący i ograniczony. Niech $x > 0$. Zauważmy, że dla takich x nierówność $\sqrt{x + 6} > x$ jest równoważna innej, $x^2 - x - 6 < 0$. Ponieważ $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$, więc ostatecznie

$$x > 0 \text{ i } \sqrt{x + 6} > x \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0, 3)\,. \tag{2.11}$$

Zauważmy też, że

$$x \in (0,3) \quad \Rightarrow \quad 0 < x+6 < 9 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+6} \in (0,3)\,. \tag{2.12}$$

Wyrazy ciągu a_n są oczywiście dodatnie. Ponieważ $a_1 = \sqrt{6} \in (2,3)$, więc z implikacji (2.12) wynika, na mocy zasady indukcji matematycznej, że $a_n \in (0,3)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$; ciąg (a_n) jest więc ograniczony. Ponadto,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \overset{(2.11)}{>} a_n, \qquad \text{bowiem wiemy już, że } a_n \in (0,3).$$

Zatem ciąg a_n jest rosnący. Z Twierdzenia 2.22 wynika, że istnieje granica tego ciągu.

Nietrudno tę granicę znaleźć: ponieważ

$$a_{n+1}^2 = 6 + a_n,$$

więc z Twierdzenia 2.10 wynika, że $a = \lim a_n$ spełnia równość $a^2 = 6 + a$, a przy tym $a \ge 0$, gdyż $a_n > 0$ dla wszystkich n. Przeto $a = 3$. □

Uwaga. Ostatni fragmemt rozumowania wolno przeprowadzić dopiero wtedy, gdy wiadomo już, że liczba $a = \lim a_n$ *istnieje*. Wcześniej można stąd jedynie wywnioskować, że *jeśli* $a = \lim a_n$ *istnieje i* $a \ge 0$*, to wtedy* $a = 3$.

Przykład 2.25. Niech $a_1 = \sqrt{3}$ i $a_{n+1} = 12 + \frac{a_n}{7}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, mamy $a_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, a także $a_n > 12$ dla wszystkich $n > 1$. Przez indukcję łatwo wykazać, że $a_n < 14$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ (tzn. ciąg a_n jest ograniczony, z dołu przez 0, a z góry przez 14). Zatem,

$$a_{n+1} - a_n = 12 + \frac{a_n}{7} - a_n = 12 - \frac{6a_n}{7} > 12 - \frac{6 \cdot 14}{7} = 0,$$

tzn. ciąg a_n jest rosnący. Z Twierdzenia 2.22 wynika teraz, że istnieje granica $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ tego ciągu. Mamy także $a = 12 + a/7$, stąd zaś $a = 14$.

2.3 Granice niewłaściwe

Wśród wszystkich ciągów rozbieżnych wygodnie jest wyróżnić osobno ciągi *rozbieżne do plus nieskończoności* i ciągi rozbieżne *do minus nieskończoności*

Definicja 2.26. Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych a_n jest rozbieżny do plus nieskończoności, i piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej t istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > t$ dla wszystkich $n > n_1$.

Definicja 2.27. Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych a_n jest rozbieżny do minus nieskończoności, i piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej t istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n < -t$ dla wszystkich $n > n_1$.

Oto proste przykłady: ciąg $a_n = n$ jest rozbieżny do $+\infty$, ciąg $b_n = -n^2$ jest rozbieżny do $-\infty$, natomiast ciąg $c_n = (-1)^n n^2$ jest rozbieżny, ale nie jest rozbieżny ani do $+\infty$, ani do $-\infty$. Czytelnik sam zechce się zastanowić, dlaczego tak jest.

Posługując się pojęciem granicy nieskończonej, łatwo jest podać nieco ogólniejszą wersję Twierdzenia 2.22.

Twierdzenie 2.28. *Każdy ciąg niemalejący $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest albo zbieżny, albo rozbieżny do $+\infty$. Zbieżność (a_n) jest równoważna jego ograniczoności.*

Dowód. Gdy ciąg jest ograniczony, to korzystamy po prostu z Twierdzenia 2.22. Gdy (a_n) jest nieograniczony z góry, to dla każdej liczby $t > 0$ można wskazać takie $n_1 \in \mathbb{N}$, że $a_{n_1} > t$. Dla $m \geq n_1$ mamy $a_m \geq a_{n_1} > t$, gdyż ciąg (a_n) jest niemalejący. Zatem, wprost z definicji, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. $\square$

Można wykazać, że przy naturalnej umowie

$$a + (+\infty) = +\infty \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}, \qquad -(-\infty) = +\infty, \qquad +\infty + \infty = +\infty$$
$$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \quad \text{dla } a > 0, \qquad (+\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$
$$(-\infty) \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \qquad \text{oraz} \qquad \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

twierdzenie o arytmetycznych własnościach granicy (Twierdzenie 2.10) zachodzi także dla granic nieskończonych. Szczegółowe sprawdzenie tego faktu pozostawiamy zainteresowanym Czytelnikom (patrz też przykład, zamieszczony niżej). Nie można go jednak używać w innych przypadkach, tzn. do obliczania granic postaci

$$0 \cdot \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}\,.$$

Ćwiczenie 2.29. Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0, +\infty\}$ podać przykład takich dwóch ciągów x_n, y_n rozbieżnych do $+\infty$, żeby $x_n/y_n \to a$ dla $n \to \infty$.

Przykład 2.30. Załóżmy, że $a_n \to a \in \mathbb{R}$, natomiast $b_n \to +\infty$. Sprawdzimy, że wtedy $a_n + b_n \to +\infty$. Niech $M > 0$ będzie dużą liczbą dodatnią. Dla wszystkich dostatecznie dużych n mamy

$$a_n > a - 1 \qquad \text{oraz} \qquad b_n > M - a + 1\,.$$

(Pierwszą nierówność otrzymujemy, biorąc $\varepsilon = 1$ w definicji granicy ciągu, a drugą – biorąc $t = M - a + 1$ w definicji granicy niewłaściwej). Dodając obie nierówności stronami, sprawdzamy, że dla wszystkich dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $a_n + b_n > M$. $\square$

2.4 Podciągi. Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa.

Definicja 2.31. Jeśli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem, a $k_1, k_2, k_3, \ldots$ rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (y_n), określony wzorem

$$y_n = x_{k_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

nazywamy *podciągiem* ciągu (x_n).

Mówiąc potocznie, chodzi o wybranie nieskończenie wielu wyrazów ciągu, ale bez zmiany kolejności.

Pojęcie podciągu jest ważne m.in. z następującego powodu.

Stwierdzenie 2.32. *Jeśli ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest zbieżny do g, to każdy podciąg ciągu (a_n) też jest zbieżny do g.*

Łatwy dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Lemat 2.33 (W. Sierpiński)**.** *Każdy ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg monotoniczny.*

Co więcej, można wskazać, jak taki podciąg należy wybierać.

Dowód. Połóżmy, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \{a_m \,:\, m \geq n\} = \{a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\}\,.$$

Rozważymy osobno dwa przypadki:

1. W każdym ze zbiorów A_n istnieje element największy.
2. W którymś ze zbiorów A_n nie ma elementu największego.

W pierwszym przypadku z (a_n) można wybrać podciąg nierosnący. Pokażemy, jak to zrobić. Niech a_{k_1} będzie największym elementem A_1. W A_{k_1+1} jest element największy, a_{k_2}; oczywiście $k_2 \geq k_1 + 1 > k_1$, a przy tym $a_{k_2} \leq a_{k_1}$, bo $a_{k_2} \in A_1$, $a_{k_1} = \sup A_1$. Jeśli wyrazy $a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \ldots \geq a_{k_n}$, gdzie $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$, zostały już wybrane, to dobieramy $k_{n+1} \geq k_n + 1$ tak, aby

$$a_{k_{n+1}} := \sup A_m \quad \text{dla } m = k_n + 1\,.$$

Definicja jest poprawna, gdyż w każdym zbiorze A_m istnieje element największy. Mamy, jak w pierwszym kroku rozumowania, $k_{n+1} > k_n$ i $a_{k_{n+1}} \leq a_{k_n}$.

W drugim przypadku można wybrać z (a_n) podciąg rosnący. Przypuśćmy, że w A_m nie ma elementu największego. Bierzemy wtedy $k_1 = m$. Zgodnie z założeniem, istnieje $k_2 > m$ takie, że $a_{k_2} > a_{k_1} = a_m$. Gdyby *dalej*, dla $n > k_2$, nie byłoby już wyrazów większych od a_{k_2}, to wtedy w A_m byłby element największy, wbrew założeniu. Zatem można znaleźć $a_{k_3} > a_{k_2}$, gdzie $k_3 > k_2$. To rozumowanie można powtórzyć dowolnie wiele razy (Czytelnik zechce sam uzupełnić szczegóły). □

Twierdzenie 2.34 (Bolzano–Weierstrassa)**.** *Każdy ciąg ograniczony $(a_n) \subset \mathbb{R}$ zawiera podciąg zbieżny.*

Dowód. Zgodnie z poprzednim lematem, ciąg (a_n) ma podciąg monotoniczny (a_{k_n}). Oczywiście każdy podciąg ciągu ograniczonego jest ograniczony. Z Twierdzenia 2.22 wynika więc, że podciąg (a_{k_n}) jest zbieżny. □

Ponieważ to naprawdę istotne twierdzenie, obejrzyjmy jeszcze jeden dowód.

Dowód drugi. Można bez zmniejszenia ogólności założyć, że $(a_n) \subset [0,1]$ — gdyby tak nie było, możemy rozpatrzeć ciąg $\lambda(a_n + C)$ dla odpowiednio wybranych C oraz λ; jego podciągom zbieżnym odpowiadają zbieżne podciągi ciągu (a_n).

Podzielmy odcinek $[0,1]$ na 10 równych części, o długości $1/10$. W jednej z nich, powiedzmy $[l_1, r_1]$, jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Wybierzmy jeden z nich, a_{k_1}.

Teraz podzielmy odcinek $[l_1, r_1]$ na 10 równych części, o długości $1/10^2$. W jednej z nich, powiedzmy $[l_2, r_2]$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu o numerach większych od k_1; niech a_{k_2} będzie jednym z tych wyrazów.

Przeprowadziwszy m kroków takiego rozumowania, skonstruujemy

- Przedziały domknięte $[0,1] \supset [l_1, r_1] \supset [l_2, r_2] \supset \ldots \supset [l_m, r_m]$ takie, że
$$|l_j - r_j| = \frac{1}{10^j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m,$$
i w każdym z nich jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n);
- Wyrazy a_{k_1}, a_{k_2}, …, a_{k_m} takie, że
$$a_{k_j} \in [l_j, r_j] \quad \text{dla } j = 1, \ldots, m;$$

W $(m+1)$-szym kroku dzielimy odcinek $[l_m, r_m]$ na 10 równych części. W jednej z nich jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu o numerach większych od k_m. Nazywamy tę część $[l_{m+1}, r_{m+1}]$ i wybieramy numer $k_{m+1} = s > k_m$ tak, żeby $a_s \in [l_{m+1}, r_{m+1}]$.

W efekcie otrzymujemy nieskończony, zstępujący ciąg przedziałów $[l_m, r_m]$ i podciąg (a_{k_m}) taki, że $a_{k_m} \in [l_m, r_m]$. Ciąg (l_m) jest niemalejący i ograniczony z góry przez 1, a ciąg (r_m) nierosnący i ograniczony z dołu przez 0, zatem oba są zbieżne. Ponadto,
$$\lim_{m\to\infty} l_m = \lim_{m\to\infty} r_m, \qquad \text{gdyż} \quad r_m - l_m = \frac{1}{10^m} \to 0.$$
Nietrudno wreszcie zauważyć, że
$$\lim_{m\to\infty} l_m = \lim_{m\to\infty} a_{k_m} = \lim_{m\to\infty} r_m$$
– to wynika z twierdzenia o trzech ciągach. □

Uwaga. Czytelnik–koneser zechce zauważyć, że w drugim dowodzie tak naprawdę dobieramy kolejne wyrazy ciągu, próbując stabilizować coraz dłuższe początkowe fragmenty rozwinięć dziesiętnych. Oczywiście, liczbę 10 można zastąpić w rozumowaniu liczbą 2, i nie trzeba od początku zakładać, że wyrazy ciągu są akurat w przedziale jednostkowym, ale wtedy analogia związana z rozwinięciami dziesiętnymi nie jest widoczna.

Wniosek 2.35. *Ciąg ograniczony ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy granice wszystkich jego podciągów są równe.*

Dowód. Jest rzeczą praktycznie oczywistą, że jeśli ciąg a_n ma granicę, to wszystkie jego podciągi są zbieżne do tej samej granicy. Jeśli (a_n) jest rozbieżny (ale ograniczony), to wobec Tw. Bolzano–Weierstrassa ma zbieżny podciąg, $a_{n_k} \to g$. Ponieważ g nie jest granicą ciągu (a_n), to dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$ poza przedziałem $(g - \varepsilon_0, g + \varepsilon_0)$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu; z nich wybieramy inny podciąg zbieżny, którego granica g' – zgodnie ze stwierdzeniem 2.13 – różni się od g co najmniej o ε_0. □

Czasem bywa tak, że umiemy wykazać zbieżność kilku różnych podciągów danego ciągu (np. niektóre są rosnące, a inne malejące, a wszystkie są ograniczone), dobranych tak, że każdy wyraz ciągu należy do jednego z tych podciągów. Wtedy przydaje się następujący prosty fakt.

Stwierdzenie 2.36. *Jeśli ciąg* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *ma* k *różnych podciągów zbieżnych do tej samej granicy* g*, i każdy wyraz ciągu* (a_n) *jest wyrazem któregoś z tych podciągów (tzn. zbiór* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *jest sumą zbiorów wyrazów rozważanych podciągów), to* $a_n \to g$ *dla* $n \to \infty$.

DOWÓD. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wybierzmy liczby $l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N}$ tak, aby spełniony był warunek:

> *Jeśli* a_m *jest wyrazem* j*-tego z rozważanych podciągów (gdzie* $j = 1, \ldots, k$*)*
> *i numer* $m > l_j$*, to* $|a_m - g| < \varepsilon$.

(Innymi słowy, liczbę l_j dobieramy do ε, korzystając ze zbieżności j-tego podciągu). Połóżmy $l_0 = \max(l_1, \ldots, l_k)$. Ponieważ każdy wyraz ciągu (a_n) jest wyrazem któregoś z k rozważanych podciągów, więc dla każdego $m > l_0$ z pewnością $|a_m - g| < \varepsilon$. □

Podamy teraz ważne twierdzenie, które podaje warunek równoważny zbieżności ciągu.

Twierdzenie 2.37 (warunek Cauchy'ego). *Ciąg* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Cauchy'ego:*

(C) Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ *istnieje* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *takie, że dla wszystkich* $m, k > n_\varepsilon$ *zachodzi nierówność* $|a_m - a_k| < \varepsilon$.

DOWÓD. *Część I.* ($\Rightarrow$) Niech $\varepsilon > 0$. Jeśli $g = \lim_{n\to\infty} a_n$, to istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - g| < \varepsilon/2$ dla wszystkich $n > n_\varepsilon$. Weźmy teraz dwie liczby $m, k > n_\varepsilon$. Wówczas

$$|a_m - a_k| = \big|(a_m - g) + (g - a_k)\big| \le |a_m - g| + |a_k - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Zatem ciąg (a_n) spełnia warunek (C) – właśnie pokazaliśmy, jak dobrać n_ε do liczby $\varepsilon > 0$.

Część II. ($\Leftarrow$) Łatwo sprawdzić, że każdy ciąg spełniający (C) jest ograniczony: stosujemy warunek Cauchy'ego dla $\varepsilon = 1$ i widzimy, że dostatecznie duże wyrazy różnią się o mniej niż 1, a więc muszą zawierać się w pewnym przedziale, np. przedziale $(a_{n_1+1} - 1, a_{n_1+1} + 1)$; skończony zbiór wyrazów $a_1, \ldots, a_{n_1}$ też jest ograniczony.

Stosujemy zatem twierdzenie Bolzano–Weierstrassa i wybieramy z (a_n) podciąg $a_{n_k} \to g \in \mathbb{R}$ dla $k \to \infty$. Pokażemy, że g jest granicą *całego* ciągu (a_n). Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje takie $l_1 \in \mathbb{N}$, że

$$|a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{dla } n_k > l_1,$$

a ponadto istnieje takie $l_2 \in \mathbb{N}$,że $|a_m - a_k| < \varepsilon/2$ dla $m, k > l_2$. Niech $l_3 = \max(l_1, l_2)$. Ustalając *jakikolwiek* numer $n_k > l_3 \ge l_1$ i biorąc dowolne $m > l_3 \ge l_2$, możemy oszacować

$$|a_m - g| = |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - g| \le |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

To kończy dowód twierdzenia. □

Warunek Cauchy'ego odgrywa ważną rolę z kilku powodów. Po pierwsze, pozwala stwierdzić zbieżność ciągu bez wskazywania konkretnej granicy, a także pozwala stwierdzić, że jakiś ciąg jest rozbieżny. Proszę zauważyć, że wcześniej, sprawdzając rozbieżność ciągu $a_n = (-1)^n$, sprawdziliśmy tak naprawdę, że warunek Cauchy'ego nie zachodzi dla $\varepsilon = 1$. Po drugie, można posłużyć się warunkiem Cauchy'ego, żeby *skonstruować* liczby rzeczywiste, mając do dyspozycji liczby wymierne; jest to konstrukcja na tyle ogólna, że używa się jej w wielu działach matematyki – do tej sprawy wrócimy jeszcze przy innej okazji.

Stwierdzenie 2.38 (kryterium spełniania warunku Cauchy'ego)**.** *Załóżmy, że* $a_1, a_2, \ldots$ *są dodatnie, a ponadto istnieje taka stała* $C \in \mathbb{R}$*, że*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le C \quad \textit{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Jeśli ciąg $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *spełnia warunek*

$$|x_{n+1} - x_n| \le a_n \qquad \textit{dla dostatecznie dużych } n \in \mathbb{N},$$

to (x_n) *spełnia warunek Cauchy'ego.*

Dowód. Ciąg $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ jest rosnący (bo a_j są dodatnie) i ograniczony z góry przez C. Zatem (s_n) jest zbieżny i spełnia warunek Cauchy'ego.

Niech $m > k$ będą dostatecznie duże. Piszemy, korzystając z nierówności trójkąta, założeń i monotoniczności ciągu s_n,

$$\begin{aligned} |x_m - x_k| &\le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \\ &\le a_{m-1} + a_{m-2} + \cdots + a_k \\ &= s_{m-1} - s_{k-1} = |s_{m-1} - s_{k-1}|\,. \end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Dla wszystkich dostatecznie dużych m, k mamy $|x_m - x_k| \le |s_{m-1} - s_{k-1}| < \varepsilon$, gdyż (s_n) spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem (x_n) też spełnia warunek Cauchy'ego. □

Przykład 2.39. Nietrudno zauważyć, że jeśli dla danego ciągu (x_n) umiemy wskazać taką stałą $M > 0$ i taką liczbę $q \in (0, 1)$, że

$$|x_{n+1} - x_n| \le Mq^n \qquad \text{dla dostatecznie dużych } n \in \mathbb{N},$$

to założenia powyższego stwierdzenia są spełnione. Istotnie, biorąc wtedy $a_n = Mq^n$ mamy

$$s_n = Mq + Mq^2 + \cdots + Mq^n = Mq\frac{1-q^n}{1-q} \le \frac{Mq}{1-q} \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

To wynika ze szkolnego wzoru na sumę skończonego postępu geometrycznego; patrz także Lemat 1.12 i szkic jego dowodu.

Ćwiczenie 2.40 (wzór na sumę szeregu geometrycznego)**.** Proszę *wykazać*, że jeśli $|q| < 1$, to

$$\lim_{n\to\infty} (1 + q + \cdots + q^{n-1}) = \frac{1}{1-q}\,.$$