Analiza matematyczna I
(skrypt wykładu)

Wydział MIiM UW, 2010/11

wersja z dnia: 1 czerwca 2011

Spis treści

Zamiast wstępu

1. Ten tekst jest *w budowie*. Mogą w nim być różne błędy, zarówno literówki, jak i poważniejsze usterki. Mogą stopniowo pojawiać się pewne (niezbyt wielkie) zmiany układu treści. Wszelkie uwagi Czytelników (w tym sugestie, co zmienić, gdzie warto napisać dokładniejsze wyjaśnienie, gdzie umieścić rysunek itp.) są mile widziane, z góry za nie dziękuję.

2. Kolejne partie tekstu będę starał się publikować na bieżąco, mniej więcej raz w tygodniu, na stronie

   `http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/analiza/`

   (w zakładce z notatkami).

Rozdział 1

Liczby rzeczywiste

Czym zajmuje się Analiza Matematyczna?

Jedna z możliwych ogólnych odpowiedzi na to pytanie jest następująca: badaniem odpowiednio regularnych funkcji, określonych zwykle na podzbiorach przestrzeni wektorowych[1]. Do najważniejszych zagadnień w Analizie należą zatem:

- sposoby definiowania tych funkcji oraz opis ich własności;
- badanie różnych typów procesów, które wiążą się z matematycznym opisem ciągłych zmian (przejścia graniczne, różniczkowanie, całkowanie);
- badanie wielu zastosowań powyższej teorii w innych obszarach, np. w geometrii, fizyce, ekonomii, biologii.

W najprostszym przypadku chodzi o funkcje jednej zmiennej rzeczywistej. Podczas pierwszego roku studiów matematycznych praktycznie nie będziemy się stykać z istotnie bardziej zaawansowanymi działami Analizy.

A jak powstaje typowa teoria matematyczna?

We współczesnej matematyce typowa teoria ma budowę aksjomatyczną. To znaczy, że wprowadzamy pewne *pojęcia pierwotne*, których nie definiujemy; zakładamy natomiast, że między tymi pojęciami zachodzą pewne określone związki, wyrażone za pomocą *aksjomatów* (inaczej nazywanych *pewnikami*). Na tej podstawie budujemy resztę teorii.

Ponieważ mamy zajmować się funkcjami zmiennej rzeczywistej, więc rozpoczniemy cały wykład od podania pojęć pierwotnych i aksjomatów teorii liczb rzeczywistych, oraz omówienia ich najważniejszych konsekwencji.

1.1 Aksjomatyka liczb rzeczywistych

Pojęcia pierwotne teorii liczb rzeczywistych są następujące: dany jest *zbiór liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$ z dwoma wyróżnionymi elementami, 0 i 1 (przy czym $0 \neq 1$), *relacja nierówności* $<$, oraz dwa działania, *dodawanie* i *mnożenie*, przypisujące każdej parze liczb $x, y \in \mathbb{R}$ ich *sumę* $x + y$ oraz *iloczyn* $x \cdot y = xy$.

[1] Z pojęciem przestrzeni wektorowej Czytelnik tych notatek zetknie się na wykładach Geometrii z Algebrą Liniową.

Uwaga. Czytelnik, jeśli tylko chce, może sobie wyobrażać jako $\mathbb{R}$ zbiór punktów osi liczbowej, o której uczono go w szkole. Relacja nierówności, zero i jedynka, suma i iloczyn też nieprzypadkowo są oznaczane tak, jak w szkole. Zamiast mówić *liczba* $x \in \mathbb{R}$, będziemy czasem mówić *punkt* $x \in \mathbb{R}$

Aksjomaty teorii liczb rzeczywistych wygodnie jest podzielić na trzy grupy: aksjomaty ciała przemiennego, aksjomaty porządku, oraz aksjomat ciągłości.

1.1.1 Aksjomaty ciała przemiennego

Pierwsza grupa aksjomatów orzeka, że liczby rzeczywiste tworzą *ciało przemienne*. Chodzi o opis kluczowych własności dodawania i mnożenia.

Oto własności dodawania:

A.1 (Przemienność dodawania). Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $x + y = y + x$.

A.2 (Łączność dodawania). Dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A.3 (Charakteryzacja zera). Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest $x + 0 = x$.

A.4 (Istnienie elementów przeciwnych). Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje element $-x \in \mathbb{R}$, taki, że $x + (-x) = 0$.

Mnożenie ma podobną listę własności:

A.5 (Przemienność mnożenia). Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $xy = yx$.

A.6 (Łączność mnożenia). Dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(xy)z = x(yz)$.

A.7 (Charakteryzacja jedynki). Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest $x \cdot 1 = x$.

A.8 (Istnienie elementów odwrotnych). Dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, istnieje element $x^{-1} \in \mathbb{R}$, taki, że $x \cdot x^{-1} = 1$.

Ostatni aksjomat z tej grupy mówi o tym, jaki jest związek dodawania z mnożeniem.

A.9 (Rozdzielność mnożenia względem dodawania). Dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $x(y + z) = xy + xz$.

1.1.2 Aksjomaty porządku

N.1 (Prawo trichotomii). Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi *dokładnie jedna* z trzech możliwości:

$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x.$$

N.2 (Przechodniość). Dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$, jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$.

N.3 (Związki nierówności z działaniami). Dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$:

(a) jeśli $x < y$, to $x + z < y + z$;

(b) jeśli $x < y$ i $0 < z$, to $xz < yz$.

Z tych dwóch grup aksjomatów można wyprowadzić wszystkie szkolne reguły arytmetyki, definiując po drodze dwa pozostałe działania, odejmowanie i dzielenie (przez liczbę różną od zera). Są wśród tych reguł m.in. następujące:

(W1) Elementy przeciwne i odwrotne są określone jednoznacznie. Ponadto, $-(-x) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, a $(x^{-1})^{-1} = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

(W2) Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden element $x \in \mathbb{R}$ taki, że $a + x = b$.

(W3) Jeśli $xy = x$ i $x \neq 0$, to $y = 1$.

(W4) Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ z równości $xy = 0$ wynika, że $x = 0$ lub $y = 0$.

(W5) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $x \cdot 0 = 0$.

(W6) Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, istnieje dokładnie jeden element $x \in \mathbb{R}$ taki, że $ax = b$.

(W7) Dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b zachodzą równości $(-a)b = a(-b) = -ab$.

(W8) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $0 \leq x^2$; przy tym $x^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. W szczególności,
$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$$

Uwaga notacyjna. Czytelnik zauważył może, że w ostatniej własności pojawił się symbol $\leq$, dotychczas niezdefiniowany, ani nie wymieniony wśród pojęć pierwotnych. Zgodnie z naturalnym oczekiwaniem, przyjmujemy dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b, że

(i) $a \leq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$ lub $a < b$;

(ii) $a \geq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \leq a$;

(iii) $a > b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b < a$.

Dla przykładu przeprowadzimy

Dowód własności (W5). Ustalmy dowolną liczbę $x \in \mathbb{R}$. Z aksjomatu A.3 wynika, że $1+0 = 1$. Mnożąc obie strony przez x i stosując wskazane aksjomaty, otrzymujemy

$$x \overset{\text{A.7}}{=} x \cdot 1 = x(1+0) \overset{\text{A.9}}{=} x \cdot 1 + x \cdot 0 \overset{\text{A.7}}{=} x + x \cdot 0, \tag{1.1}$$

a zatem

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &\overset{\text{A.3}}{=} x \cdot 0 + 0 \overset{\text{A.4}}{=} x \cdot 0 + (x + (-x)) \overset{\text{A.1 i A.2}}{=} x + x \cdot 0 + (-x) \\ &\overset{(1.1)}{=} x + (-x) \qquad \text{(wiemy już, patrz (1.1), że } x + x \cdot 0 = x) \\ &\overset{\text{A.4}}{=} 0\,, \end{aligned}$$

co było do udowodnienia. □

Nie będziemy przeprowadzać dowodów wszystkich własności z listy (W1)–(W8). Dowody nie są zbyt skomplikowane, a treść tych własności powinna być Czytelnikowi dobrze znana. Przykładowe dowody takich własności pojawią się na ćwiczeniach. Podkreślmy inną rzecz: warto i należy zdawać sobie sprawę, że podana lista aksjomatów A.1–A.9 i N.1–N.3, wystarcza, by wyprowadzić z niej *wszystkie* pozostałe reguły arytmetyki, zdefiniowawszy wcześniej odejmowanie $x - y := x + (-y)$ i dzielenie $x/y := x \cdot y^{-1}$ dla $y \neq 0$. To oznacza, że reguły z listy (W1)–(W8) czy np. szkolne prawo rozdzielności dzielenia względem odejmowania nie są już, jak aksjomaty, kwestią umowy, a tym bardziej opinii nauczyciela, zapisanej w kolorowych ramkach. Są *konieczną* konsekwencją aksjomatów.

1.1.3 Pojęcie kresu górnego i aksjomat ciągłości

Ostatni aksjomat, który jest nam potrzebny, ma inny charakter od aksjomatów ciała i porządku. Dotyczy nie pojedynczych liczb rzeczywistych, ani ich par czy trójek, tylko podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych. Sformułowanie tego aksjomatu poprzedzimy definicjami ograniczenia górnego i kresu górnego.

Definicja 1.1. Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest ograniczeniem górnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in A$ jest $x \leq M$.

Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, gdy ma choć jedno ograniczenie górne. Na przykład przedział domknięty $[0, 1]$ jest ograniczony z góry. Jego ograniczeniami górnymi są m.in. liczby 1, 10, 2010 i 2010^{2010}.

Definicja 1.2. Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

(i) M jest ograniczeniem górnym A,

(ii) jeśli M' jest ograniczeniem górnym A, to $M \leq M'$.

Kres górny zbioru oznaczamy symbolem ‘sup’ (od łacińskiego *supremum*) i piszemy $M = \sup A$. Definicję kresu górnego niepustego zbioru liczb rzeczywistych można sformułować na inne, równoważne sposoby:

- $M = \sup A$ wtedy i tylko wtedy, gdy M jest *najmniejszym* ograniczeniem górnym zbioru A;
- $M = \sup A$ wtedy i tylko wtedy, gdy M jest ograniczeniem górnym zbioru A i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $x \in A$ taki, że $M - \varepsilon < x$.

Sprawdzenie równoważności tych definicji pozostawiamy jako proste ćwiczenie. Podobnie, łatwo jest sprawdzić, posługując się tylko definicją, że

$$\sup\{a\} = a \quad \text{dla każdego } a \in R, \qquad \sup\big([a, b]\big) = b \quad \text{dla wszystkich } a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

Teraz możemy już sformułować zapowiedziany aksjomat ciągłości.

Aksjomat ciągłości (Dedekinda). *Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny $M = \sup A \in \mathbb{R}$.*

Uwaga. Analogicznie do ograniczenia górnego i kresu górnego definiuje się ograniczenie dolne zbioru liczb i kres dolny niepustego zbioru liczb $A \subset \mathbb{R}$. Kres dolny oznaczamy symbolem ‘inf’, od łacińskiego *infimum*. Liczba $\inf A$ jest największym ograniczeniem dolnym niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$. Sformułowanie ścisłych definicji pozostawiamy jako ćwiczenie.

Zbiór, który ma ograniczenie dolne, nazywa się ograniczny z dołu. Mówimy, że zbiór jest ograniczony, gdy jest ograniczony z góry i z dołu.

Wygodnie jest przyjąć następującą dodatkową umowę, która w wielu sytuacjach jest naturalna: $\sup A = +\infty$, gdy A nie jest ograniczony z góry, oraz $\inf A = -\infty$, gdy A nie jest ograniczony z dołu. Ponadto,

$$\sup \emptyset = -\infty, \qquad \inf \emptyset = +\infty,$$

gdzie symbol $\emptyset$ oznacza zbiór pusty.

1.1.4 Podzbiory $\mathbb{R}$

Wielokrotnie będziemy spotykać następujące podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, skądinąd dobrze Czytelnikowi znane: zbiór *liczb naturalnych*,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},$$

zbiór *liczb całkowitych*[2],

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

oraz zbiór *liczb wymiernych*

$$\mathbb{Q} = \{p/q : \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0\} .$$

O kluczowych własnościach zbioru $\mathbb{N}$ i jednym z możliwych sposobów aksjomatycznego wprowadzenia tego zbioru opowiemy w następnym podrozdziale. Teraz sformułujemy twierdzenie, z którego wynika, że zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest istotnie mniejszy, niż zbiór liczb rzeczywistych. Zbiór $\mathbb{Q}$, z naturalnymi działaniami "na ułamkach" i szkolną relacją mniejszości, spełnia wprawdzie (jak nietrudno sprawdzić, choć nie jest to zajęcie szczególnie pasjonujące) wszystkie aksjomaty ciała i porządku. Jednak $\mathbb{Q}$ nie spełnia aksjomatu ciągłości: nie każdy ograniczony z góry zbiór liczb wymiernych ma kres górny, który jest liczbą wymierną.

Twierdzenie 1.3. *Zbiór liczb niewymiernych, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, jest niepusty.*

Dowód podamy już teraz, choć niektóre występujące w nim liczby nie zostały jeszcze w sposób ścisły zdefiniowane. Czytelnik zna je jednak pewnie ze szkoły, a ich ścisłe określenia pozna w ciągu najbliższych tygodni na wykładzie.

Dowód 1. Wykażemy, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną. Przypuśćmy na chwilę, że jest przeciwnie i $\sqrt{2} = p/q$, gdzie p i q są całkowite, $q \neq$. Ponieważ $\sqrt{2}$ jest dodatni, więc możemy bez zmniejszenia ogólności założyć, że p i q są liczbami naturalnymi. Możemy także założyć, w razie potrzeby skracając licznik i mianownik ułamka p/q, że p i q są względnie pierwsze, tzn. nie mają żadnego wspólnego dzielnika większego niż 1.

Jeśli $\sqrt{2} = p/q$, to $2 = p^2/q^2$, a więc $2q^2 = p^2$. Liczby p^2 i $2q^2$, zapisane w systemie dziesiątkowym, muszą więc mieć tę samą ostatnią cyfrę. Zbadajmy, jakie są wszystkie możliwości, wypisując ostatnią cyfrę każdej z liczb q, q^2 i $2q^2$ w tabelce:

[2]Symbol $\mathbb{Z}$, na ogół nie używany w polskiej szkole, za to powszechnie używany przez matematyków na całym świecie, pochodzi od niemieckiego słowa *Zahlen*, liczby.

$q \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q^2 \pmod{10}$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$2q^2 \pmod{10}$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

(Symbol $k \pmod{10}$ oznacza resztę z dzielenia k przez 10, czyli właśnie ostatnią cyfrę liczby k w zapisie dziesiątkowym. Każdy, kto zna szkolny algorytm mnożenia pisemnego, może sam sprawdzić, dlaczego tabelka jest taka, a nie inna).

Ale ostatnia cyfra liczby p^2 musi być jedną z cyfr środkowego wiersza tej tabelki. I musi być taka sama, jak ostatnia cyfra $2q^2$. Jedyna możliwość to

$$p^2 \equiv 2q^2 \equiv 0 \pmod{10}.$$

Nietrudno jednak stwierdzić, że wtedy zarówno p, jak i q, dzielą się przez 5. Jest to sprzeczność, gdyż wiemy, że p i q nie mają wspólnych dzielników większych od 1. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $\sqrt{2}$ nie może być liczbą wymierną, co kończy dowód. □

Dowód[3] 2. Początek rozumowania jest taki sam, jak w pierwszym dowodzie. Zakładamy, że $\sqrt{2} = p/q$ jest liczbą wymierną, gdzie p i q są naturalne i nie mają wspólnych dzielników większych od 1.

Jak wcześniej, z równości $\sqrt{2} = p/q$ wynika, że $2q^2 = p^2$. Dalszy ciąg rozumowania jest nieco inny. Lewa strona tej równości jest parzysta, więc prawa też. Skoro p^2 jest liczbą parzystą, to i p jest parzyste (gdyby bowiem p było nieparzyste, to p^2 także byłoby nieparzyste: przecież jeśli $p = 2k + 1$, to $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$). Zatem $p = 2k$ dla pewnego k naturalnego. W takim razie,

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

to zaś oznacza, że $q^2 = 2k^2$. Liczba q^2 jest więc parzysta. Zatem q jest liczbą parzystą, $q = 2l$ dla pewnego l naturalnego. Stwierdziliśmy więc, że p i q dzielą się przez 2, a to jest sprzeczność. Sprzeczność wzięła się z założenia, że $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, więc ostatecznie $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Dowód 3. Wykażemy, że liczba $x = \log 2$ (gdzie logarytm bierzemy przy podstawie 10), czyli taka liczba dodatnia x, która spełnia równość $10^x = 2$, nie jest wymierna.[4]

Przypuśćmy, że $x = \log 2 = p/q$, gdzie p i q są naturalne. Wtedy $10^{p/q} = 2$. Podnosząc obie strony do potęgi q, dostaniemy $10^p = 2^q$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{N}$. To jednak jest oczywista sprzeczność, gdyż jedna z tych liczb dzieli się przez 5, a druga nie.

1.2 Liczby naturalne i zasada indukcji zupełnej

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich takich podzbiorów $A \subset \mathbb{R}$, które spełniają jednocześnie dwa warunki:

1. $1 \in A$;
2. Jeśli liczba rzeczywista $x \in A$, to $x + 1 \in A$.

[3] W pradawnych czasach Rzeczypospolitej Drugiej i Pół ten dowód poznawali wszyscy uczniowie ósmej klasy szkoły podstawowej.

[4] Czytelnik być może uczył się o logarytmach w szkole; za kilka tygodni zobaczymy, jak zdefiniować logarytm w sposób ścisły.

Nietrudno sprawdzić, że np. zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, a także zbiór $\mathbb{R}_+$, należą do rodziny $\mathcal{A}$. Nietrudno sobie także wyobrazić wiele – nieskończenie wiele! – innych zbiorów, należących do tej rodziny: bierzemy liczbę 1 i dowolną "chmurkę" punktów z przedziału $(1,2)$, a następnie tworzymy sumę przesuniętych kopii takiego zbioru. Innymi słowy, bierzemy zbiór

$$B \subset [1,2) \quad \text{taki, że } 1 \in B,$$

i kładziemy

$$A = B \cup (1+B) \cup (2+B) \cup \ldots,$$

gdzie $k+B = \{k+x : x \in B\}$.

Znany skądinąd zbiór liczb naturalnych można, uprawiając aksjomatyczną teorię liczb rzeczywistych, określić następująco.

Definicja 1.4. $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ dla każdego zbioru } A \in \mathcal{A}\}$.

Inaczej mówiąc, zbiór liczb naturalnych to część wspólna wszystkich zbiorów należących do rodziny $\mathcal{A}$.

Stwierdzenie 1.5. *Zbiór $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry.*

Dowód. Liczba $1 \in \mathbb{N}$, więc $\mathbb{N}$ jest niepusty. Postawmy hipotezę, przeczącą tezie, tzn. przypuśćmy, że $\mathbb{N}$ jest ograniczony z góry. Zgodnie z aksjomatem ciągłości, zbiór $\mathbb{N}$ ma wtedy kres górny $b = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.

Z definicji kresu, $b \geq n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Z drugiej własności wszystkich zbiorów rodziny $\mathcal{A}$ wynika, że $b \geq n+1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Stąd jednak $b-1 \geq n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc $b-1$ jest ograniczeniem górnym $\mathbb{N}$. Ponownie korzystając z definicji kresu górnego – z drugiego podanego w niej warunku – stwierdzamy, że

$$b - 1 \geq \sup \mathbb{N} = b,$$

a zatem $-1 \geq 0$, czyli $0 \geq 1$. To jest sprzeczność, więc przyjęta hipoteza musiała być fałszywa. Zbiór $\mathbb{N}$ nie jest zatem ograniczony z góry. □

Wniosek 1.6 (aksjomat Archimedesa)**.** *Dla dowolnych liczb dodatnich $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje taka liczba naturalna n, że $an > b$.*

Dowód. Gdyby $an \leq b$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to liczba b/a byłaby ograniczeniem górnym $\mathbb{N}$. Wiemy już jednak, że zbiór $\mathbb{N}$ *nie jest* ograniczony z góry. □

Omówimy teraz ważną metodę dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych, tak zwaną zasadę indukcji matematycznej (zwaną także zasadą indukcji zupełnej).

Twierdzenie 1.7. *Przypuśćmy, że pewna własność W przysługuje pewnym liczbom naturalnym, przy czym spełnione są dwa warunki:*

(i) *$W(1)$, tzn. własność W przysługuje liczbie 1;*

(ii) *Jeśli $W(n)$, to także $W(n+1)$.*

Wówczas własność W przysługuje wszystkim liczbom naturalnym.

Dowód. Niech A będzie zbiorem wszystkich tych liczb naturalnych, którym przysługuje własność W, tzn.

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \ W(n)\} .$$

Oczywiście $A \subset \mathbb{N}$. Pokażemy teraz, że A należy do rodziny $\mathcal{A}$.

Z założenia (i) mamy $1 \in A$, tzn. spełniony jest pierwszy z warunków z definicji rodziny $\mathcal{A}$. Ponadto, jeśli $x \in A$, to zachodzi $W(x)$, więc na mocy założenia (ii) zachodzi także $W(x+1)$, a to znaczy, że $x+1 \in A$. Spełniony jest więc również drugi warunek z definicji rodziny $\mathcal{A}$.

Zatem $A \in \mathcal{A}$. Ponieważ $\mathbb{N}$ jest częścią wspólną wszystkich zbiorów rodziny $\mathcal{A}$, więc $\mathbb{N} \subset A$.

Otrzymaliśmy więc dwie inkluzje: $A \subset \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \subset A$. To oznacza, że $A = \mathbb{N}$. □

Spójrzmy teraz na przykłady zastosowań zasady indukcji zupełnej w konkretnych dowodach. Pierwszy z nich będzie bardzo prosty, dwa pozostałe – wyraźnie trudniejsze.

Stwierdzenie 1.8 (nierówność Bernoulliego)**.** *Dla każdej liczby rzeczywistej $a \geq -1$ i dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność*

$$(1+a)^n \geq 1 + na .$$

Dowód. Ustalmy dowolne $a \geq -1$.

Etap 1 (baza indukcji). Sprawdzamy, co się dzieje dla $n = 1$. Zarówno lewa, jak i prawa strona są wtedy równe $1 + a$, więc nierówność Bernoulliego zachodzi dla $n = 1$.

Etap 2 (krok indukcyjny). Załóżmy, że $(1+a)^n \geq 1+na$. Wykażemy, że wtedy $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$.

Z aksjomatu N.3(b) i własności $x \cdot 0 = 0$ wynika, że obie strony nierówności nieostrej wolno pomnożyć przez liczbę nieujemną. Ponieważ $1 + a \geq 0$, więc z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) &\geq (1+na)(1+a) \\
&= 1 + na + a + na^2 \\
&\geq 1 + na + a \qquad \text{gdyż } na^2 \geq 0 \text{ dla wszystkich } n \text{ i } a \\
&= 1 + (n+1)a.
\end{aligned}$$

Etap 3 (konkluzja). Stwierdziliśmy, że nierówność Bernoulliego zachodzi dla liczby $n = 1$, a także, że jeśli zachodzi dla liczby n, to zachodzi i dla $n + 1$. Zatem, zgodnie z zasadą indukcji zupełnej, nierówność Bernoulli'ego zachodzi dla każdej liczby naturalnej n. Teza stwierdzenia wynika z dowolności $a \geq -1$. □

Uwaga. Proszę sprawdzić, że równość w nierówności Bernoulliego zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$ lub $a = 0$.

Dla potrzeb drugiego przykładu zdefiniujemy najpierw średnią arytmetyczną i geometryczną n liczb rzeczywistych nieujemnych. Jeśli $a_1, a_2, \ldots a_n \geq 0$, to kładziemy

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \qquad G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} .$$

A_n to *średnia arytmetyczna* liczb $a_1, \ldots, a_n$ (tu założenie o nieujemności nie jest potrzebne; definicja średniej arytmetycznej ma sens dla dowolnych liczb rzeczywistych, niekoniecznie nieujemnych), natomiast G_n jest *średnią geometryczną* liczb nieujemnych $a_1, \ldots, a_n$.

(Pierwiastki dowolnego stopnia z liczb nieujemnych zdefiniujemy ściśle po omówieniu przykładów dowodów indukcyjnych. Teraz wystarczy nam wiedza, że $\sqrt[n]{0} = 0$, a dla $x > 0$ liczba $y = \sqrt[n]{x}$ jest dodatnia i ma tę własność, że $y^n = x$).

Twierdzenie 1.9 (nierówność między średnimi)**.** *Dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność*

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} = G_n\,.$$

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek nietrywialny, gdy wszystkie a_i są dodatnie. (Gdy choćby jedna z liczb a_i jest zerem, to oczywiście $G_n = 0 \leq A_n$).

Baza indukcji. Dla $n = 1$ mamy jedną liczbę nieujemną a_1. Teza jest prawdziwa, gdyż wtedy $A_1 = a_1 = G_1$.

Krok indukcyjny. Załóżmy, że dla pewnego m naturalnego nierówność

$$\frac{b_1 + \cdots + b_m}{m} \geq (b_1 \ldots b_m)^{1/m}$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Wykażemy, że przy takim założeniu dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$ jest $A_{m+1} \geq G_{m+1}$.

Będziemy dowodzić równoważnej nierówności $A_{m+1}^{m+1} \geq G_{m+1}^{m+1}$. Skorzystamy z nierówności Bernoulliego, ale nie zrobimy tego od razu.

Z uwagi na przemienność dodawania i mnożenia mamy prawo założyć, że $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m \leq a_{m+1}$. Wtedy, ponieważ średnia arytmetyczna m składników nie przekracza największego z tych składników, mamy

$$A_m = \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m} \leq \frac{m a_m}{m} = a_m \leq a_{m+1}\,. \tag{1.2}$$

Zapiszmy teraz średnią A_{m+1} w nieco innej postaci:

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= \frac{mA_m + a_{m+1}}{m+1} \\ &= A_m + \frac{a_{m+1} - A_m}{m+1}, \qquad \text{gdyż } \tfrac{m}{m+1} = 1 - \tfrac{1}{m+1}, \\ &= A_m \left(1 + \underbrace{\frac{a_{m+1} - A_m}{(m+1)A_m}}_{a} \right) \end{aligned}$$

(wypisując ostatnią linijkę, po prostu wyłączyliśmy A_m przed nawias).

Z nierówności (1.2) wynika, że

$$a = \frac{a_{m+1} - A_m}{(m+1)A_m} \geq 0 \geq -1,$$

a to znaczy, że nierówność Bernoulliego można stosować do szacowania potęg sumy $(1+a)$ z dołu. Piszemy teraz

$$\begin{aligned} A_{m+1}^{m+1} &\geq A_m^{m+1}(1+a)^{m+1} \\ &\geq A_m^{m+1}(1+(m+1)a) \qquad \text{(tu użyliśmy nierówności Bernoulliego)} \\ &= A_m^{m+1}\left(1+\frac{a_{m+1}-A_m}{A_m}\right) = A_m^m a_{m+1} \\ &\geq G_m^m a_{m+1} \qquad \text{(tu użyliśmy założenia indukcyjnego)} \\ &= (a_1a_2\ldots a_m)a_{m+1} = G_{m+1}^{m+1}. \end{aligned}$$

Zatem, $A_{m+1} \geq G_{m+1}$. Stąd, na mocy zasady indukcji zupełnej, wynika już teza twierdzenia. $\square$

Uwaga. Czytelnik może się zastanawiać: skąd było wiadomo, że aby wykazać nierówność między średnimi, trzeba rozumować akurat tak? Na takie pytania często nie ma łatwych odpowiedzi. Tu akurat można było zauważyć, że dla dużych $a_1 = a_2 = \ldots$ lewa strona nierówności $A_m^m \geq G_m^m$ rośnie wykładniczo wraz z m i *spróbować* szacowania (z dołu) czegoś rosnącego wykładniczo przez coś, co rośnie zaledwie liniowo – do tego służy nierówność Bernoulliego. Reszta powyższego dowodu polega na stosunkowo prostych przekształceniach, potrzebnych, by A_{m+1}^{m+1} przekształcić do odpowiedniej postaci.

Podamy teraz drugi dowód nierówności między średnimi, po to, żeby zilustrować, że rozumowania indukcyjne mogą mieć bardzo różny charakter. Dla zobrazowania zasady indukcji zupełnej używa się często porównania z kostkami domina: jeśli wiadomo, że kostki domina są ustawione w rzędzie, na tyle blisko, że każda z nich, upadając, przewróci następną, to przewrócenie pierwszej kostki spowoduje przewrócenie wszystkich. W następnym dowodzie ustawienie kostek będzie bardzo fantazyjne: takie, że dla każdego n kostka n-ta przewraca kostkę o numerze $2n$, a kostka k-ta przewraca kostkę z numerem $(k-1)$.

Dowód. Jak wcześniej, założymy, że wszystkie a_i są dodatnie. Dowód ma trzy cześci.

Po pierwsze, sprawdzamy, że $A_1 \geq G_1$ (to oczywiste) i $A_2 \geq G_2$. Druga nierówność jest równoważna innej, $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0$.

Po drugie, wykażemy, że jeśli nierówność między średnimi zachodzi dla dowolnych liczb $b_1,\ldots,b_n > 0$, to zachodzi także dla dowolnych liczb $a_1,\ldots,a_{2n} > 0$. Istotnie, korzystając najpierw (dwukrotnie) z nierówności między średnimi dla n liczb, a potem z nierówności $A_2 \geq G_2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}+\frac{a_{n+1}+\cdots+a_{2n}}{n}\right) \\ &\geq \frac{(a_1\ldots a_n)^{1/n}+(a_{n+1}\ldots a_{2n})^{1/n}}{2} \\ &\geq \sqrt{(a_1\ldots a_n)^{1/n}(a_{n+1}\ldots a_{2n})^{1/n}} \\ &= G_{2n}. \end{aligned}$$

(Komentarz: teraz wiemy, że nierówność między średnimi zachodzi dla n liczb, gdy $n \in \{1,2,4,8,16,\ldots\}$. Te wartości n stanowią *zdobyte przyczółki*.)

Po trzecie, dowodzimy, że jeśli nierówność między średnimi zachodzi dla $n+1$ liczb dodatnich, to zachodzi także dla n liczb dodatnich. Piszemy

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{n}{n+1}A_n + \frac{1}{n+1}A_n \\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+A_n}{n+1} && \text{w liczniku jest } n+1 \text{ liczb} \\ &\geq (a_1\cdot\ldots\cdot a_n\cdot A_n)^{1/(n+1)}, && \text{z nierówności dla } n+1 \text{ liczb,} \\ &= G_n^{n/(n+1)}A_n^{1/n+1}. \end{aligned}$$

Dzielimy obie strony przez $A_n^{1/n+1}$, podnosimy do potęgi $(n+1)$ i otrzymujemy $A_n^n \geq G_n^n$.

(Komentarz: teraz wiemy, że z każdego zdobytego wcześniej przyczółka, tzn. od każdej z wartości $n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$, można cofać się jednostkowymi krokami.)

Z trzech części dowodu wynika już teza twierdzenia. □

Zadanie 1.10. Analizując wybrany dowód nierówności między średnimi, wykazać, że $A_n = G_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$ lub $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

1.3 Pierwiastki n-tego stopnia

Posługiwaliśmy się już pierwiastkami n-tego stopnia z liczb nieujemnych. Aby mieć pewność, że wolno było tak postępować, udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.11. *Dla każdej liczby $a \geq 0$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba $b \geq 0$ taka, że $b^n = a$.*

Dowód twierdzenia poprzedzimy sformułowaniem pomocniczego faktu.

Lemat 1.12 (wzór na różnicę n-tych potęg)**.** *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ i wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość*

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})\,. \tag{1.3}$$

Szkic dowodu. To jest nieznacznie przekształcony wzór na sumę skończonego postępu geometrycznego. Gdy $y = 0$, nie ma czego dowodzić; obie strony są równe x^n. Jeśli $y \neq 0$, to dzieląc obie strony (1.3) przez y^n i kładąc $q = x/y$, otrzymujemy równoważny tezie lematu wzór

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + 1)\,.$$

Nietrudno jest udowodnić go przez indukcję. Można także po prostu "otworzyć nawiasy" i zaobserwować, że prawa strona jest równa

$$q^n + \underbrace{(-q^{n-1}) + q^{n-1}}_{=0} + \underbrace{(-q^{n-2}) + q^{n-2}}_{=0} + \cdots + \underbrace{(-q) + q}_{=0} - 1,$$

czyli po prostu $q^n - 1$, gdyż każda ze wskazanych par składników ma sumę zero.

Dowód Twierdzenia 1.11. Zaczniemy od wykazania *jednoznaczności* pierwiastków n-tego stopnia. Gdyby dla pewnego $a \geq 0$ było $b^n = b_1^n = a$, gdzie $b, b_1 \geq 0$, to byłoby wtedy

$$0 = b^n - b_1^n = (b - b_1)\underbrace{(b^{n-1} + b^{n-2}b_1 + \cdots + b_1^n)}_{=(\text{ozn.})\ M}$$

Zatem, $b - b_1 = 0$ lub $M = 0$ (jeden z czynników musi znikać). W pierwszym przypadku mamy $b = b_1$. W drugim przypadku, ponieważ $b, b_1 \geq 0$, liczba M jest sumą n nieujemnych składników. Równość $M = 0$ może zachodzić jedynie wtedy, gdy każdy z tych składników jest zerem, czyli jedynie wtedy, gdy $b = b_1 = 0$.

W obu przypadkach mamy więc $b = b_1$. Dla każdego $a \geq 0$ istnieje zatem *co najwyżej jedna* liczba $b \geq 0$ taka, że $b^n = a$.

Teraz zajmiemy się istnieniem. Dla $a = 1$ wystarczy wziąć $b = 1$, a dla $a = 0$ – $b = 0$. Jeśli już udowodnimy twierdzenie dla wszystkich liczb $a > 1$, to dla $a \in (0,1)$ będzie można postąpić następująco: jeśli $a \in (0,1)$, to $a^{-1} > 1$, więc istnieje pierwiastek n-tego stopnia z a^{-1}, tzn. liczba b_1 taka, że $b_1^n = a^{-1}$. Wtedy jednak liczba $b = b_1^{-1}$ spełnia równość

$$b^n = \left(b_1^{-1}\right)^n = (b_1^n)^{-1} = (a^{-1})^{-1} = a,$$

tzn. jest pierwiastkiem n-tego stopnia z a.

Wystarczy więc rozważyć przypadek $a > 1$. Tym się teraz zajmiemy. Niech

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ x^n \leq a\}\,.$$

Jeśli $x \in S$, to $x \leq a$, bowiem w przeciwnym przypadku mielibyśmy $x^n > a^n > a > 1$, a to jest sprzeczność z definicją zbioru S. Liczba a jest więc ograniczeniem górnym zbioru S, a ponadto $1 \in S$, bo $1 = 1^n < a$.

Z aksjomatu ciągłości wynika, że zbiór S ma kres górny $b = \sup S$. Musi zachodzić jeden z trzech przypadków,

$$b^n < a, \qquad b^n > a, \qquad b^n = a.$$

Pokażemy, że pierwsza i druga możliwość prowadzą do sprzeczności.

Przypuśćmy, że $b^n < a$. Rozważmy liczbę $b + \varepsilon$; niewielką liczbę dodatnią $\varepsilon \in (0,a)$ dobierzemy za chwilę. Z lematu otrzymujemy

$$\begin{aligned}(b+\varepsilon)^n - b^n &= \varepsilon\left((b+\varepsilon)^{n-1} + (b+\varepsilon)^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\right)\\ &< \varepsilon \cdot n(b+a)^{n-1}\end{aligned}$$

(każdy z n składników w nawiasie szacujemy z góry przez $(b+a)^{n-1}$). Biorąc dowolną liczbę

$$0 < \varepsilon < \frac{a - b^n}{n(b+a)^{n-1}}\,,$$

przekonujemy się, że $(b+\varepsilon)^n - b^n < a - b^n$, tzn. $(b+\varepsilon)^n < a$, a więc $b + \varepsilon \in S$. Stąd $b + \varepsilon \leq \sup S = b$, czyli $\varepsilon \leq 0$, sprzeczność.

Przypuśćmy zatem, że $b^n > a$. Rozważając tym razem $b - \delta$, gdzie δ jest małą liczbą dodatnią, otrzymujemy, ponownie stosując Lemat,

$$b^n - (b-\delta)^n = \delta\left(b^{n-1} + b^{n-2}(b-\delta) + \cdots + (b-\delta)^{n-1}\right) < \delta \cdot nb^{n-1} < b^n - a,$$

o ile tylko $0 < \delta < (b^n - a)/nb^{n-1}$ (wtedy mamy prawo napisać ostatnią nierówność). To jednak oznacza, że

$$(b-\delta)^n > a.$$

Z definicji zbioru S mamy więc $(b-\delta)^n > x^n$ dla każdego $x \in S$, czyli $b - \delta \geq \sup S = b$. Stąd $-\delta \geq 0$, jednak liczbę δ wybraliśmy wcześniej dodatnią! Ta sprzeczność oznacza, że przypadek $b^n > a$ także nie może zachodzić.

Została tylko jedna możliwość: $b^n = a$. □

Uwaga. Wygodnie jest przyjąć następującą dodatkową umowę: jeśli $a < 0$, natomiast $n = 2k+1$ jest liczbą naturalną nieparzystą, to kładziemy

$$a^{1/n} = -(-a)^{1/n}.$$

Wtedy rzeczywiście $(a^{1/n})^n = a$, co wynika z przemienności mnożenia i stąd, że $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = -1$. Nietrudno zauważyć, że dla $n = 2k$ analogiczna umowa nie miałaby sensu: parzysta potęga liczby rzeczywistej b, $b^{2k} = (b^k)^2$ jest nieujemna, co wynika z własności (W8), patrz strona 3.

1.4 Liczby całkowite. Entier. Gęstość zbioru liczb wymiernych i niewymiernych

Jak już wiemy, zbiór liczb całkowitych jest określony następująco

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}).$$

Przytoczymy bez dowodu dwa twierdzenia, opisujące własności zbioru $\mathbb{Z}$.

Twierdzenie 1.13. *Jeśli $k \in \mathbb{Z}$, to w przedziale otwartym $(k, k+1)$ nie ma żadnej liczby całkowitej, tzn. $(k, k+1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.*

Twierdzenie 1.14. *Jeśli zbiór niepusty $A \subset \mathbb{Z}$ jest ograniczony z góry (odpowiednio: z dołu), to w A istnieje element największy (odpowiednio: najmniejszy).*

Każde z tych twierdzeń[5] można sprowadzić do odpowiednich własności zbioru liczb naturalnych, których dowodzi się, stosując zasadę indukcji zupełnej. Nie będziemy tego robić; szczegóły pozostawiamy zainteresowanemu Czytelnikowi.

Definicja 1.15 (Entier, czyli część całkowita liczby rzeczywistej)**.** Dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ określamy

$$[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} : \ k \leq x\}. \tag{1.4}$$

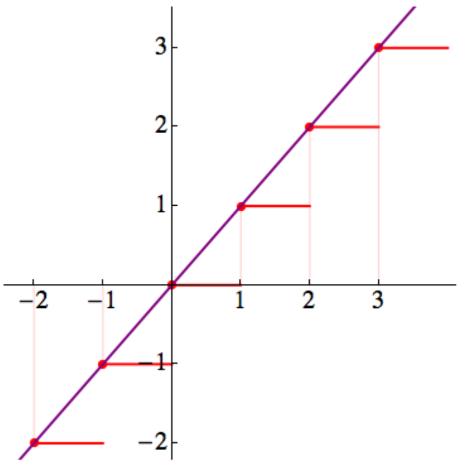
Zatem, na przykład, $[7] = 7 = -[-7]$, $[\frac{1}{3}] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, ale $[-\sqrt{2}] = -2$, gdyż największą liczbą całkowitą nie przekraczającą $-1{,}4142\ldots = -\sqrt{2}$ jest właśnie -2.

Stwierdzenie 1.16. *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ liczba $[x]$ jest całkowita i spełnia nierówności*

$$[x] \leq x < [x] + 1. \tag{1.5}$$

Dowód. Odpowiednie własności $[x]$ *widać* na załączonym rysunku.

[5] Nawiasem: ze szkolnego, a także zdroworozsądkowego punktu widzenia oba twierdzenia są, praktycznie biorąc, oczywiste – tzn. wyrażają nasze bardzo naturalne intuicje związane z *wyglądem* zbioru liczb całkowitych.



Funkcja entier i funkcja $f(x) = x$**.** Lewy koniec każdego z poziomych odcinków wykresu $[x]$ należy do tego wykresu, a prawy – nie.

Oto niedługi dowód, dla zainteresowanych formalizacją. To, że $[x] \in \mathbb{Z}$, wynika z definicji cześci całkowitej i własności zbioru $\mathbb{Z}$, wyrażonej w Twierdzeniu 1.14: zbiór

$$K = \{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$$

jest ograniczony z góry przez x, a liczba $[x]$ jest największym elementem K. Mamy $[x] \le x$ wprost z definicji supremum. Gdyby $[x] + 1 \le x$, to byłoby

$$\sup K = [x] < [x] + 1 \in K,$$

a to jest sprzeczność z definicją supremum. $\square$

Wiemy już zatem (z grubsza), co to są liczby rzeczywiste, naturalne, całkowite i wymierne. Wiemy też, że istnieją liczby niewymierne; jedną z nich jest $\sqrt{2}$. Sformułujmy jeszcze jedną ważną własność, którą ma zarówno zbiór $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych, jak i zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liczb niewymiernych.

Definicja 1.17. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywa się gęsty, jeśli dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, istnieje element $a \in A$ taki, że $x < a < y$.

Twierdzenie 1.18. *Zarówno zbiór $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych, jak i zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liczb niewymiernych, są gęste w $\mathbb{R}$.*

Mówiąc inaczej, w każdym przedziale otwartym prostej rzeczywistej jest jakaś liczba wymierna i jakaś liczba niewymierna.

Dowód. Ustalmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ takie, że $x < y$. Najpierw wskażemy liczbę wymierną w, która należy do przedziału (x, y).

Wiemy, że $[nx] \le nx < [nx] + 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\frac{[nx]}{n} \le x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} =: w\,.$$

Ponieważ $[nx] \in \mathbb{Z}$, więc $w \in \mathbb{Q}$. Pozostaje dobrać n tak, żeby $w < y$, ale to nietrudne: mamy $[nx]/n \le x$, a zatem

$$w = \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} \le x + \frac{1}{n}\,.$$

Wystarczy więc, gdy $x + \frac{1}{n} < y$, a tak jest dla dowolnej liczby $n > 1/(y - x)$ (proszę zauważyć, że korzystamy tu z dwóch faktów: $y - x > 0$, więc $1/(y - x) > 0$, a ponadto zachodzi aksjomat Archimedesa).

Uwaga. Ta część dowodu wyraża prostą intuicję: jeśli wyruszamy z punktu $0 \in \mathbb{R}$ i idziemy krokami długości $1/n$, to stąpamy tylko po liczbach wymiernych i nie możemy ominąć żadnej "dziury" dłuższej niż $1/n$.

Teraz wskażemy liczbę niewymierną z taką, że $x < w < z < y$. Połóżmy

$$z = w + \frac{\sqrt{2}}{m}, \qquad \text{gdzie } m \in \mathbb{N}.$$

Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ mamy $z > w$ (to oczywiste), a ponadto $z \notin \mathbb{Q}$, bowiem w przeciwnym przypadku mielibyśmy $\sqrt{2} = m(z - w) \in \mathbb{Q}$, a wiemy, że $\sqrt{2}$ jest niewymierny. Pozostaje tylko dobrać m tak, żeby $z < y$, ale to nietrudne: ponieważ $w < y$, więc $z < y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt{2}/(y - w) < m$. Bierzemy więc jako m dowolną liczbę naturalną, która jest większa od $\sqrt{2}/(y - w)$. $\square$

Uwaga. Z Twierdzenia 1.18 wynika, że w każdym przedziale otwartym prostej rzeczywistej jest nieskończenie wiele liczb wymiernych i nieskończenie wiele liczb niewymiernych (Czytelnik zechce się zastanowić, dlaczego tak jest). W istocie, jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym zbiorem gęstym, to do każdego przedziału otwartego należy nieskończenie wiele elementów zbioru A.

Na zakończenie tej partii wykładu podamy jeszcze jeden dowód istnienia liczb niewymiernych – dowód Dedekinda niewymierności pierwiastków niecałkowitych. To ilustracja, jak wiele można wywnioskować z najprostszych reguł arytmetyki i jednej własności zbioru $\mathbb{N}$: *w każdym niepustym zbiorze $A \subset \mathbb{N}$ istnieje element najmniejszy.*

Twierdzenie 1.19. *Jeśli $n, k \in \mathbb{N}$ i $k \geq 2$, to $x = n^{1/k}$ jest albo liczbą naturalną, albo liczbą niewymierną.*

Dowód. Aby lepiej zilustrować najważniejszy pomysł dowodu, rozpatrzymy najpierw przypadek $k = 2$.

Przypuśćmy, że $0 < x = \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, ale jednak $x \in \mathbb{Q}$. Wtedy zbiór

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \ mx \in \mathbb{N}\}$$

jest niepusty; to wynika wprost z definicji zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Niech m_0 będzie najmniejszym elementem A; wtedy oczywiście $m_0 x = l \in \mathbb{N}$.

Połóżmy $m_1 = m_0(x - [x])$. Z nierówności $0 < x - [x] < 1$ (pamiętajmy: x nie jest liczbą całkowitą) wynika, że $0 < m_1 < m_0$. Ponadto,

$$m_1 = m_0 x - m_0[x] = l - m_0[x] \in \mathbb{Z}\,,$$

a więc m_1 jest liczbą naturalną, bo $m_1 > 0$. Wreszcie, mamy

$$0 < m_1 x = m_0 x^2 - m_0 x[x] = m_0 n - l[x] \in \mathbb{Z}\,,$$

a więc liczba $m_1 x$ też jest naturalna. To oznacza, że $m_1 \in A$ i $m_1 < m_0$, a przy tym m_0 jest *najmniejszym* elementem w zbiorze A. Otrzymaliśmy sprzeczność, która oznacza, że $x = \sqrt{n}$ nie może być liczbą wymierną. To kończy dowód twierdzenia w przypadku $k = 2$.

Pokażemy teraz, jak rozważyć przypadek ogólny. Załóżmy, że $x = n^{1/k} \notin \mathbb{N}$. Przypuśćmy, że $x \in \mathbb{Q}$; pokażemy, że to założenie prowadzi do sprzeczności. Niech

$$B = \{s \in \mathbb{N} : \ x^s \in \mathbb{N}\}\,.$$

Zbiór $B \subset \mathbb{N}$ jest niepusty ($k \in B$, bowiem $x^k = n$), więc zawiera element najmniejszy s_0; przy tym $s_0 > 1$, gdyż $1 \notin B$. Oznaczmy

$$x^{s_0} = n_0\,. \tag{1.6}$$

Rozważmy zbiór

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \text{ wszystkie liczby } mx, mx^2, \ldots, mx^{s_0-1} \text{ są naturalne}\}.$$

Jest to zbiór niepusty, gdyż $x, x^2, \ldots, x^{s_0-1}$ są liczbami wymiernymi. Niech m_0 będzie najmniejszym elementem zbioru A. Dla wygody oznaczmy

$$m_0 x = l_1 \in \mathbb{N}, \quad m_0 x^2 = l_2 \in \mathbb{N}, \quad \ldots, \quad m_0 x^{s_0-1} = l_{s_0-1} \in \mathbb{N}\,.$$

Ponieważ s_0 to najmniejszy element zbioru B, więc

$$0 < \varepsilon := x^{s_0-1} - \left[x^{s_0-1}\right] < 1$$

(liczba x^{s_0-1} nie jest naturalna, gdyż wtedy $s_0 - 1$ należałoby do B). Połóżmy $m_1 = \varepsilon m_0$. Wtedy $0 < m_1 < m_0$. Ponadto,

$$0 < m_1 = m_0\varepsilon = m_0 x^{s_0-1} - m_0\left[x^{s_0-1}\right] = l_{s_0-1} - m_0\left[x^{s_0-1}\right] \in \mathbb{Z}\,,$$

więc m_1 jest liczbą naturalną. Wreszcie, nietrudno sprawdzić, że

$$m_1 x \in \mathbb{N}, \quad m_1 x^2 \in \mathbb{N}, \quad \ldots, \quad m_1 x^{s_0-1} \in \mathbb{N}\,.$$

Istotnie, niech j będzie dowolną z liczb $1, 2, \ldots, s_0 - 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} m_1 x^j = m_0 \varepsilon x^j &= m_0 x^{j-1} x^{s_0} - m_0 x^j \left[x^{s_0-1}\right] \\ &\overset{(1.6)}{=} m_0 x^{j-1} n_0 - l_j \left[x^{s_0-1}\right] \\ &= \begin{cases} m_0 n_0 - l_1 \left[x^{s_0-1}\right] & \text{gdy } j = 1, \\ l_{j-1} n_0 - l_j \left[x^{s_0-1}\right] & \text{gdy } j > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

a więc $m_1 x^j$ jest liczbą całkowitą. Do tego oczywiście $m_1 x^j > 0$, więc $m_1 x^j$ jest liczbą naturalną. Zatem, z definicji zbioru A i dowolności j, liczba $m_1 \in A$.

Otrzymaliśmy więc

$$m_0 = \inf A > m_1 \in A\,.$$

Jest to sprzeczność, która kończy dowód. $\square$

Ktoś, komu powyższy dowód wydaje się nie tylko pomysłowy, ale i trudny, powinien pamiętać, że o niewymierności $\sqrt{2}$ wiadomo od dwóch i pół tysiąca lat, a Dedekind swój artykuł *Was sind und was sollen die Zahlen?* publikował, jako pięćdziesięcioparolatek, w roku 1888.

Nie należy się dziwić, jeśli nie rozumiemy w ciągu pół godziny czegoś, na co inni potrzebowali wielu lat.