3 Przestrzenie liniowe

3.1 Przestrzenie liniowe.

Dla dowolnego ciała $\mathbb{K}$, analogicznie jak to robiliśmy dla $\mathbb{R}$, wprowadza się operację dodawania wektorów – kolumn z $\mathbb{K}^n$ i mnożenia tych wektorów przez elementy ciała – skalary.

Jeśli A jest $(m \times n)$-macierzą o wyrazach z ciała $\mathbb{K}$, to zbiór V rozwiązań układu jednorodnego $AX = \mathbf{0}$ jest zamknięty ze względu na dodawanie wektorów i mnożenie wektorów przez skalary.

Podobnie, w zbiorze W wielomianów stopnia nie większego niż n o współczynnikach rzeczywistych, podzielnych przez wielomian $x^2 + 1$, określone jest naturalne działanie dodawania i mnożenia przez liczby.

Są to przykłady przestrzeni liniowych – obiektów algebraicznych złożonych ze skalarów i wektorów oraz działań na nich, które określa się następująco

Definicja 3.1.1 *Zbiór V z ustalonym elementem $\mathbf{0}$ (wektor zerowy) i działaniem dodawania "+" nazywamy przestrzenią linową nad ciałem $\mathbb{K}$ jeśli jest ustalone działanie mnożenia "·" elementów ciała (zwanych skalarami) przez elementy V (zwane wektorami) dające w wyniku elementy V, przy czym dla dowolnych $a, b \in \mathbb{K}$ i $v, w, u \in V$ spełnione są warunki (osiem aksjomatów przestrzeni liniowej)*

(1)	$v + w = w + v$	*przemienność dodawania wektorów,*
(2)	$v + (w + u) = (v + w) + u$	*łączność dodawania wektorów,*
(3)	$v + \mathbf{0} = v$	*wektor zerowy jest elementem neutralnym dodawania wektorów,*
(4)	*istnieje* v' *takie, że* $v + v' = \mathbf{0}$	*element przeciwny dodawania wektorów,*
(5)	$a \cdot (w + u) = a \cdot w + a \cdot u$	*rozdzielność mnożenia przez skalar względem dodawania wektorów,*
(6)	$(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$	*rozdzielność mnożenia przez skalar względem dodawania skalarów,*
(7)	$(b \cdot v) = (ab) \cdot v$	*łączność mnożenia przez skalary,*
(8)	$1 \cdot v = v$	*skalar 1 jest elementem neutralnym mnożenia.*

Jak zobaczymy później, przyjęte aksjomaty pozwalają utożsamiać, ze względu na strukturę algebraiczną, przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{K}$ skończonego wymiaru (innych nie będziemy tu w zasadzie rozpatrywać) z przestrzeniami $\mathbb{K}^n$, a jednocześnie pozwalają operować na wektorach z V, bez konieczności przypisania im konkretnych współrzędnych.

Równanie $x + v = w$ ma w przestrzeni liniowej V dokładnie jedno rozwiązanie, bo dodając do obu stron v' – ustalony element przeciwny do v otrzymujemy, po uporządkowaniu równoważne równanie $x = w + v'$.

W szczególności $\mathbf{0}$ i wektor przeciwny do v (oznaczany przez $-v$) są wyznaczone jednoznacznie.

Iloczyn av (opuszczamy znak mnożenia) znaczy to samo co va (używa się jednak zazwyczaj zapisu av).

Uwaga 3.1.2 Dla dowolnych $a \in \mathbb{K}$, $v \in V$:

a) $av = \mathbf{0}$ jeśli $a = 0$ lub $v = \mathbf{0}$ ($v = \mathbf{0}$, to do obu stron $a\mathbf{0} + a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0}$ dodajemy $-(a\mathbf{0})$
$a = 0$, to do obu stron $0v + 0v = (0 + 0)v = 0v$ dodajemy $-(0v)$).

b) $av = \mathbf{0}$, to $a = 0$ lub $v = \mathbf{0}$ (bo $a \neq 0$, to obie strony mnożymy z lewej przez a^{-1}).

c) $(-1)v = -v$ (bo $v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = \mathbf{0}$). □

Podamy teraz kilka podstawowych przykładów przestrzeni liniowych nad $\mathbb{K}$ użytecznych, przy ilustrowaniu wprowadzanych przez nas kolejnych pojęć.

Przykład 3.1.3 (a) Przestrzeń współrzędnych $\mathbb{K}^m$.

Elementami $\mathbb{K}^m$ (wektorami z $\mathbb{K}^m$) są kolumny m skalarów (współrzędnych tego wektora). Wektor zerowy ma wszystkie współrzędne zerowe. Definiujemy działania "po współrzędnych"

$$(+)\quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_m+b_m \end{bmatrix}; \qquad (\cdot)\quad c\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_m \end{bmatrix}.$$

Aksjomaty przestrzeni liniowej wynikają z odpowiednich aksjomatów ciała.

(b) Przestrzeń macierzy $\mathbb{K}_n^m$.

Wektorami w $\mathbb{K}_n^m$ są macierze o wyrazach z $\mathbb{K}$ mające m wierszy i n kolumn, zob. 1.1. Macierz zerowa ma wszystkie wyrazy zerowe. Wektory – macierze dodajemy sumując ich odpowiednie wyrazy i mnożymy przez skalary – elementy ciała $\mathbb{K}$, mnożąc przez skalar wszystkie wyrazy macierzy.

Często wygodnie jest myśleć o $(m \times n)$-macierzy jako o układzie n kolumn – wektorów z $\mathbb{K}^m$. Jeśli $A = [A_1, \ldots, A_n]$, $B = [B_1, \ldots B_n]$, $A_j, B_j \in \mathbb{K}^m$ oraz $c \in \mathbb{K}$, to $A + B = [A_1 + B_1, \ldots A_n + B_n]$ i $cA = [cA_1, \ldots cA_n]$.

(c) Przestrzeń wielomianów $\mathbb{K}[x]$.

Wielomianem stopnia n o współczynnikach w $\mathbb{K}$ będziemy nazywali wyrażenie $a_0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n$, gdzie $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ oraz $a_n \neq \mathbf{0}$, a każdy ze składników a_jx^j będziemy nazywali jednomianem. Będziemy pomijali w takim wyrażeniu te jednomiany a_jx^j, dla których $a_j = 0$, a wielomian zerowy (bez niezerowych jednomianów, mający stopień $-\infty$) będziemy oznaczali przez $\mathbf{0}$.

W zbiorze wielomianów $\mathbb{K}[x]$ określone są działania dodawania i mnożenia spełniające wszystkie aksjomaty ciała, poza aksjomatem o istnieniu elementu odwrotnego. W szczególności $\mathbb{K}[x]$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$, bo $c \in \mathbb{K}$ można uważać za jednomian.

Definicja 3.1.4 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Podzbiór W zbioru wektorów zawierający wektor zerowy nazywamy podprzestrzenią V jeśli W jest zamknięty za względu na działanie dodawania i mnożenia przez skalary, to znaczy spełnione są dwa warunki*

$$(+)\quad v + w \in W \text{ dla } v, w \in W; \qquad (\cdot)\ cv \in W \text{ dla } c \in \mathbb{K},\ v \in W.$$

Uwaga 3.1.5 Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$, to W z działaniami dodawania wektorów i mnożenia wektora przez skalar ograniczonymi do W jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$, bo dla $v \in W$ wektor przeciwny $-v = (-1)v$ też jest w W. □

Każda przestrzeń V liniowa zawiera podprzestrzeń maksymalną i minimalną w sensie inkluzji (zwane niewłaściwymi): samą siebie i podprzestrzeń zerową $\{\mathbf{0}\}$. W następnej części podamy ogólną metodę generowania podprzestrzeni przestrzeni liniowych V.

3.2 Kombinacje liniowe.

Kombinacje liniowe pojawiły się już przy okazji omawiania układów równań liniowych.

Definicja 3.2.1 *Kombinacją liniową wektorów układu $(v_1, \ldots, v_n)$ z przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ o współczynnikach $x_1, \ldots, x_n$ (z $\mathbb{K}$) nazywamy wektor $\sum_{j=1}^n x_jv_j = x_1v_1+\ldots+x_nv_n \in V$. Powłoką liniową układu $(v_1, \ldots, v_n)$ nazywamy zbiór $\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n)$ wszystkich kombinacji liniowych tego układu.*

Uwaga 3.2.2 Wygodnie jest założyć, że jedyną kombinacją układu pustego (nie zawierającego żadnego wektora) jest wektor zerowy. W szczególności $\operatorname{lin}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$. □

Uwaga 3.2.3 W definicji podprzestrzeni przestrzeni liniowej V warunki $(+)$ i $(\cdot)$ dla $W \subset V$ można zastąpić mocniejszym warunkiem

$$x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \in W \quad \text{dla} \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K},\ v_1, \ldots, v_n \in W,$$

który wynika z $(+)$ i $(\cdot)$ przez indukcję ze względu na $n \geqslant 1$. □

Twierdzenie 3.2.4 *Powłoka liniowa* $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_n)$ *układu wektorów w przestrzeni* V *jest najmniejszą podprzestrzenią przestrzeni* V *zawierającą wektory* v_j, $j = 1, \ldots, n$.

Dowód. Suma dwóch kombinacji liniowych wektorów $v_1, \ldots, v_n$ oraz wynik pomnożenia takiej kombinacji przez skalar jest kombinacją liniową wektorów $v_1, \ldots, v_n$:

$$(+) \quad \textstyle\sum_{j=1}^n x_j v_j + \sum_{j=1}^n y_j v_j = \sum_{j=1}^n (x_j + y_j) v_j\,; \qquad (\cdot) \quad c \sum_{j=1}^n x_j v_j = \sum_{j=1}^n (c x_j) v_j.$$

Wynika stąd, że $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_n)$ jest podprzestrzenią liniową V zawierającą wszystkie wektory v_j.
Z drugiej strony, jeśli podprzestrzeń liniowa W przestrzeni V zawiera $v_1, \ldots, v_n$, to zawiera też wszystkie kombinacje liniowe tych wektorów, zob. 3.2.3, a więc $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_n) \subset W$. ■

Iloczyn AX macierzy A i wektora X odpowiednich wymiarów wprowadziliśmy w 1.1, jednak ze względu na wagę tej operacji powtórzymy to w sposób bardziej formalny.

Definicja 3.2.5 *Iloczynem macierzy* $A = [A_1, \ldots, A_n] \in \mathbb{K}_n^m$ *(gdzie* A_j *jest* j*-tą kolumną* A*) i wektora* $X \in \mathbb{K}^n$ *o współrzędnych* $x_1, \ldots, x_n$ *nazywamy wektor* $AX = \sum_{j=1}^n x_j A_j \in \mathbb{K}^m$.

Uwaga 3.2.6 Operacja mnożenia macierzy i wektorów ma następujące własności (zob. dowód 3.2.4)

$$(+) \quad AX + AY = A(X + Y); \qquad (\cdot) \quad c(AX) = A(cX),$$

tzn. w terminologii, którą uściślimy poniżej, operacja $X \longrightarrow AX$ jest liniowa. □

Definicja 3.2.7 *Mówimy, że układ wektorów* $(v_1, \ldots, v_n)$ *z* V *rozpina* V *jeśli* $V = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_n)$.

Uwaga 3.2.8 Układ wektorów $(A_1, \ldots, A_n)$ z przestrzeni $\mathbb{K}^m$ rozpina $\mathbb{K}^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $B \in \mathbb{K}^m$ równanie $x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = B$ jest niesprzeczne, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy macierz otrzymana w wyniku redukcji $A = [A_1, \ldots, A_n]$ do postaci schodkowej ma schodek w każdym wierszu. □

3.3 Liniowa niezależność.

Liniowa niezależność jest centralnym pojęciem związanym z przestrzeniami liniowymi.

Definicja 3.3.1 *Układ wektorów* $(v_1, \ldots, v_k)$ *w przestrzeni liniowej* V *nad ciałem* $\mathbb{K}$ *nazywamy liniowo niezależnym jeśli z* $a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k = \mathbf{0}$ *wynika, że* $a_1 = \ldots = a_k = 0$. *Układ, który nie jest liniowo niezależny nazywamy zależnym.*

Uwaga 3.3.2 Liniowa niezależność układu $(v_1, \ldots, v_k)$ oznacza, że każdy wektor $v \in \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k)$ można zapisać w postaci kombinacji liniowej $v = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$ tylko w jeden sposób (później będziemy interpretowali współczynniki a_j jako współrzędne wektora v względem układu $(v_1, \ldots, v_k)$). Istotnie, jeśli mamy także $v = b_1 v_1 + \ldots + b_k v_k$, to $\mathbf{0} = (a_1 - b_1) v_1 + \ldots + (a_k - b_k) v_k = \mathbf{0}$, a liniowa niezależność oznacza, że $\mathbf{0}$ może być zapisane tylko jako kombinacja liniowa v_j o zerowych współczynnikach. □

Twierdzenie 3.3.3 *Dla układu wektorów* $(v_1, \ldots, v_k)$ *w przestrzeni liniowej* V *nad ciałem* $\mathbb{K}$ *następujące warunki są równoważne.*

(i) *Układ* $(v_1, \ldots, v_k)$ *jest liniowo niezależny.*

(ii) *Żaden z wektorów* v_j *nie jest kombinacją liniową pozostałych*
(to znaczy $v_j \notin \mathrm{lin}(v_i)_{i \neq j}$ *dla* $j = 1, \ldots, k$*).*

(iii) *Żaden z wektorów* v_j *nie jest kombinacją liniową poprzednich wektorów*
(to znaczy $v_1 \neq \mathbf{0}$ *i* $v_j \notin \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_{j-1})$ *dla* $j = 2, \ldots, k$*).*

Dowód. Dla dowodu $(i) \Rightarrow (ii)$ załóżmy negację (ii), czyli istnienie $j \geqslant 1$ takiego, że $v_j = \sum_{i \neq j} a_i v_i$ dla pewnego układu skalarów $(a_i)_{i \neq j}$. Wtedy $-v_j + \sum_{i \neq j} a_i v_i = \mathbf{0}$ jest nietrywialnym przedstawieniem wektora zerowego, co przeczy (i).

Implikacja $(ii) \Rightarrow (iii)$ jest oczywista.

Dla dowodu $(iii) \Rightarrow (i)$ rozważmy kombinację $\sum_{i \leqslant k} a_i v_i = \mathbf{0}$. Gdyby nie wszystkie współczynniki a_i były zerowe, to dla $j = \max\{i : a_i \neq \mathbf{0}\}$ mielibyśmy $v_j = \sum_{i<j} \frac{-a_i}{a_j} v_i$, co przeczyłoby (iii). ■

Uwaga 3.3.4 Liniowa niezależność układu $(A_1, \ldots, A_k)$ w $\mathbb{K}^m$ oznacza, że równanie $\sum_{i=1}^{k} x_i A_i = \mathbf{0}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, czyli w wyniku redukcji macierzy $A = [A_1, \ldots, A_k]$ do postaci schodkowej otrzymamy macierz A', mającą schodek w każdej kolumnie (w szczególności $k \leqslant m$).

Równoważność warunków (i) i (iii) jest dla takiego układu oczywista, bo macierz A' ma schodek w j-tej kolumnie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $\sum_{i<j} x_i A_i = A_j$ jest sprzeczne, czyli $A_j \notin \mathrm{lin}(A_i)_{i<j}$. □

3.4 Baza i wymiar.

Wyróżnienie n-elementowej bazy w przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ pozwala przypisać każdemu wektorowi $v \in V$ wektor z $\mathbb{K}^n$ (wektor współrzędnych v w tej bazie) z zachowaniem operacji dodawania i mnożenia przez skalary.

Definicja 3.4.1 *Układ wektorów $(v_1, \ldots, v_n)$ w przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy bazą V jeśli układ $(v_1, \ldots, v_n)$ jest liniowo niezależny i rozpina V.*

Uwaga 3.4.2 Jeśli układ $(v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą V, to zgodnie z Uwagą 3.3.2, każdy wektor $v \in V$ daje się przedstawić jako kombinacja liniowa $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ w dokładnie jeden sposób. Współczynniki tej kombinacji nazywamy *współrzędnymi wektora v w bazie* $(v_1, \ldots, v_n)$. □

Przykład 3.4.3 (a) W przestrzeni $\mathbb{K}^m$ położmy $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, E_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Układ $(E_1, E_2, \ldots, E_m)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{K}^m$. Współrzędne wektora $X \in \mathbb{K}^m$ są identyczne ze współrzędnymi X w tej bazie. Bazę $(E_1, E_2, \ldots, E_m)$ nazywamy bazą standardową $\mathbb{K}^m$.

(b) W $\mathbb{K}^2_2$ położmy $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Układ $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{K}^2_2$. Współrzędne macierzy $A \in \mathbb{K}^2_2$ w tej bazie są wyrazami tej macierzy w porządku, w jakim ustawiliśmy macierze E_{ij}.

Analogicznie w przestrzeni macierzy $\mathbb{K}^m_n$ definiuje się bazę mającą $m \cdot n$ elementów $E_{kl} \in \mathbb{K}^m_n$, gdzie E_{kl} jest macierzą mającą na miejscu k, l jedynkę i wszystkie pozostałe wyrazy zerowe.

(c) Układ jednomianów $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ tworzy bazę podprzestrzeni $\mathbb{K}_n[x]$ wielomianów stopnia $\leqslant n$ przestrzeni $\mathbb{K}[x]$. Współrzędne wielomianu $w(x)$ w tej bazie są współczynnikami tego wielomianu.

Uwaga 3.4.4 Układ $(A_1, \ldots A_n)$ w $\mathbb{K}^m$ wyznacza macierz $A = [A_1, \ldots A_n] \in \mathbb{K}^m_n$. Jeśli w wyniku redukcji A do postaci schodkowej otrzymujemy macierz A' mającą schodki w kolumnach o numerach $j_1, \ldots, j_r$, to układ $(A_{j_1}, \ldots A_{j_r})$ jest bazą $V = \mathrm{lin}(A_1, \ldots A_n)$, bo dla każdego $B \in \mathbb{K}^m$ takiego, że układ $AX = B$ jest niesprzeczny, równanie $x_{j_1} A_{j_1} + \ldots + x_{j_r} A_{j_r} = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

W szczególności dla $n = m$ układ $(A_1, \ldots, A_n)$ w $\mathbb{K}^n$ jest bazą $\mathbb{K}^n$ wtedy i tyko wtedy, gdy macierz zredukowana A' ma n schodków (w każdej kolumnie i w każdym wierszu). □

Bazę $(A_{j_1}, \dots A_{j_r})$ przestrzeni $\operatorname{lin}(A_1, \dots A_n) \subset \mathbb{K}^m$ otrzymujemy wybierając z układu rozpinającego wektory, które nie są kombinacjami poprzednich, zob. Uwaga 3.3.4. Tak samo można postępować w przypadku ogólnym.

Twierdzenie 3.4.5 (o istnieniu bazy). *Jeśli z układu wektorów* $(v_1, \dots, v_n)$ *rozpinającego przestrzeń* V *wybierzemy wszystkie wektory* v_j *takie, że* $v_j \notin \operatorname{lin}(v_i)_{i<j}$*, to otrzymamy bazę* $(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$ *przestrzeni* V*.*

Dowód. Z Twierdzenia 3.3.3 (iii) układ $(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$ jest lniowo niezależny. Niech $W = \operatorname{lin}(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$. Pokażemy, że $(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$ rozpina V, czyli $W = V$. W tym celu wystarczy wykazać, że $v_i \in W$ dla $i \leqslant n$.
Gdyby nie wszystkie v_i należały do W, to dla $j = \min\{i \leqslant n : v_i \notin W\}$ mielibyśmy $\operatorname{lin}(v_i)_{i<j} \subset W$ oraz $v_j \notin W$. Zatem $v_j \notin \operatorname{lin}(v_i)_{i<j}$, więc v_j byłby w W jako jeden z wybranych wektorów, co przeczy wyborowi j. ■

Z Twierdzenia 3.4.5 wynika.

Twierdzenie 3.4.6 (o rozszerzaniu układu liniowo niezależnego do bazy). *Jeśli układ wektorów* $(v_1, \dots, v_k)$ *w przestrzeni liniowej* V *jest liniowo niezależny, a układ* $(w_1, \dots, w_m)$ *rozpina* V*, to układ* $(v_1, \dots, v_k)$ *można rozszerzyć do bazy* V *wektorami z układu* $(w_1, \dots, w_m)$*.*

Dowód. Układ $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m)$ rozpina V. Usuwając z tego układu wszystkie wektory będące kombinacjami poprzednich otrzymamy, zgodnie z Twierdzeniem 3.4.5, bazę przestrzeni V, a z Twierdzenia 3.3.3 (iii) wynika, że nie usuniemy żadnego z wektorów v_j. ■

Zastosowane w tym dowodzie rozumowanie wykorzystamy też w dowodzie kolejnego twierdzenia, które pozwoli na określenie wymiaru przestrzeni liniowej.

Twierdzenie 3.4.7 (Steinitza o wymianie). *Jeśli układ wektorów* $(v_1, \dots, v_k)$ *w przestrzeni liniowej* V *jest liniowo niezależny, a układ* $(w_1, \dots, w_m)$ *rozpina* V*, to* $k \leqslant m$ *oraz istnieją parami różne indeksy* $i_1, \dots, i_k \leqslant m$ *takie, że układ otrzymany z* $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m)$ *przez usunięcie wektorów* $w_{i_1}, \dots, w_{i_k}$ *rozpina* V*.*

Dowód. Nierówność $k \leqslant m$ wynika z drugiej części tezy, którą udowodnimy przez indukcję ze względu na $j \leqslant k$ dopisując na początku układu $(w_1, \dots, w_m)$ kolejno wektory v_j i usuwając, za każdym razem, wektor w_{i_j} tak, by układ otrzymany po j wymianach pozostawał układem rozpinającym V.
W kroku indukcyjnym dodajemy do układu rozpinającego kolejny wektor v_j, bezpośrednio po wektorze v_{j-1} (na początku, gdy $j = 1$). Z warunku (ii) Twierdzenia 3.3.3 dostajemy układ liniowo zależny, a z warunku (iii) tego twierdzenia jeden z pozostających w naszym układzie wektorów w_{i_j} jest kombinacją poprzednich, więc po jego usunięciu otrzymamy układ rozpinający V. ■

Przestrzeń liniowa może mieć wiele baz (zob. Uwaga 3.4.4). Jednakże z pierwszej części tezy Twierdzenia Steinitza wynika, że w przestrzeni V z bazą mającą n wektorów, każdy układ liniowo niezależny ma $k \leqslant n$ wektorów, a każdy układ rozpinający ma $m \geqslant n$ wektorów. Tak więc, wszystkie bazy w V mają tyle samo elementów.

Definicja 3.4.8 *Wymiarem przestrzeni liniowej* V *mającej bazę skończoną nazywamy liczbę wektorów tej bazy, którą oznaczamy* $\dim V$ $(\dim\{\mathbf{0}\} = 0)$*. Jeśli* V *nie ma bazy skończonej, mówimy, że wymiar* V *jest nieskończony.*

Przykład 3.4.9 Z Przykładu 3.4.3 dostajemy

(a) $\dim \mathbb{K}^m = m$,

(b) $\dim \mathbb{K}^m_n = mn$,

(c) $\dim \mathbb{K}_n[x] = n + 1$.

Uwaga 3.4.10 Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni V mającej skończony wymiar, to z Twierdzenia Steinitza $\dim W \leqslant \dim V$. Co więcej, z $\dim W = \dim V$ wynika, że $W = V$, bo gdyby $W \neq V$, to bazę W można by było istotnie rozszerzyć do bazy V, zob. Twierdzenie 3.4.6. □

Odnotujmy jednak, że przestrzenie wymiaru nieskończonego, na przykład $\mathbb{K}[x]$, mogą zawierać właściwe podprzestrzenie wymiaru nieskończonego. W dalszej części, jeśli nie powiemy wyraźnie inaczej, **będziemy zakładać, że wszystkie rozważane przestrzenie mają wymiar skończony**.

3.5 Rząd macierzy.

Z macierzą $A \in \mathbb{K}_n^m$ są związane trzy przestrzenie: podprzestrzeń rozpięta na kolumnach, podprzestrzeń rozpięta na wierszach i podprzestrzeń rozwiązań jednorodnego układu równań $AX = \mathbf{0}$. Dwie pierwsze mają taki sam wymiar – rząd macierzy A, a wymiar trzeciej jest różnicą n i rzędu A.

Przejdziemy teraz do systematycznego przedstawienia tych zagadnień.

Definicja 3.5.1 *Przestrzenią kolumn macierzy $A \in \mathbb{K}_n^m$ nazywamy podprzestrzeń $K(A)$ przestrzeni $\mathbb{K}^m$ rozpiętą przez kolumny A.*

Z definicji mnożenia macierzy przez wektor (3.2.5) wynika, że przestrzeń kolumn $K(A)$ macierzy A jest zbiorem wszystkich wektorów B, dla których układ równań $AX = B$ jest niesprzeczny.

Definicja 3.5.2 *Rzędem* $\operatorname{rank} A$ *macierzy A nazywamy* $\dim K(A)$.

Z Uwagi 3.4.4 wynika, że $\operatorname{rank} A$ jest liczbą kolumn ze schodkami w macierzy A' otrzymanej w wyniku redukcji macierzy A do postaci schodkowej. Jeśli macierz $\widetilde{A}$ powstaje z A w wyniku operacji elementarnych na wierszach, to $K(\widetilde{A}\,)$ różni się na ogół od $K(A)$, ale $\operatorname{rank} \widetilde{A} = \operatorname{rank} A$, bo $\widetilde{A}$ i A można zredukować do tej samej macierzy w postaci schodkowej.

Definicja 3.5.3 *Przestrzenią zerową macierzy A nazywamy podprzestrzeń $N(A)$ przestrzeni $\mathbb{K}^n$ złożoną z rozwiązań jednorodnego układu równań $AX = \mathbf{0}$.*

Następne twierdzenie opisuje rozwiązania układu $AX = B$ w terminach zdefiniowanych wyżej pojęć.

Twierdzenie 3.5.4 (Kroneckera – Capelliego). *Niech $A \in \mathbb{K}_n^m$ i $B \in \mathbb{K}^m$. Układ równań $AX = B$ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\, [A|B]$. *Jeśli X_* jest rozwiązaniem tego układu, to zbiór wszystkich rozwiązań ma postać $X_* + N(A) = \{X_* + Z : Z \in N(A)\}$.*

Dowód. Pierwsza część tezy wynika z faktu, że niesprzeczność $AX = B$ jest równoważna warunkowi $B \in K(A)$. Druga część oznacza, że X jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy $X - X_* \in N(A)$, a to wynika z równości $A(X - X_*) = AX - AX_* = AX - B$ (zob. wzory w Uwadze 3.2.6). ■

Opiszemy teraz wymiar $N(A)$ korzystając z faktu, że liczba zmiennych zależnych w rozwiązaniu ogólnym układu $AX = \mathbf{0}$ jest liczbą schodków macierzy A' otrzymanej w wyniku redukcji A do postaci schodkowej.

Twierdzenie 3.5.5 *Dla macierzy $A \in \mathbb{K}_n^m$* $\dim N(A) = n - \operatorname{rank} A$.

Dowód. Niech $p = n - \operatorname{rank} A$ będzie liczbą zmiennych niezależnych układu $AX = \mathbf{0}$. Zgodnie z Uwagą 1.3.1 każde rozwiązanie tego układu jest wyznaczone przez wartości zmiennych niezależnych $t_1, \ldots, t_p$ i ma postać $X = t_1X_1 + \ldots + t_pX_p$. Z Uwagi 3.3.2 wynika, że układ $(X_1, \ldots, X_p)$ jest bazą $N(A)$. ■

Podprzestrzeń V przestrzeni $\mathbb{K}^n$ mająca bazę $(A_1, \ldots, A_r)$ jest przestrzenią kolumn macierzy $A = [A_1, \ldots, A_r] \in \mathbb{K}_r^n$. Pokażemy, że V jest również przestrzenią zerową pewnej macierzy z $\mathbb{K}_n^{n-r}$.

Twierdzenie 3.5.6 *Jeśli $V \subset \mathbb{K}^n$, $\dim V = r$, to V jest przestrzenią zerową pewnej macierzy $C \in \mathbb{K}_n^{n-r}$.*

Dowód. Niech $A \in \mathbb{K}^n_r$ będzie macierzą, której kolumny są bazą V, $V = K(A)$. Wektor $Y \in \mathbb{K}^n$ jest w V wtedy i tylko wtedy, gdy układ równań $AX = Y$ jest niesprzeczny, a więc gdy po redukcji macierzy $[A|Y]$ do postaci schodkowej otrzymana macierz $[A'|Y']$ nie ma schodka w ostatniej kolumnie. Ponieważ $\operatorname{rank} A = \dim V = r$, to oznacza, że współrzędne Y' o indeksach $\geqslant r + 1$ są zerami.

Wektor $Y \in \mathbb{K}^n$ jest jedynym rozwiązaniem układu równań $IX = Y$ o macierzy $I = [E_1, \ldots, E_n] \in \mathbb{K}^n_n$, zob. Przykład 3.4.3 (a).

Wektory $Y \in V$ można opisać następująco. Niech I' będzie macierzą otrzymaną z macierzy I przez prowadzenie na niej operacji elementarnych redukujących A do A' i niech $C \in \mathbb{K}^{n-r}_n$ będzie macierzą złożoną z ostatnich $n - r$ wierszy macierzy I'. Jedynym rozwiązaniem układu równań $I'X = Y'$ jest Y, bo ten układ jest równoważny układowi $IX = Y$, a więc $Y \in V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I'Y$ ma zera na ostatnich $n - r$ miejscach, tzn. gdy $CY = \mathbf{0}$. Zatem $V = N(C)$. ■

W praktyce macierz C układu równań opisującego przestrzeń $K(A) \subset \mathbb{K}^n$ wymiaru r wyznacza się redukując macierz $[A|I]$ do macierzy $[A'|I']$ takiej, że A' jest w postaci schodkowej (C jest złożona z ostatnich $n - r$ wierszy macierzy I').

Wiersze macierzy $A \in \mathbb{K}^m_n$ należą do przestrzeni liniowej macierzy jednowierszowych $\mathbb{K}^1_n$, którą będziemy oznaczać przez $\mathbb{K}_n$.

Definicja 3.5.7 *Przestrzenią wierszy macierzy $A \in \mathbb{K}^m_n$ nazywamy podprzestrzeń $W(A)$ przestrzeni $\mathbb{K}_n$ rozpiętą przez wiersze A.*

Twierdzenie 3.5.8 *Dla macierzy $A \in \mathbb{K}^m_n$ $\dim W(A) = \dim K(A)$.*

Dowód. 0peracje elementarne na wierszach nie zmieniają przestrzeni wierszy. Jest to oczywiste dla operacji typu (II) i (III). Jeśli $\widetilde{A}$ powstaje z $A \in \mathbb{K}^m_n$ w wyniku zastosowania operacji $(\mathrm{I})_{a(i)+(k)}$, to oczywiście $W(\widetilde{A}) \subset W(A)$. Równość wynika z faktu, że operacja $(\mathrm{I})_{(-a)(i)+(k)}$ prowadzi od $\widetilde{A}$ do A.

Wystarczy teraz pokazać, ze dla macierzy A' w postaci schodkowej $\dim W(A')$ jest równy liczbie schodków tej macierzy. Istotnie, $W(A')$ jest rozpinana przez swoje niezerowe wiersze $(w'_1, \ldots, w'_r)$, które są liniowo niezależne, bo po zmianie kolejności na $(w'_r, \ldots, w'_2, w'_1)$ spełniają warunek (iii) Twierdzenia 3.3.3. ■

3.6 Suma prosta podprzestrzeni.

W klasie podprzestrzeni liniowych ustalonej przestrzeni liniowej są dwie naturalne operacje: przecięcia oraz sumy algebraicznej. Podamy pewne użyteczne fakty dotyczące tych operacji.

Uwaga 3.6.1 Jeśli V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V to część wspólna $V_1 \cap V_2 = \{v : v \in V_1 \text{ i } v \in V_2\}$ i $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ są podprzestrzeniami V. □

Definicja 3.6.2 *Podprzestrzeń $V_1 + V_2$ przestrzeni V nazywamy sumą algebraiczną podprzestrzeni V_1, V_2.*

Definicja 3.6.3 *Sumę algebraiczną $V_1 + V_2$ nazywamy sumą prostą jeśli dla dowolnie wybranych $v_j \in V_j$ z $v_1 + v_2 = \mathbf{0}$ wynika, że $v_1 = v_2 = \mathbf{0}$. Sumę prostą $V_1 + V_2$ oznaczamy przez $V_1 \oplus V_2$.*

Uwaga 3.6.4 Suma $V_1 + V_2$ jest sumą prostą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor $v \in V_1 + V_2$ daje się przedstawić jako suma $v = v_1 + v_2$, gdzie $v_j \in V_j$, na dokładnie jeden sposób (bo z $v = w_1 + w_2 = u_1 + u_2$ wynika, że $(w_1 - u_1) + (w_2 - u_2) = \mathbf{0}$). Wektory v_j nazywamy *składowymi wektora* $v \in V_1 \oplus V_2$. □

Twierdzenie 3.6.5 *Dla $V_1, V_2 \subset V$, $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.*

Dowód. Teza wynika z faktu, że $\mathbf{0} = v_1 + v_2 \in V_1 + V_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_2 = -v_1 \in V_1 \cap V_2$ ■

Twierdzenie 3.6.6 *Jeśli układ $\mathcal{A}_j$ jest bazą przestrzeni $V_j \subset V$ dla $j = 1, 2$ i układ $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ powstaje przez dołączenie do $\mathcal{A}_1$ układu $\mathcal{A}_2$, to układ $\mathcal{A}$ jest bazą $V_1 + V_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$.*

Dowód. Układ $\mathcal{A}$ oczywiście rozpina $V_1 + V_2$. Każdy wektor $v_j \in V_j$ daje się jednoznacznie przedstawić jako kombinacja wektorów bazy $\mathcal{A}_j$, zob. Uwaga 3.3.2. Jednoznaczność rozkładu wektora $\mathbf{0}$ na składowe $v_j \in V_j$ jest więc równoważna z jednoznacznością zapisu $\mathbf{0}$ jako kombinacji wektorów układu $\mathcal{A}$. ∎

Wniosek 3.6.7 *$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy* $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2)$.

Ważną własnością przestrzeni liniowych jest fakt, że każdą podprzestrzeń przestrzeni liniowej można uzupełnić do sumy prostej, tzn.

Wniosek 3.6.8 *Dla dowolnej podprzestrzeni W przestrzeni liniowej V istnieje podprzestrzeń $U \subset V$ taka, że $W \oplus U = V$.*

Wniosek jest natychmiastową konsekwencją Twierdzenia 3.6.6 i twierdzenia o rozszerzaniu dowolnego układu liniowo niezależnego do bazy (zob. 3.4.6).
Wyprowadzimy stąd następującą formułę Grassmana.

Twierdzenie 3.6.9 *Jeśli V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V, to*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Dowód. Połóżmy $W = V_1 \cap V_2$ i niech U będzie podprzestrzenią V_2 taką, że $V_2 = W \oplus U$ ($U = V_2$ jeśli $W = \{\mathbf{0}\}$). Zauważmy, że $V_1 + V_2 = V_1 + U$, bo dla $v_1 + v_2 \in V_1 + V_2$ wektor $v_2 = w + u \in W \oplus U$, więc $v_1 + v_2 = v_1 + (w + u) = (v_1 + w) + u \in V_1 + U$.

Z $U \subset V_2$ mamy $V_1 \cap U = V_1 \cap V_2 \cap U = W \cap U = \{\mathbf{0}\}$, więc $V_1 + W = V_1 \oplus U$ z Twierdzenia 3.6.5. Z Wniosku 3.6.7 dostajemy $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 + U) = \dim V_1 + \dim U = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim W$. ∎