Rozdział 12

Algorytm FFT

W tym rozdziale przedstawimy zadania laboratoryjne, w których przetestujemy dyskretną transformatę Fouriera (DFT) oraz szybki algorytm jej obliczania, czyli algorytm szybkiej trasformaty Fouriera; FFT (ang. Fast Fourier Transform)

W opisie matematycznym przyjmujemy, że mamy do czynienia z wektorami okresowymi o okresie długości N indeksowanymi od zera i $x_k = x_{k+N}$ dla k ujemnych.

Przez $\mathcal{F}_N x$ oznaczymy wynik działania operatora DFT na wektorze x, a przez $\mathcal{F}_N^{-1} x$ oznaczymy wynik działania operatora odwrotnego do DFT na wektorze x.

Zadanie 1 Funkcja octave'a z algorytmem FFT **fft** (), która oblicza wartość DFT i funkcja octave'a z algorytmem odwrotnym FFT **ifft** (), która oblicza wartość transformaty odwrotnej do DFT.

Sprawdź, czy rzeczywiście operacje wykonywane przez **fft** () i **ifft** () są do siebie odwrotne, tzn. dla różnych losowych wektorów x o długości $N = 4, 8, 16, 32$ policz $y = \mathcal{F}_N x$ za pomocą **fft** (), a następnie $z = \mathcal{F}_N^{-1} y$ za pomocą **ifft** ().

Policz normy drugie różnicy $z - x$.

Zadanie 2 Skalowanie w funkcjach octave'a **fft** () i **ifft** ().

W literaturze zdarza się definicja DFT bez $1/N$ przed macierzą. Wtedy macierz odwrotną do DFT należy przemnożyć przez N albo obie przez $1/\sqrt{N}$.

Sprawdź, jaka jest stała przed DFT obliczanym przez funkcję

fft (), tzn. wyznacz C_N takie, że

$$(\mathcal{F}_N x)_j = C_N \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp(-2\pi * j * k/N)$$

dla $\mathcal{F}_N x$ obliczanego przez tę funkcję octave'a .

Zadanie 3 Sprawdź, czy DFT obliczona przy pomocy funkcji **fft** () spełnia

$$\|\mathcal{F}_N x\|_2 = C_N \|x\|_2$$

ze stałą C_N dla stu losowych wektorów x, oraz czy analogicznie odwrotna DFT obliczona **ifft** () spełnia:

$$\|\mathcal{F}_N^{-1} y\|_2 = C_N^{-1} \|x\|_2.$$

Zadanie 4 Algorytm szybkiego mnożenia wielomianów.

Napisz funkcję octave'a

```
function w=polymult(p,q)
```

szybko mnożącą dwa wielomiany stopnia nie większego od N, dla których znamy ich współczynniki w bazie potęgowej. Funkcja powinna korzystać z DFT i odwrotnej DFT, czyli dyskretnej transformaty Fouriera i odwrotnej dyskretnej transformaty Fouriera.

Parametry funkcji powinny być:

- wektor $p = (p_k)_k$ ze współczynnikami wielomianu $P(x) = \sum_k p_k x^k$,
- wektor $q = (q_k)_k$ ze współczynnikami wielomianu $Q(x) = \sum_k q_k x^k$.

Funkcja powinna zwrócić współczynniki wielomianu $W(x) = P(x) * Q(x) = \sum_k w_k x^k$.

Sprawdź działanie funkcji dla wielomianów $P(x) = 1+x$ i $Q(x) = 2+x$, czyli $(P*Q)(x) = 2+3x+x^2$, a potem dla wielomianów dużych stopni, czyli np. dla $Q(x) = x^{50}$ i $P(X) = x^{50}+1$ funkcja powinna zwrócić współczynniki wielomianu $(P*Q)(x) = x^{100} + x^{50}$.

Porównaj czas obliczeń tej funkcji z wynikiem funkcji octave'a **conv**() dla wielomianów różnych stopni z losowymi współczynnikami.

Zadanie 5 DFT a dyskretny splot dwóch wektorów.

Napisz dwie funkcje obliczające splot dwóch wektorów $z = x \star y$

- wprost z definicji, tzn. $z_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_k y_{k-j}$
- z wykorzystaniem DFT - tu musimy skorzystać z tego, że

$$(\mathcal{F}_N(x \star y))_k = \alpha_N(\mathcal{F}_N x)_k * (\mathcal{F}_N y)_k \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

  dla pewnej stałej α_N. Trzeba tę stałą wyznaczyć teoretycznie albo eksperymentalnie.

  Przetestuj obie funkcje dla losowych wektorów i różnych $N = 4, 8, 64, 1024$. Porównaj z wynikami funkcji octave'a **conv**(). Należy zapoznać się z pomocą do tej funkcji.

Zadanie 6 Filtry a DFT.

W niektórych zastosowaniach współczynniki wektora x mogą odpowiadać próbkom sygnału (np. dźwięku). Stosuje się wtedy filtry w postaci splotu x z zadanym wektorem F pełniącym rolę filtru: $x \star F$.

Rozważmy filtr postaci $F = \frac{1}{4} * (1, 1, 1, 1, 0, \ldots, 0)^T$ (pierwsze cztery współrzędne są równe $\frac{1}{4}$, pozostałe - zero).

Zastosuj ten filtr do wektora imitującego próbki sygnału z szumem: $z = x + y$, gdzie $x_k = \sin(k * h)$ dla $h = 2 * \pi/N$ - imituje sygnał bez szumów, a y jest wektorem losowym o wartościach w $[-0.1, 0.1]$ imitującym losowe zaburzenie, czyli tzw. szumy. Przetestuj filtr dla dużych N, np. $N = 1024$ lub 2048, tzn.:

- Narysuj wykres z przed zastosowaniem filtra i po zastosowaniu, tzn. wykresy z i $z \star F$. Można narysować mały fragment wykresu, np dla $100 \leq k \leq 120$. Jaki efekt optyczny widać na wykresach?
- Policz maksimum z modułu różnicy kolejnych elementów obu wektorów, tzn. $\max_{k>0} |z_k - z_{k-1}|$ i $\max_{k>0} |(z \star F)_k - (z \star F)_{k-1}|$. Im ta wartość dla danego wektora z próbkami sygnału jest mniejsza, tym sygnał jest gładszy, czyli możemy uznać go za sygnał z mniejszą ilością szumów.

Projekty zaliczeniowe