1 Układy równań liniowych

1.1 Układy równań, macierze.

W tej części opiszemy metodę rozwiązywania układów m równań z n niewiadomymi o współczynnikach rzeczywistych, tzn. układów

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ są stałymi współczynnikami, $b_i \in \mathbb{R}$ są stałymi wyrazami wolnymi, a symbole x_j oznaczają niewiadome.

Definicja 1.1.1 *Jeśli wszystkie wyrazy wolne b_i sa zerami, to układ jest jednorodny.*

Współczynniki układu $(*)$ można zapisać w postaci $(m \times n)$-macierzy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

współczynnik a_{ij} nazywamy (i,j)-tym wyrazem macierzy, a $(m \times 1)$-macierze i $(1 \times n)$-macierze

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$$

nazywamy odpowiednio j-tą kolumną i i-tym wierszem macierzy.

Następujące dwie interpretacje będą odgrywały w przyszłości ważną rolę.

Niech $\mathbb{R}^m$ będzie przestrzenią kolumn o m elementach, tzn. $(m \times 1)$-macierzy. Elementy $\mathbb{R}^m$ będziemy nazywali wektorami wymiaru m, a wyraz takiego wektora stojący w i-tym wierszu jego i-tą współrzędną. Wektor, który ma wszystkie współrzędne zerowe nazywamy *wektorem zerowym* i oznaczamy symbolem $\mathbf{0}$. Wektory z $\mathbb{R}^m$ dodajemy, sumując i-te współrzędne i mnożymy przez liczby (lub symbole x), mnożąc każdą współrzędną osobno.

Tak więc układ $(*)$ zapisuje się w postaci

$$(*\mathrm{w}) \qquad x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Określając iloczyn macierzy o n kolumnach przez wektor wymiaru n o współrzędnych x_i wzorem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

i przyjmując oznaczenia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

układ równań $(*)$ można zapisać w postaci

$$AX = B. \tag{$*$m}$$

Tak więc rozwiązanie układu $(*)$ polega na wyznaczeniu, o ile istnieją, wszystkich wektorów X takich, że wektor wyrazów wolnych B jest iloczynem macierzy współczynników A i wektora X.

Definicja 1.1.2 *Układ równań $AX = B$, który nie ma rozwiązań nazywamy sprzecznym.*

1.2 Redukcja wierszowa macierzy.

Definicja 1.2.1 *Dwa układy m równań z n niewiadomymi nazywamy równoważnymi jeśli mają taki sam zbiór rozwiązań (w szczególności, jeśli oba są sprzeczne).*

Opiszemy teraz trzy operacje na układach równań, które nie zmieniają zbioru rozwiązań i pozwalają zastąpić dany układ równań układem równoważnym o przejrzystej, "schodkowej" strukturze:

- $(\mathrm{I})_{a(i)+(k)}$ dodanie do k-tego równania i-tego równania pomnożonego przez a,
- $(\mathrm{II})_{(i)(k)}$ zamiana miejscami i-tego równania z k-tym,
- $(\mathrm{III})_{c(i)}$ pomnożenie i-tego równania przez liczbę $c \neq 0$.

Twierdzenie 1.2.2 *Wykonanie na układzie równań liniowych jednej z wymienionych wyżej operacji nie zmienia zbioru rozwiązań tego układu.*

Dowód. Teza jest oczywista dla operacji typu (II) i (III). Rozpatrzmy operację $(\mathrm{I})_{a(i)+(k)}$ przeprowadzającą układ $(*)$ na układ $(*)'$, w którym zmienia się jedynie k-te równanie, otrzymane w wyniku dodania stronami do k-tego równania układu $(*)$ równania i-tego, obustronnie pomnożonego przez a.

Jest jasne, że każde rozwiązanie układu $(*)$ jest także rozwiązaniem układu $(*)'$. Ponieważ operacja $(\mathrm{I})_{(-a)(i)+(k)}$ (odwrotna do $(\mathrm{I})_{a(i)+(k)}$) przeprowadza układ $(*)'$ na układ $(*)$, także rozwiązania układu $(*)'$ są rozwiązaniami $(*)$. To pokazuje równoważność obu układów. ■

Przy takich przekształceniach układu równań $AX = B$, celowe jest pomijanie zmiennych i wykonywanie operacji na wierszach *macierzy rozszerzonej* tego układu

$$[A|B] = [A_1, \dots, A_n|B],$$

gdzie A_j są kolejnymi kolumnami macierzy A, B jest dopisaną jako ostatnia kolumną wyrazów wolnych, a kreska oddzielająca B od poprzednich kolumn nie ma formalnego znaczenia i ma jedynie przypominać, że przy przejściu do układu równań, rola ostatniej kolumny jest inna niż pozostałych.

Operacjom na układach równań odpowiadają następujące *operacje elementarne na wierszach macierzy*:

- $(\mathrm{I})_{a(i)+(k)}$ dodanie do k-tego wiersza i-tego pomnożonego przez a,
- $(\mathrm{II})_{(i)(k)}$ zamiana miejscami i-tego wiersza z k-tym,
- $(\mathrm{III})_{c(i)}$ pomnożenie i-tego wiersza przez liczbę $c \neq 0$.

Opiszemy teraz pewne macierze o szczególnie prostej postaci i pokażemy, że każdą macierz można sprowadzić do macierzy takiej postaci operacjami typu (I) i (II), zob. Uwagę 1.2.5.

Definicja 1.2.3 *Mówimy, że macierz jest w postaci schodkowej jeśli spełnione są dwa warunki:*
(S1) żaden wiersz zerowy tej macierzy nie poprzedza wiersza niezerowego,
(S2) pierwsze niezerowe wyrazy (schodki) kolejnych niezerowych wierszy tej macierzy stoją w kolumnach o rosnących numerach.

Twierdzenie 1.2.4 *Dowolną macierz można sprowadzić do postaci schodkowej operacjami elementarnymi typu* (I) *i* (II) *na wierszach tej macierzy.*

Dowód. Niech A będzie $(m \times n)$-macierzą mającą niezerowe wyrazy i niech j_1 będzie numerem pierwszej niezerowej kolumny A. Zamieniając w razie potrzeby wiersze macierzy A miejscami (operacja typu (II)) można otrzymać macierz $\widetilde{A}$ mającą niezerowy wyraz a_{1j_1} w pierwszym wierszu kolumny o numerze j_1:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2j_1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj_1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Odejmując kolejno, dla $i = 2, 3, \dots, m$, od i-tego wiersza macierzy $\widetilde{A}$ pierwszy wiersz pomnożony przez $a_i = \frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}}$ (czyli wykonując operację $(\mathrm{I})_{(-a_i)(1)+(i)}$) otrzymujemy macierz A', w której kolumny o numerach mniejszych niż j_1 są zerowe, a jedynym niezerowym wyrazem w kolumnie o numerze j_1 jest a_{1j_1}:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & a_{1j_1+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{2j_1+1} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{mj_1+1} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}.$$

W następnym kroku powtarzamy tę procedurę dla macierzy A' ignorując wyrazy pierwszego wiersza tej macierzy. Znajdujemy $j_2 > j_1$ i macierz $A'' \in \mathbb{R}^m_n$ (pierwszy wiersz A'' jest taki jak pierwszy wiersz A') taką, że wyraz drugiego wiersza kolumny o numerze j_2 jest niezerowy, a wszystkie wyrazy pod nim oraz wyrazy z wcześniejszych kolumn (z wyjątkiem ignorowanych wyrazów pierwszego wiersza) są zerowe.

Po kolejnych analogicznych krokach dochodzimy do $(m \times n)$-macierzy $A^{(r)}$ w postaci schodkowej mającej w r niezerowych wierszach pierwsze niezerowe wyrazy (schodki) w kolumnach o numerach $j_1 < \dots < j_r$. ∎

Uwaga 1.2.5 W twierdzeniu 1.2.4 można ograniczyć się do operacji typu (I). Operację $(\mathrm{II})_{(1)(i)}$, którą stosowaliśmy przy przejściu od A do $\widetilde{A}$ w przypadku, gdy w kolumnie o numerze j_1 pierwszy wyraz jest zerowy, a i-ty różny od zera, można zastąpić operacją $(\mathrm{I})_{1(i)+(1)}$. Analogicznie można postępować w kolejnych krokach. □

1.3 Eliminacja Gaussa.

Metoda eliminacji Gaussa polega na wykorzystaniu Twierdzenia 1.2.4 do analizy układów równań liniowych.

Niech $AX = B$ będzie układem m równań z n niewiadomymi.

Zgodnie z Twierdzeniem 1.2.4, macierz rozszerzoną $[A|B]$ można zredukować operacjami elementarnymi typu (I) i (II) (ignorując kreskę oddzielającą A i B) do postaci schodkowej $[A'|B']$, przy czym, zgodnie z Twierdzeniem 1.2.2, układy równań $AX = B$ i $AX' = B'$ są równoważne.

Tak więc, należy ustalić, czy układ $A'X = B'$ jest niesprzeczny i jeśli tak – wyznaczyć wszystkie jego rozwiązania.

Załóżmy, że macierz $[A'|B']$ ma r niezerowych wierszy, których pierwsze niezerowe wyrazy stoją w kolumnach o numerach $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$.

Jeśli $j_r = n + 1$ (schodek ostatniego niezerowego wiersza macierzy $[A'|B']$ znajduje się w ostatniej kolumnie B' tej macierzy), to układ $A'X = B'$ (a więc i układ $AX = B$) jest sprzeczny.

W przeciwnym wypadku ($j_r < n + 1$) wszystkie rozwiązania układu $AX = B$ znajdujemy wyznaczając z układu $A'X = B'$ niewiadome $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ (*zmienne zależne*) w zależności od pozostałych niewiadomych, które mogą przyjmować dowolne wartości (*zmienne niezależne, parametry*).

Kolejne zmienne zależne $x_{j_r}, x_{j_{r-1}}, \ldots x_{j_1}$ wyznaczamy wtedy z kolejnych równań układu $A'X = B'$, zaczynając od ostatniego niezerowego (tak więc, w pewnym sensie, wyznaczając kolejne zmienne zależne od ostatniej do pierwszej "wchodzimy po schodkach" układu równań).

Zmienna zależna x_{j_k} wyliczana z k-tego równania zależy wyłącznie od zmiennych niezależnych o numerach większych niż j_k (za zmienne zależne o numerach większych niż j_k podstawiamy znalezione wcześniej zależności).

Uwaga 1.3.1 Rozwiązanie $X \in \mathbb{R}^n$ zależy od $n-r$ współrzędnych X – zmiennych niezależnych i można je przedstawić w postaci (zwanej rozwiązaniem ogólnym układu $AX = B$)

$$X = X_0 + t_1X_1 + t_2X_2 + \ldots + t_pX_p \ ,$$

gdzie $t_1, t_2, \ldots, t_p$ są zmiennymi niezależnymi ($p = (n-r)$ jest liczbą kolumn macierzy A' bez schodków).

W praktyce, zamiast wyliczać rozwiązanie ogólne X, wygodnie jest obliczyć wektory $X_0, X_1, \ldots, X_p$ występujące we wzorze na X, podstawiając za zmienne niezależne odpowiednie wartości:

X_0 jest rozwiązaniem $A'X = B'$ odpowiadającym parametrom $t_j = 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, p$,

X_k jest rozwiązaniem $A'X = \mathbf{0}$ odpowiadającym parametrom $t_k = 1$ oraz $t_j = 0$ dla $j \neq k$

($X_k = (X_0 + X_k) - X_0$ jest rozwiązaniem $A'X = \mathbf{0}$ jako różnica dwóch rozwiązań $A'X = B'$). $\square$