Rozdział 3

Funkcja wykładnicza i logarytm

Potrafimy już definiować potęgi liczb dodatnich o wykładniku wymiernym: jeśli $a > 0$ i $x = p/q \in \mathbb{Q}$ dla $p, q \in \mathbb{N}$, to naturalnie jest przyjąć

$$a^x = \left(a^{1/q}\right)^p = \underbrace{a^{1/q} \cdot \ldots a^{1/q}}_{p \text{ razy}}, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}\,.$$

Zasadniczym celem tego rozdziału jest wskazanie, jak można określać potęgę a^x liczby $a > 0$ o dowolnym wykładniku rzeczywistym x – także *niewymiernym*, i jak określić logarytm, to znaczy funkcję, która dla danych liczb dodatnich y, a, $a \neq 1$, wskazuje taką liczbę $x \in \mathbb{R}$, że $a^x = y$.

Poznamy przy okazji cały szereg fundamentalnych własności tych funkcji. Jak Czytelnik być może zauważy, w nazwach niektórych z tych własności figurują takie słowa jak *ciągłość* i *różniczkowalność*. Na razie to tylko terminy; pełną treść nadamy im wtedy, gdy zajmiemy się bliżej systematycznym badaniem własności funkcji ciągłych i funkcji różniczkowalnych.

Uwaga. W jednym z późniejszych rozdziałów zajmiemy się wprowadzeniem funkcji wykładniczej w dziedzinie zespolonej. Do tego jednak przyda się nam nieco więcej narzędzi.

3.1 Funkcja wykładnicza

Lemat 3.1 (o ciągach szybko zbieżnych do 1). *Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $na_n \to 0$ dla $n \to \infty$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^n = 1\,.$$

Dowód. Ponieważ $na_n \to 0$, więc $|a_n| \le |na_n| < 1/2$ i $|a_n| < \frac{1}{2} < |1 + a_n|$ dla dostatecznie dużych n; dla takich n skorzystamy dwukrotnie z nierówności Bernoulliego. (Czytelnik zechce sprawdzić, że dzięki poprzedniemu zdaniu wszystkie założenia tej nierówności są spełnione). Po pierwsze,

$$\frac{1}{(1 + a_n)^n} = \left(1 - \frac{a_n}{1 + a_n}\right)^n \ge 1 - \frac{na_n}{1 + a_n}\,.$$

Po drugie,

$$(1+a_n)^n \geq 1+na_n > 0, \qquad \text{więc} \qquad \frac{1}{(1+a_n)^n} \leq \frac{1}{1+na_n}\,.$$

Zatem, dla wszystkich dostatecznie dużych n,

$$1-\frac{na_n}{1+a_n} \leq \frac{1}{(1+a_n)^n} \leq \frac{1}{1+na_n}$$

Ponieważ $na_n \to 0$ (i oczywiście tym bardziej $a_n \to 0$) dla $n \to \infty$, więc teza lematu łatwo wynika z twierdzenia o 3 ciągach. $\square$

Twierdzenie 3.2 (własności funkcji wykładniczej). *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ciąg*

$$a_n(x) = \Bigl(1+\frac{x}{n}\Bigr)^n\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,,$$

jest zbieżny do granicy $a(x) \in \mathbb{R}$, która ma następujące własności:

(E1) $a(x) > 0$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$ *i* $a(0) = 1$*;*

(E2) $a(x)a(y) = a(x+y)$ *dla wszystkich* $x, y \in \mathbb{R}$*;*

(E3) $a(x) \geq 1+x$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$*;*

(E4) ***(Monotoniczność):*** $a(x) > a(y)$ *dla wszystkich* $x > y$*;*

(E5) $a(x) \leq 1/(1-x)$ *dla każdego* $x < 1$*;*

(E6) $|a(x)-1-x| \leq 2|x|^2$ *dla każdego* $|x| \leq \frac{1}{2}$*;*

(E7) ***(Ciągłość):*** *jeśli* $x_n \to x \in \mathbb{R}$*, to* $a(x_n) \to a(x)$*;*

(E8) ***(Różniczkowalność):*** *jeśli* $h_n \to 0$ *i* $h_n \neq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(x+h_n)-a(x)}{h_n} = a(x)$$

Dowód. Plan postępowania jest taki: wykażemy, że granica $a(x)$ ciągu $a_n(x)$ istnieje dla każdego x, a potem stopniowo będziemy dowodzić jej własności.

Krok 1. Najpierw sprawdzimy, że ciąg $a_n(x)$ jest monotoniczny od pewnego miejsca. Ustalmy $x \in \mathbb{R}$. Rozpatrujemy odtąd tylko $n > |x|$; wtedy $(n+x)/n = 1+\frac{x}{n} > 0$ i $a_n(x) > 0$, zatem

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Bigl(1+\dfrac{x}{n+1}\Bigr)^{n+1}}{\Bigl(1+\dfrac{x}{n}\Bigr)^{n+1}} \geq \frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \frac{n}{n+x}\,.$$

Zapiszmy iloraz potęg, występujący w ostatnim wyrażeniu, w postaci $(1+\cdots)^{n+1}$ i skorzystajmy wtedy z nierówności Bernoulliego:

$$\begin{aligned} \frac{\Bigl(1+\dfrac{x}{n+1}\Bigr)^{n+1}}{\Bigl(1+\dfrac{x}{n}\Bigr)^{n+1}} \quad &= \quad \left(\frac{(n+1+x)n}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \quad = \quad \left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \\ &\qquad \text{gdyż } (n+1)(n+x)-x = (n+1+x)n \\ &\geq \quad 1-\frac{x}{(n+x)} = \frac{n}{n+x}\,. \end{aligned}$$

(Dla $x < 0$ oczywiście wolno było nierówność Bernoulli'ego stosować; dla $x \geq 0$ jest $|\frac{x}{(n+1)(n+x)}| \leq \frac{x}{(n+x)} \leq 1$). Zatem istotnie ciąg $a_n(x)$ jest niemalejący dla $n > |x|$.

Krok 2. Niech $x < 0$. Wtedy dla $n > |x|$ zachodzą nierówności

$$0 < 1 + \frac{x}{n} < 1, \qquad 0 < a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < 1,$$

a to znaczy, że ciąg $a_n(x)$ jest ograniczony. Ponieważ jest niemalejący od pewnego miejsca, więc jest zbieżny, a jego granica $a(x) > 0$, bo dzięki monotoniczności $a(x) \geq a_m(x) > 0$ dla $m > |x|$.

Krok 3. Dla $x > 0$ posłużymy się sztuczką. Mianowicie, $1 - \frac{x^2}{n^2} = (1 - \frac{x}{n})(1 + \frac{x}{n})$, a zatem dla $n > |x|$ możemy napisać

$$a_n(x) = \frac{\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n}{a_n(-x)}.$$

Z lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1 wiemy, że licznik jest zbieżny do 1, a z poprzedniego kroku dowodu – że mianownik jest zbieżny do $a(-x) > 0$. Zatem, z twierdzenia o granicy ilorazu ciągów, $a_n(x) \to a(x) = 1/a(-x) > 0$. Dla $x = 0$ oczywiście $a_n(0) \equiv 1 \to 1$. To daje istnienie $a(x)$ dla każdego x i własność (E1).

Krok 4. Teraz udowodnimy, że własności (E2)–(E6) istotnie przysługują $a(x)$.

Z twierdzenia o granicy ilorazu

$$\frac{a(x)a(y)}{a(x+y)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{x+y}{n} + \dfrac{xy}{n^2}\right)^n}{\left(1 + \dfrac{x+y}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \Bigg(1 + \underbrace{\frac{\frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n}}}_{=\text{ (ozn.) } a_n}\Bigg)^n$$

Łatwo zauważyć, że $na_n \to 0$, więc z lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1 otrzymujemy $a(x)a(y)/a(x+y) = 1$, czyli własność (E2).

Ponieważ, dzięki nierówności Bernoulliego, $a_n(x) \geq 1 + x$ dla wszystkich $n > |x|$ i wszystkich $x \in \mathbb{R}$, więc na mocy stwierdzenia o szacowaniu granic także $a(x) \geq 1 + x$. To daje własność (E3).

Sprawdzimy monotoniczność, czyli własność (E4). Niech $x > y$. Korzystając z (E1)–(E3) piszemy

$$a(x) - a(y) \overset{\text{(E2)}}{=} a(y)a(x-y) - a(y) \; = \; a(y)(a(x-y) - 1) \overset{\text{(E1), (E3)}}{\geq} a(y)(x-y) > 0$$

gdyż $a(y) > 0$ i $x - y > 0$. Zatem $a(x) > a(y)$ dla $x > y$.

Własność (E5) łatwo wynika z (E3) i (E2). Istotnie, $a(-x) \geq 1 - x > 0$ dla $x < 1$, a więc dla takich x jest

$$a(x) = \frac{1}{a(-x)} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Aby wykazać (E6), stosujemy dla $|x| \leq 1/2 < 1$ własności (E3) i (E5):

$$0 \overset{\text{(E3)}}{\leq} a(x) - 1 - x \overset{\text{(E5)}}{\leq} \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{1 - 1 + x - x + x^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} \leq 2|x|^2$$

(w ostatniej nierówności używamy warunku $|x| \le \frac{1}{2}$).

Krok 5. Na koniec wykażemy własności (E7) i (E8). Jeśli $x_n \to x$, to wówczas $|x_n - x|^2 < |x_n - x| < 1/2$ dla dostatecznie dużych n, więc oznaczając dla krótkości $r_n = x_n - x$, otrzymujemy z nierówności trójkąta

$$|a(r_n) - 1| \le |a(r_n) - 1 - r_n| + |r_n| \stackrel{\text{(E6)}}{\le} 2r_n^2 + |r_n| \le 3|r_n| = 3|x_n - x|\,.$$

Zatem, posługując się twierdzeniem o 3 ciągach, łatwo wnioskujemy, że $a(x_n - x) = a(r_n) \to 1$ dla $n \to \infty$. Ponadto,

$$0 \le |a(x_n) - a(x)| \stackrel{\text{(E2)}}{=} |a(x)| \cdot |a(x_n - x) - 1|,$$

więc także $a(x_n) \to a(x)$.

Została nam ostatnia własność, (E8). Piszemy

$$\frac{a(x+h_n) - a(x)}{h_n} \stackrel{\text{(E2)}}{=} \frac{a(x)a(h_n) - a(x)}{h_n} = a(x) \cdot \underbrace{\frac{a(h_n) - 1}{h_n}}_{= \text{(ozn.) } U_n} \equiv a(x) \cdot U_n\,.$$

Skoro $h_n \to 0$, to dla dostatecznie dużych n jest $|h_n| < 1/2$ i wtedy

$$0 \le |U_n - 1| = \left|\frac{a(h_n) - 1}{h_n} - 1\right| = \left|\frac{a(h_n) - 1 - h_n}{h_n}\right| \stackrel{\text{(E6)}}{\le} \frac{2|h_n|^2}{|h_n|} = 2|h_n| \to 0,$$

a więc $U_n \to 1$ dla $n \to \infty$. Zatem, $a(x)U_n \to a(x)$ dla $n \to \infty$, a to właśnie należało udowodnić.

Dowód całego twierdzenia jest teraz zakończony. □

Definicja 3.3 (liczba e i funkcja $\exp$)**.** Kładziemy

$$e = a(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045\ldots$$

Dla $x \in \mathbb{R}$ piszemy także $\exp(x) = a(x)$, gdzie $a(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$. Funkcja $\exp$ nazywa się *funkcją wykładniczą* (zmiennej rzeczywistej).

Zatem,

$$e = \exp(1)\,.$$

(Warto zauważyć, że wszystkie przytoczone wyżej cyfry rozwinięcia dziesiętnego e znał Leonhard Euler przed 1750 rokiem!)

Wiemy już o funkcji wykładniczej bardzo wiele. Udowodnimy jeszcze jedną jej własność: każda liczba dodatnia jest wartością tej funkcji.

Stwierdzenie 3.4. *Dla każdego $y > 0$ istnieje dokładnie jedna liczba $x \in \mathbb{R}$ taka, że $y = \exp(x)$.*

Dowód. Wystarczy przeprowadzić dowód dla $y \in (0,1)$, gdyż $1 = \exp(0)$ i jeśli $z > 1$, to $1/z = y \in (0,1)$, więc z równości $y = \exp(x)$ i $\exp(x)\exp(-x) = 1$ wynika, że $\exp(-x) = z$.

Niech przeto $y \in (0,1)$. Połóżmy $A = \{t \in \mathbb{R}\colon \exp(t) \le y\}$. Jeśli $t \ge 0$, to dzięki (E3) jest $\exp(t) \ge 1 + t \ge 1 > y$, a więc $t \notin A$, tzn. $A \subset (-\infty, 0)$. Ponadto, dla $n \in \mathbb{N}$ mamy, z własności (E5) użytej dla $x = -n$,

$$\exp(-n) \le \frac{1}{1+n},$$

a więc $-n \in A$ dla wszystkich n dostatecznie dużych (wystarczy, by $1/(1+n) < \exp(y)$, tzn. aby $n+1 > \exp(-y)$). Zatem zbiór A jest niepusty i ograniczony z góry, a więc istnieje $x = \sup A \in \mathbb{R}$. *A priori*, są trzy możliwości:

$$\exp(x) > y, \qquad \exp(x) < y, \qquad \exp(x) = y\,.$$

Wykażemy, że pierwsze dwie prowadzą do sprzeczności. Przypuśćmy więc, że $\exp(x) < y$. Z własności (E7) wynika, że dla $n \to \infty$ ciąg $\exp(x + \frac{1}{n}) \to \exp(x) < y$, a więc, dzięki Stwierdzeniu 2.13, $\exp(x + \frac{1}{n}) < y$ dla wszystkich dostatecznie dużych n. Innymi słowy, $\sup A = x < x + \frac{1}{n} \in A$, to zaś jest sprzeczność. Nie może więc być $\exp(x) < y$.

Gdyby $\exp(x) > y$, to, podobnie jak przed chwilą, mielibyśmy $\exp(x - \frac{1}{n}) \to \exp(x) > y$, tzn. dla wszystkich dostatecznie dużych n byłoby

$$\exp\bigl(x - \frac{1}{n}\bigr) > y \ge \exp t \qquad \text{dla każdego } t \in A.$$

Z monotoniczności, patrz własność (E4), otrzymalibyśmy $x - \frac{1}{n} > t$ dla każdego $t \in A$, ale $x - \frac{1}{n} < x = \sup A$, więc byłaby to sprzeczność z definicją kresu górnego.

Musi zatem być $\exp(x) = y$. Jednoznaczność wynika z monotoniczności $\exp$. □

Definicja 3.5 (logarytm naturalny)**.** Dla liczby $y > 0$ definiujemy: $\ln y = x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ jest jedyną liczbą taką, że $\exp(x) = y$.

Własności funkcji wykładniczej nietrudno przełożyć na odpowiednie własności logarytmu naturalnego.

Twierdzenie 3.6 (własności logarytmu naturalnego)**.** *Logarytm naturalny $\ln y$ jest określony dla wszystkich liczb $y > 0$ i ma następujące własności:*

(L1) *Dla wszystkich $x, y > 0$ jest $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; $\ln e = 1$ i $\ln 1 = 0$.*

(L2) ***(Monotoniczność logarytmu)*** *Dla wszystkich $y_1 > y_2 > 0$ mamy $\ln y_1 > \ln y_2$.*

(L3) *Dla wszystkich $y > 0$ zachodzą nierówności*

$$1 - \frac{1}{y} \le \ln y \le y - 1\,.$$

Równoważnie,

$$\frac{t}{t+1} \le \ln(1+t) \le t \qquad \text{dla wszystkich } t > -1.$$

(L4) *Jeśli $t_n > -1$ dla wszystkich $n \in N$ i $t_n \to 0$, to $\ln(1+t_n) \to 0 = \ln 1$.*

(L5) ***(Ciągłość logarytmu)*** *Jeśli $y_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $y_n \to y > 0$ dla $n \to \infty$, to wówczas $\ln y_n \to \ln y$ dla $n \to \infty$.*

(L6) ***(Różniczkowalność logarytmu)*** *Jeśli $h_n \to 0$ dla $n \to \infty$, a także $y > 0$ i $y+h_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(y+h_n) - \ln y}{h_n} = \frac{1}{y}\,.$$

Dowód. Udowodnimy (L1). Ponieważ $x, y > 0$, więc istnieją $t, w \in \mathbb{R}$ takie, że $\exp(t) = x$, $\exp w = y$ (czyli: $t = \ln x$, $w = \ln y$). Z własności (E2) funkcji $\exp$ otrzymujemy

$$xy = \exp(t)\exp(w) = \exp(t+w),$$

tzn. wprost z definicji logarytmu $\ln xy = t + w = \ln x + \ln y$. Równości $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$ wynikają stąd, że $\exp(1) = e$, $\exp(0) = 1$.

Nietrudno zauważyć, że logarytm jest monotoniczny: gdyby $x_1 = \ln y_1 \le \ln y_2 = x_2$ dla pewnych $y_1 > y_2 > 0$, to byłoby, dzięki monotoniczności funkcji wykładniczej, $y_1 = \exp(x_1) \le \exp(x_2) = y_2$, a to jest sprzeczność.

Teraz sprawdzimy, że zachodzą nierówności podane w punkcie (L3). Niech $x = \ln y$. Mamy $\exp(x) \ge 1 + x$, tzn. $\ln y = x \le \exp(x) - 1 = y - 1$. Ponieważ $\exp(x) < 1/(1-x)$ dla $x < 1$, a z monotoniczności wynika, że $\ln y < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y < e$, więc przy dodatkowym założeniu $x = \ln y < 1$, $y > 0$, jest

$$y = \exp(x) \le \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\ln y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} \ge 1 - \ln y \quad \Leftrightarrow \quad \ln y \ge 1 - \frac{1}{y}\,.$$

Gdy $x = \ln y \ge 1$, to nierówność jest banalna, gdyż $1 - 1/y < 1$ dla $y > 0$. To kończy dowód pierwszej wersji (L3); drugą otrzymujemy, podstawiając $y = 1+t$ (zauważmy: $y > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t > -1$).

Własność (L4) jest bardzo prosta. Otrzymujemy ją, stosując nierówności z punktu (L3) i twierdzenie o trzech ciągach.

Przejdźmy do dowodu ciągłości, tzn. do własności (L5). Ponieważ logarytm iloczynu jest sumą logarytmów, więc

$$\ln y_n - \ln y = \ln\left(y \cdot \left(1 + \frac{y_n - y}{y}\right)\right) - \ln y = \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{y_n - y}{y}}_{=\text{ (ozn.) } t_n}\Big),$$

gdzie $-1 < t_n = (y_n - y)/y = -1 + \frac{y_n}{y} \to 0$, gdy $y_n \to y$. Wiemy już jednak, że $\ln(1+t_n) \to 0$ dla każdego ciągu $t_n \to 0$, $t_n > -1$; zatem $\ln y_n \to \ln y$, gdy $y_n, y > 0$ i $y_n \to y$ dla $n \to \infty$. To kończy dowód własności (L4).

Na koniec wykażemy różniczkowalność logarytmu. Zauważmy, że

$$\frac{\ln(y+h_n) - \ln y}{h_n} = \frac{\ln y + \ln\Big(1 + \dfrac{h_n}{y}\Big) - \ln y}{h_n} = \frac{\ln(1+t_n)}{t_n} \cdot \frac{1}{y} \qquad \text{dla } t_n = \frac{h_n}{y} \ne 0,$$

Wystarczy więc wykazać, że dla każdego ciągu $t_n \to 0$, gdzie $t_n \ne 0$ i $t_n > -1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, mamy $\frac{1}{t_n}\ln(1+t_n) \to 1$. Oznaczmy $s_n = \ln(1+t_n)$; wtedy $\exp(s_n) - 1 = t_n$ i $s_n \ne 0$. Zatem

$$\frac{\ln(1+t_n)}{t_n} = \frac{s_n}{\exp(s_n) - 1}.$$

Sprawdziliśmy przed chwilą, dowodząc własności (L4), że $s_n = \ln(1+t_n) \to 0$. Korzystając z różniczkowalności funkcji wykładniczej, patrz własność (E8), wnioskujemy, że $s_n/(\exp(s_n)-1) \to 1$ dla $n \to \infty$. Zatem także $\frac{1}{t_n}\ln(1+t_n) \to 1$. $\square$

Dysponując już funkcją wykładniczą i logarytmem, nietrudno jest zdefiniować potęgę dowolnej liczby dodatniej o dowolnym wykładniku rzeczywistym.

Definicja 3.7. Dla wszystkich $a > 0$ i wszystkich $x \in \mathbb{R}$ przyjmujemy

$$a^x = \exp(x \ln a)\,.$$

W szczególności, dla liczby e przyjęta definicja daje, zgodnie z naturalnym oczekiwaniem, $e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x)$, gdyż $\ln e = 1$. Zauważmy też od razu, że dla $n \in \mathbb{N}$ jest, dzięki własności (L1) logarytmu,

$$a^n = \exp(n \ln a) = \exp\big(\underbrace{\ln a + \ln a + \cdots + \ln a}_{n \text{ razy}}\big) = \exp(\ln(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)) = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}},$$

co zgadza się ze zwykłą definicją potęgi o wykładniku naturalnym. Nietrudno podać listę własności potęg, podawaną na ogół w szkole[1]

Ćwiczenie 3.8. Niech $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Proszę samodzielnie, korzystając z (E1)–(E8) oraz (L1)–(L5), udowodnić następujące własności potęg:

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$, a ponadto $a^{-x} = 1/a^x$ i $a^0 = 1$.

(ii) $\big(a^x\big)^y = a^{xy}$ i $a^x b^x = (ab)^x$.

(iii) Jeśli $a > 1$, to $a^x < a^y$ dla wszystkich $x < y$, a jeśli $a \in (0,1)$, to $a^x > a^y$ dla wszystkich $x < y$.

(iv) Jeśli ciąg $x_n \to x$ dla $n \to \infty$, to wówczas $a^{x_n} \to a^x$ dla $n \to \infty$.

(v) Jeśli $a < b$, to $a^x < b^x$ dla wszystkich $x > 0$ oraz $a^x > b^x$ dla wszystkich $x < 0$.

Możemy także zdefiniować logarytm przy dowolnej podstawie $a > 0$, $a \neq 1$.

Definicja 3.9. Jeśli $a > 0$ i $a \neq 1$, to dla wszystkich $y > 0$ przyjmujemy

$$\log_a y = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = y\,.$$

Ćwiczenie 3.10. Posługując się udowodnionymi już własnościami funkcji wykładniczej i logarytmu, sprawdzić, że powyższa definicja jest poprawna (tzn. przy podanych założeniach o a i y liczba $\log_a y$ istnieje i jest określona jednoznacznie). Dlaczego przyjmujemy, że $a \neq 1$?

Ćwiczenie 3.11. Posługując się znanymi własnościami potęg i logarytmu naturalnego, wykazać, że logarytm przy dowolnej podstawie $a > 0, a \neq 1$ ma następujące własności:

[1] Odbywa się to zwykle bez wyjaśnienia, jak należy rozumieć napis a^x, gdy liczba x nie jest wymierna, i dlaczego wtedy odpowiednie równości mają sens – prawda jest taka, że nie da się wtedy uniknąć jakiejś wersji przejść granicznych…

1) $\log_a y = (\ln y)/(\ln a)$ dla wszystkich $y > 0$.

2) Jeśli $b > 0, b \neq 1$, to $\log_a y = (\log_b y)/(\log_b a)$ dla wszystkich $y > 0$.

3) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ dla wszystkich $x, y > 0$.

4) $\log_a(y^x) = x \log_a y$ dla wszystkich $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Warunek 2) bywa nazywany *wzorem na zamianę podstawy logarytmu*.

3.2 Charakteryzacja funkcji wykładniczej

Co ciekawe, niewielka część własności funkcji wykładniczej i logarytmu określa każdą z tych funkcji jednoznacznie. Oto odpowiednie twierdzenia.

Twierdzenie 3.12 (charakteryzacja funkcji $\exp$)**.** *Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia trzy warunki:*

(i) Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ jest $f(x+y) = f(x)f(y)$,

(ii) $f(1) = e$,

(iii) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i każdego ciągu $x_n \to x$ ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x)$,

to wówczas

$$f(x) = \exp(x) \qquad \textit{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Dowód. Plan dowodu jest bardzo prosty. Korzystając z dwóch pierwszych założeń, dowodzi się, że $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i sprawdza się równość (3.1) dla wszystkich $x \in \mathbb{Q}$ (niezbyt trudna indukcja). Następnie, korzystając z trzeciego założenia i gęstości $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$, dowodzi się (3.1) dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Oto szczegóły:

Krok 1. Z pierwszego założenia otrzymujemy $f(x) = f(x/2+x/2) = f(x)^2 \geq 0$ i $f(0)^2 = f(0)$. Liczba $f(0)$ jest więc zerem lub jedynką. Nie może być jednak $f(0) = 0$, bo wtedy mielibyśmy $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$ dla wszystkich x, a wiemy, że $f(1) = e$. Zatem $f(0) = 1$, co oznacza, że $f(x)f(-x) = f(0) = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Innymi słowy, liczba $f(x)$ jest różna od zera i nieujemna.

Stwierdziliśmy więc, że $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $f(-x) = 1/f(x)$.

Krok 2. Wiemy, że $f(1) = e$. Jeśli przyjąć, że $f(m) = e^m$, to $f(m+1) = f(m)f(1) = e^m e = e^{m+1}$. Przez indukcję wnioskujemy, że $f(m) = e^m$ dla wszystkich $m \in N$. Ponadto, dla $m \in \mathbb{N}$ mamy $f(-m)e^m = f(-m)f(m) = 1$, tzn. $f(-m) = e^{-m}$. Zatem

$$f(m) = e^m = \exp(m) \qquad \text{dla wszystkich } m \in \mathbb{Z}.$$

Krok 3. Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big)^n = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ razy}}\Big) = f(1) = e,$$

stąd zaś $f(1/n) = e^{1/n}$. Przez indukcję, podobnie jak w poprzednim kroku stosując własność $f(x+y) = f(x)f(y)$, dowodzimy teraz, że $f(m/n) = e^{m/n}$. Wreszcie, ponieważ $f(-x) = 1/f(x)$, więc

$$f(x) = e^x = \exp(x) \qquad \text{dla wszystkich } x = p/q \in \mathbb{Q}.$$

Krok 4. Niech $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Istnieje wtedy (patrz Twierdzenie 1.18) ciąg liczb wymiernych x_n zbieżny do x. Z założenia (iii) oraz ciągłości funkcji wykładniczej wnioskujemy, że

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(x)\,.$$

Sprawdziliśmy więc, że $f(x) = \exp(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Uwaga. Drugie założenie Twierdzenia 3.12 ma charakter *normalizujący*: gdyby przyjąć, że $f(1) = a > 0$, to byłoby $f(x) = a^x$. Zamiast zakładać, że $f(1) = e$, można też przyjąć warunek

(ii)' Dla każdego ciągu różnych od zera liczb $x_n \to 0$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = 1\,.$$

Zadanie 3.13 (dla zainteresowanych rozumieniem teorii)**.** Wykazać, że teza Twierdzenia 3.12 zachodzi, gdy założenie (ii) zastąpimy powyższym warunkiem (ii)'. Zastanowić się, czy założenie (iii) można wtedy ominąć.

Wskazówka: co trzeba zmienić w pierwszym kroku dowodu? Jak wykazać, że $f(1) = e$? (Wolno używać wszystkich udowonionych własności funkcji wykładniczej).

Zadanie 3.14 (łatwiejsze od poprzedniego)**.** Naśladując dowód ostatniego twierdzenia, wykazać, że jeśli funkcja $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

(a) Dla wszystkich $x, y > 0$ jest $g(xy) = g(x) + g(y)$,

(b) $g(e) = 1$,

(c) Dla każdego $x > 0$ i każdego ciągu liczb dodatnich $x_n \to x$ ciąg $g(x_n)$ jest zbieżny do granicy $g(x)$,

to wówczas

$$g(x) = \ln(x) \qquad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Przekonamy się za pewien czas, że funkcję wykładniczą i logarytm naturalny można określić także dla zespolonych wartości zmiennej. Trzeba to jednak zrobić nieco inaczej (Czytelnik zauważył zapewne, że w dowodach w tym rozdziale wielokrotnie korzystaliśmy z własności ciągów monotonicznych i nierówności Bernoulliego, a tych narzędzi trudno używać w $\mathbb{C}$). Wygodnie będzie zająć się najpierw *szeregami*.