Rozdział 3

Obliczenia w arytmetyce zmiennopozycyjnej

Zadania z tego rozdziału powinny wykazać pewne charakterystyczne własności arytmetyki zmiennopozycyjnej.

W octavie wykorzystywane są domyślnie liczby zmiennopozycyjne o podwójnej precyzji, jakkolwiek w najnowszych wersjach octave'a można również sztucznie wymusić używanie zmiennych w precyzji pojedynczej przy pomocy funkcji single (a) zwracającej zmienną pojedynczej precyzji z tą samą wartością.

Jedną z ważnych własności arytmetyki zmiennopozycyjnej, która wynika z jej konstrukcji, jest to, że odejmowanie dwóch wartości o tym samym znaku o małej różnicy może skutkować dużą utratą dokładności względnej.

Zadanie 1 **Funkcje single (a) i eps.** Wywołaj pomoc do tych funkcji w octave'ie. Sprawdź, czy prawdą jest, że $1 + eps$ obliczone w arytmetyce podwójnej precyzji w octave'ie jest większe od jeden. Przyjmij, że $a = single(eps)$ i sprawdź, czy ponownie $1 + a$ jest większe od jeden.

Zadanie 2 **Epsilon maszynowy w arytmetyce podwójnej precyzji**

Wyznacz samodzielnie epsilon maszynowy - czyli najmniejszą liczbę w arytmetyce zmiennopozycyjnej taką, że po dodaniu jej do jeden otrzymujemy liczbę większą od jeden. Będziemy szukali liczby postaci 2^{-t} dla t - ilości bitów mantysy. Porównaj z **eps** komendą octave'a. Zadanie można też wykonać w C/C++. Czy otrzymane wyniki są takie same jak te otrzymane w octavie (dla liczb typu double)?

Zadanie 3 **Epsilon maszynowy w arytmetyce pojedynczej precyzji**
Powtórz poprzednie zadanie dla arytmetyki pojedynczej precyzji. Funkcja octave'a single (x) tworzy zmienne takiego typu. Wykorzystując tę funkcję ponownie wyznacz epsilon maszynowy jako liczbę postaci 2^{-t}, ale dla liczb w pojedynczej precyzji.

Zadanie 4 Narysuj wykres funkcji $f(x) = (x + a) - a$ na $[0, 1]$ dla różnych wartości $a = 10^k$ dla $k = 1, 2, .., 20$. Tutaj ważne jest aby obliczać wartość $f(x)$ dokładnie ze wzorów: $b = (x - a)$, $f(x) = b - a$, choć matematycznie $f(x) = x$.

Zadanie 5 Policz

$$f(x) = x - \sqrt{1 + x * x}$$

algorytmem wprost wynikającym z tego wzoru, a następnie z wykorzystaniem równoważnego wzoru

$$f(x) = \frac{-1}{x + \sqrt{1 + x * x}}$$

tzn. proszę zastosować:

Algorytm 1

$$a = \sqrt{1 + x^2} \quad w_1 = x - a$$

oraz

Algorytm 2

$$a = \sqrt{1 + x^2} \quad w_2 = \frac{-1}{x + a}$$

dla $x = 10^k$ i $k = 4, \ldots, 10$. Czy widać różnicę w wyniku?

Powtórz zadanie w arytmetyce pojedynczej precyzji, tzn. z wykorzystaniem funkcji octave'a single (x).

Zadanie 6 **Wykres wielomianu na dwa sposoby**

Oblicz wartości wielomianu

$$(x - 2)^4 = x^4 - ..... + 16$$

na siatce równomiernej 1000 punktowej na $[2 - a, 2 + a]$ dla $a = 10^{-3}$ za pomocą dwóch algorytmów:
Algorytm 1

$$a = (x - 2), \quad f_1(x) = a^4;$$

Algorytm 2

$$f_2(x) = x * x * x * x - \ldots + 16.$$

Matematycznie $f_1 \equiv f_2$, ale wyniki obliczone w arytmetyce zmiennopozycyjnej mogą się różnić.

Narysuj wykresy obu funkcji i policz błąd $\|f_1(x) - f_2(x)\|_\infty$, czyli $\max_k |f_1(x(k) - f_2(x(k))|$. Tu $x(k) = 2 - a + k * h$ dla $h = a/500$. Wektor x można utworzyć w octavie przy pomocy funkcji octave'a **linspace**().

Zadanie 7 Powtórz poprzednie zadanie dla arytmetyki pojedynczej precyzji, tzn. powtórz obliczenia wielomianu $(x-2)^4 = x^4 - ..... + 16$ na odcinku $[2-a, 2+a]$ dla $a = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-4}$ dla zmiennych w pojedynczej precyzji uzyskanych za pomocą funkcji octave'a: single (x). Narysuj wykresy wielomianu obliczanego obydwoma algorytmami.

Zadanie 8 Przybliżenie $\exp(x)$ z rozwinięcia w szereg $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$. Za odpowiednią aproksymacje $\exp(x)$ bierzemy najpierw sto pierwszych elementów szeregu czyli przybliżamy $\exp(x)$ przez

$$F_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!},$$

dla $N = 100$, a potem przybliżamy przez tysiąc elementów szeregu, czyli ustalamy $N = 1000$.

Sprawdź błąd względny $|F_N(x) - \exp(x)|/|\exp(x)|$ dla x od -100 do 100 (np. dla liczb różniących się o dziesięć, czyli $-100 + k*10$ dla $k = 0, \ldots, 20$) dla obu wartości N.

Czy błędy dla liczb ujemnych i dodatnich są tego samego rzędu?

Jak zmodyfikować powyższą metodę przybliżonego obliczania funkcji eksponencjalnej $\exp(x)$ dla $x << 0$ tak aby błąd względny był na tym samym poziomie co dla $x > 0$?

Zadanie 9 Policz całki $I_n = \int_0^1 x^n/(5+x)dx$ $n = 0, .., 20$ dwoma algorytmami ze wzoru

$$I_n + 5 * I_{n-1} = 1/n$$

Pierwszy algorytm przyjmuje $I_0 = \log(6/5)$ i oblicza z powyższego wzoru kolejne

$$I_n = 1/n - 5 * I_{n-1}$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Drugi algorytm wykorzystuje fakt, że

$$\frac{1}{(n+1)6} \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)5} \tag{3.1}$$

W tym algorytmie przyjmujemy za I_{30} jakąkolwiek wartość z tego przedziału np. $I_{30} = 1/180$ i iterujemy w tył, tzn. dla $n = 30, 29, \ldots, 20, \ldots, 0$ obliczamy

$$I_{n-1} = \frac{1}{5}(1/n - I_n).$$

Porównaj wyniki obu algorytmów dla $0 \leq n \leq 20$ oraz sprawdź czy wyniki otrzymane w octave'ie spełniają oszacowanie (3.1) dla $n = 1, \ldots, 20$.

Dlaczego jeden z algorytmów działa zdecydowanie lepiej w arytmetyce zmiennopozycyjnej?

Jako dodatkowe zadanie teoretyczne pozostawimy uzasadnienie wzoru rekurencyjnego i oszacowania (3.1) wykorzystywanych w algorytmach.

Zadanie 10 Zastosuj algorytm bisekcji (algorytm połowienia odcinka) dla funkcji $(x-2)^3$ liczonej z wzoru na rozwinięcie dwumianu $x^3 - \ldots - 8$ startując z $a = 2 - 10^{-3}$ a $b = 2 + 10^{-3}$. Jako warunek zakończenia działania algorytmu przyjmujemy, że błąd jest mniejszy od 10^{-20} (za przybliżenie rozwiązania przyjmujemy środek danego odcinka w metodzie bisekcji, czyli warunkiem zakończenia iteracji jest to, że długości odcinka, w którym jest rozwiązanie powinna być mniejsza od $2 * 10^{-20}$).

Czy algorytm zwraca przybliżenie liczby dwa jedynego pierwiastka tego wielomianu?

Narysuj wykresy tej funkcji obliczone z obu wzorów. tzn. $(x-2)^3$ i $x^3 - \ldots - 8$ na odcinkach $2 + [-h, 2*h]$ dla $h = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$. Czy z wykresów wynika, że ten wielomian ma tylko jedno miejsce zerowe w otoczeniu dwa?