5 Wyznaczniki

Wyznacznik macierzy kwadratowych jest funkcją $\det : \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}$, $(m = 1, 2, \ldots)$ przypisującą każdej macierzy kwadratowej skalar, liniowo ze względu na każdy wiersz osobno i zerującą sie na macierzach mających dwa identyczne wiersze. Jak zobaczymy, te warunki i warunek $\det I_n = 1$ charakteryzują wyznacznik jednoznacznie, przy czym funkcję det można określić przez indukcję ze względu na n.

Zanim przystąpimy do dokładnego opisu wyznacznika, podamy pewną interpretację geometryczną funkcji $\det : \mathbb{R}_3^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Własności wyznacznika zapewniają, że moduł wyznacznika nie zmienia się przy operacjach elementarnych typu (I) i (II) na wierszach macierzy. Tak więc, jeśli $A \in \mathbb{R}_3^3$ jest macierzą odwracalną, a macierz B jest macierzą diagonalną otrzymaną w wyniku operacji elementarnych na wierszach A (zob. dowód Twierdzenia 4.5.6), to $|\det A| = |\det B|$.
Nietrudno sprawdzić, że operacje elementarne redukujące A do B nie zmieniają objętości równoległościanu rozpiętego w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej na wierszach macierzy. Zatem objętości równoległościanów rozpiętych na wierszach A i B są identyczne. Ponieważ wiersze B rozpinają prostopadłościan i $|\det B|$ jest iloczynem modułów wyrazów na przekątnej B – długości jego krawędzi, $|\det B|$ jest objętością tego prostopadłościanu.
W rezultacie widzimy, że $|\det A|$ jest objętością równoległościanu rozpiętego na wierszach macierzy A. Znak wyznacznika wiąże się z orientacją przestrzeni.
Do tej ważnej interpretacji geometrycznej wyznacznika nad ciałem liczb rzeczywistych powrócimy w dalszej części, po wprowadzeniu n-wymiarowych przestrzeni euklidesowych. Najpierw jednak skupimy się na własnościach algebraicznych wyznaczników nad dowolnym ciałem skalarów.

5.1 Definicja i podstawowe własności.

W tej części podamy dowód twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności wyznacznika.

Twierdzenie 5.1.1 *Istnieje dokładnie jedna funkcja* $\det : \mathbb{K}_n^n \longrightarrow \mathbb{K}$ (*zwana wyznacznikiem*) *taka, że*

(1) $$\det \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ cw_k \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = c \det \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$ *dla* $c \in \mathbb{K}$ (*jednorodność względem* k*-tego wiersza,* $k = 1, \ldots, n$),

(2) $$\det \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w'_k + w''_k \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w'_k \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w''_k \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$ (*addytywność względem* k*-tego wiersza,* $k = 1, \ldots, n$),

(3) $\det A = 0$ *jeśli* A *ma dwa sąsiednie wiersze równe.*

(4) $\det I_n = 1$.

Definicja 5.1.2 *Wartość* $\det A$ *funkcji* det *na macierzy* $A \in \mathbb{K}_n^n$ *nazywamy wyznacznikiem* A.

Dowód przeprowadzimy określając najpierw indukcyjnie funkcję spełniającą warunki (1)–(4), a następnie upewniając się, że te warunki określają funkcję det jednoznacznie.

Zaczniemy od uwagi pokazującej, że warunek (3) można wzmocnić żądając by wyznacznik zerował się na macierzach mających dwa równe wiersze. W definicji wyznacznika często podaje się taką mocniejszą wersję warunku (3). Użycie w 5.1.1 słabszej wersji (3) upraszcza dowód istnienia funkcji det.

Uwaga 5.1.3 Niech $\det : \mathbb{K}^n_n \longrightarrow \mathbb{K}$ spełnia warunki (1)–(4) i $A \in \mathbb{K}^n_n$.

(a) Ustalmy $k < l \leqslant n$. Jeśli $\det C = 0$ dla macierzy C takich, że k-ty wiersz C jest równy l-temu i $B \in \mathbb{K}^n_n$ powstaje z A w wyniku zamiany miejscami wiersza k-tego z l-tym, to $\det B = -\det A$.

(b) $\det C = 0$ jeśli C ma dwa wiersze równe.

Uzasadnimy (a). Niech w_k i w_l będą k-tym oraz l-tym wierszem macierzy A. Rozpatrzmy macierze C', C'' i C''', mające k-ty oraz l-ty wiersz równy odpowiednio $w_k + w_l$, w_k i w_l, a pozostałe wiersze identyczne z wierszami A. W (a) zakładamy, że wyznaczniki tych macierzy się zerują, a z (2) dla wierszy k i l mamy $\det C' = \det C'' + \det A + \det B + \det C'''$, czyli $\det A + \det B = 0$, co dowodzi (a).

Z (3) wynika, że założenie w (a) jest spełnione dla $l = k + 1$. Oznacza to, że przestawienie dwóch sąsiednich wierszy zmienia znak wyznacznika. Jeśli C ma dwa wiersze równe, to kilkakrotnie zamieniając dwa sąsiednie wiersze miejscami możemy przekształcić C w macierz A mającą dwa sąsiednie wiersze równe. Z (3) mamy więc $\det C = \pm \det A = 0$. □

Istnienie funkcji det**.**
Załóżmy, że istnieje funkcja $\det : \mathbb{K}^{(n-1)}_{(n-1)} \longrightarrow \mathbb{K}$ spełniająca (1)–(4) (dla $n = 1$ przyjmujemy $\det[a] = a$).

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^n_n$ oznaczmy przez A_{ij} macierz z $\mathbb{K}^{(n-1)}_{(n-1)}$ otrzymaną z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny oraz przyjmijmy

$$d_j(A) = \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

Ustalmy $j = 1, \ldots, n$. Pokażemy, że d_j spełnia warunki (1)–(4) na macierzach z $\mathbb{K}^n_n$ (po upewnieniu się, że (1)–(4) określają wyznacznik jednoznacznie, będziemy także wiedzieć, że $d_j(A)$ nie zależy od j).

Istotnie, jednorodność i addytywność za względu na k-ty wiersz każdego składnika $(-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ wynikają z założenia indukcyjnego dla $i \neq k$, a jeśli $i = k$, to własności te wynikają z faktu, że zmiana k-tego wiersza nie zmienia $\det A_{kj}$, a jedynie a_{kj}.

Dla sprawdzenia własności (3) załóżmy, że k-ty i $(k+1)$-szy wiersz macierzy A są identyczne. Z założenia indukcyjnego zerują się wtedy wszystkie $\det A_{ij}$ dla $i \notin \{k, k+1\}$, więc

$$d_j(A) = (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} + (-1)^{(k+1)+j} a_{k+1\,j} \det A_{k+1\,j} = 0,$$

a ponieważ macierze A_{kj} i $A_{k+1\,j}$ są identyczne, mamy $d_j(A) = 0$.

Własność (4) wynika z równości $d_j(I_n) = (-1)^{j+j} \det(I_n)_{jj} = \det I_{n-1} = 1$.

Jednoznaczność funkcji det **na macierzach elementarnych.**
Niech B będzie macierzą otrzymaną z macierzy A w wyniku operacji elementarnej na wierszach. Zbadamy zależność między $\det A$ i $\det B$.

Warunek (1) oznacza, że $\det B = c \det A$ dla operacji mnożącej k-ty wiersz przez $c \neq 0$.

Z Uwagi 5.1.3 wynika, że $\det B = -\det A$ dla operacji zamieniającej dwa wiersze miejscami.

Pokażemy, że $\det B = \det A$ dla operacji dodającej do k-tego wiersza w_k macierzy A i-ty wiersz w_i tej macierzy pomnożony przez skalar a. Istotnie, z (2) i (1) wynika, że $\det B = \det A + a \det C$, gdzie C jest macierzą mającą k-ty i i-ty wiersz równy w_i, więc $\det C = 0$.

Przypomnijmy, że wykonanie operacji elementarnej na wierszach A daje iloczyn MA, gdzie M jest odpowiednią macierz elementarną, zob. Uwaga 4.5.5. Dla macierzy $A \in \mathbb{K}^n_n$ i macierzy elementarnej $M \in \mathbb{K}^n_n$ mamy więc

$$(*) \qquad \det MA = \begin{cases} \det A & \text{dla } M \text{ dodającej do wiersza inny wiersz pomnożony przez skalar,} \\ -\det A & \text{dla } M \text{ zamieniającej dwa wiersze miejscami,} \\ c \det A & \text{dla } M \text{ mnożącej wiersz przez } c \neq 0. \end{cases}$$

Zastępując A przez I_n, z warunku (4) dostajemy

$$\det M = \begin{cases} 1 & \text{dla } M \text{ dodającej do wiersza inny wiersz pomnożony przez skalar,} \\ -1 & \text{dla } M \text{ zamieniającej dwa wiersze miejscami,} \\ c & \text{dla } M \text{ mnożącej wiersz przez } c \neq 0, \end{cases}$$

czyli $\det MA = \det M \det A$ dla dowolnej macierzy A i macierzy elementarnej M.

Jednoznaczność funkcji det**.**
Jeśli $M_1, \ldots, M_p \in \mathbb{K}_n^n$ są macierzami elementarnymi, to z wzoru $\det MA = \det M \det A$ wynika (przez indukcję ze względu na p), że $\det(M_p \ldots M_1 B) = \det M_p \ldots \det M_1 \det B$ dla $B \in \mathbb{K}_n^n$.

Dla odwracalnej macierzy A wartość $\det A$ jest jednoznacznie wyznaczona i $\det A \neq 0$ (bo z Wniosku 4.5.7 A rozkłada się na iloczyn $A = M_p \ldots M_1$ macierzy elementarnych i przyjmując $B = I_n$ dostajemy $\det A = \det M_p \ldots \det M_1$). Ponadto, $\det AB = \det A \det B$ (bo $\det AB = \det(M_p \ldots M_1 B) = \det M_p \ldots \det M_1 \det B = \det A \det B$).

Dla macierzy A, która nie jest odwracalna, $\det A = 0$ (bo jeśli M jest iloczynem macierzy elementarnych odpowiadających operacjom redukującym A do postaci schodkowej, to ostatni wiersz MA jest zerowy i z (1) dla $k = n$, $c = 0$ mamy $\det(MA) = 0$, ale $\det(MA) = \det M \det A$ i $\det M \neq 0$, bo M jest odwracalna).

Wykazaliśmy więc jednoznaczność i zakończyliśmy dowód Twierdzenia 5.1.1. ■

Uwaga 5.1.4 (a) $\det A \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest odwracalna
(pokazaliśmy to w dowodzie jednoznaczności).

(b) **(Twierdzenie Cauchy'ego)** $\det AB = \det A \det B$ dla $A, B \in \mathbb{K}_n^n$
(pokazaliśmy to dla A odwracalnej; w przeciwnym przypadku $\det AB = 0 = \det A \det B$).

(c) Jeśli macierz A jest odwracalna, to $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
(bo $1 = \det I_n = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1})$). □

5.2 Obliczanie wyznaczników.

Z jednoznaczności w Twierdzeniu 5.1.1 wynika, że $d_j(A) = \det A$ dla funkcji d_j zdefiniowanych w dowodzie istnienia. Otrzymujemy więc

Twierdzenie 5.2.1 (Rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny). *Dla* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_n^n$

$$\det A = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Przykład 5.2.2 Rozwijając względem pierwszej kolumny dostajemy dla $n = 2$ wzór

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

a dla $n = 3$ wzór Sarrusa

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Uwaga 5.2.3 Wyznacznik $(n \times n)$-macierzy dla $n > 3$ można obliczyć zmniejszając wymiar macierzy przy pomocy rozwinięcia Laplace'a, lub redukując tę macierz do postaci schodkowej (macierz kwadratową w postaci schodkowej nazywamy *górnie trójkątną*). Wzory $(*)$ w części 5.1 pozwalają powiązać wyznacznik macierzy wyjściowej z wyznacznikiem macierzy trójkątnej, który łatwo obliczyć korzystając z punktu (a) poniżej.

(a) Wyznacznik macierzy górnie trójkątnej jest iloczynem wyrazów na przekątnej (czyli dla $A = [a_{ij}]$ takiej, że $a_{ij} = 0$ dla $i > j$, $\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$). Istotnie, rozwijając $\det A$ względem pierwszej kolumny dostajemy wzór dający krok indukcyjny dowodu.

(b) Dla macierzy blokowo trójkątnej $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline \mathbf{0} & A_2 \end{array}\right]$, gdzie $A_i \in \mathbb{K}^{n_i}_{n_i}$, mamy $\det A = \det A_1 \det A_2$ (bo zgodnie z Uwagą 1.2.5 macierze $[A_1| *] \in \mathbb{K}^{n_1}_n$ i $[\ \mathbf{0}\ |A_2] \in \mathbb{K}^{n_2}_n$ można doprowadzić do postaci schodkowej operacjami pierwszego rodzaju na wierszach, które nie zmieniają wyznaczników). $\square$

Pokażemy teraz, że przy obliczaniu wyznaczników wiersze odgrywają taką samą rolę jak kolumny, a zera pod przekątna taką samą rolę jak zera nad przekątną.

Twierdzenie 5.2.4 *Dla* $A \in \mathbb{K}^n_n$ $\det A = \det A^T$.

Dowód. Jeśli $\operatorname{rank} A < n$, to $\operatorname{rank} A^T < n$ i oba wyznaczniki są zerami.

Jeśli $\operatorname{rank} A = n$, to z Wniosku 4.5.7, A rozkłada się na iloczyn $A = M_p \ldots M_1$ macierzy elementarnych. Zgodnie z Uwagą 4.7.6 (c), $A^T = M_1^T \ldots M_p^T$, więc korzystając z Uwagi 5.1.4 (b), wystarczy zauważyć, że $\det M = \det M^T$ dla macierzy elementarnych M. ■

Rozwinięcia Laplace'a $\det A^T$ względem i-tej kolumny macierzy A^T daje wzór na rozwinięcie $\det A$ względem i-tego wiersza macierzy A.

Twierdzenie 5.2.5 (Rozwinięcie Laplace'a względem i-tego wiersza). *Dla* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^n_n$

$$\det A = \textstyle\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Wyznacznik pozwala określić znak permutacji, co prowadzi do formuły uogólniającej wzór Sarrusa.

Niech S_n będzie zbiorem wszystkich bijekcji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na siebie – *permutacji*. Każdej permutacji $\pi \in S_n$ odpowiada macierz $E_\pi = [E_{\pi(1)}, E_{\pi(2)}, \ldots, E_{\pi(n)}]$, której wyznacznik $\det E_\pi \in \{1, -1\}$ nazywamy *znakiem permutacji* π i oznaczamy symbolem $\operatorname{sgn}(\pi)$ (łatwo upewnić się, że znak π określa parzystość liczby transpozycji przeprowadzających π na identyczność – dla $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ ta liczba jest parzysta, a dla $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$, nieparzysta).

Twierdzenie 5.2.6 *Dla macierzy* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^n_n$

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \ldots a_{\pi(n)n}.$$

Dowód. Niech $A = [A_1, \ldots, A_n] = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^n_n$. Wtedy $A_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} E_i$ i z liniowości wyznacznika względem kolejnych kolumn mamy

$$\begin{aligned}
\det A = \det[\textstyle\sum_{i=1}^n a_{i1} E_i, \sum_{i=1}^n a_{i2} E_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{in} E_i] &= \\
\textstyle\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \det[E_{i_1}, \sum_{i=1}^n a_{i2} E_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{in} E_i] &= \\
\textstyle\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \det[E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{in} E_i] &= \\
\ldots &= \\
\textstyle\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} \det[E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}]&.
\end{aligned}$$

Teza wynika z faktu, że występujące we wzorze wyznaczniki $\det[E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}]$ są zerowe jeśli $i_j = i_k$ dla pewnych $j \neq k$, więc sumowanie można ograniczyć do ciągów różnowartościowych $(i_1, \ldots, i_n)$, czyli permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$. ■

5.3 Macierz stowarzyszona i wzory Cramera.

Ważną rolę (choć nie przy obliczeniach) odgrywa macierz $\mathrm{adj}A$ stowarzyszona z macierzą kwadratową A, zdefiniowana przy pomocy wyznaczników, która po pomnożeniu przez A daje macierz $\det A \cdot I$. Przy pomocy macierzy stowarzyszonej otrzymuje się *wzory Cramera* opisujące w terminach wyznaczników rozwiązania układów równań $AX = B$ z macierzą odwracalną A (*układy Cramera*).

Ustalmy macierz $A = [A_1, \ldots, A_n] = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^n_n$ i przypomnijmy, że w części 5.1 zdefiniowaliśmy A_{ij} jako macierz otrzymaną z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Definicja 5.3.1 *Macierzą stowarzyszoną z A nazywamy macierz* $\mathrm{adj}A = [\hat{a}_{ij}]^T$, *gdzie* $\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$.

Dla $B \in \mathbb{K}^n$ mamy

$$(**) \qquad \mathrm{adj}A \cdot B = \begin{bmatrix} \det[B, A_2, \ldots, A_n] \\ \det[A_1, B, \ldots, A_n] \\ \vdots \\ \det[A_1, A_2, \ldots, B] \end{bmatrix}.$$

Wzór $(**)$ wynika z Twierdzenia 5.2.1, bo dla $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$

$$\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & \ldots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ (-1)^{1+2}\det A_{12} & \ldots & (-1)^{n+2}\det A_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ (-1)^{1+n}\det A_{1n} & \ldots & (-1)^{n+n}\det A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} b_i \det A_{i1} \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+2} b_i \det A_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} b_i \det A_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det[B, A_2, \ldots, A_n] \\ \det[A_1, B, \ldots, A_n] \\ \vdots \\ \det[A_1, A_2, \ldots, B] \end{bmatrix}.$$

W szczególności $\mathrm{adj}A \cdot A = [\mathrm{adj}A\, A_1, \ldots, \mathrm{adj}A\, A_n] = (\det A) I_n$, więc dostajemy

Twierdzenie 5.3.2 *Jeśli A jest macierzą odwracalną, to* $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}A$.

Rozwiązanie $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$ układu Cramera $AX = B$ ma postać $X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}(\mathrm{adj}A\, B)$. Zatem z $(**)$ dostajemy wzory Cramera:

$$x_1 = \frac{\det[B, A_2, \ldots, A_n]}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det[A_1, B, \ldots, A_n]}{\det A}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det[A_1, A_2, \ldots, B]}{\det A}.$$