Rozdział 4

Interpolacja Lagrange'a, bazy wielomianów

W tym rozdziale zajmiemy się interpolacją wielomianową. Zadanie interpolacji wielomianowej polega na znalezieniu wielomianu stopnia nie większego od n, spełniającego $n+1$ warunków interpolacyjnych.

W octave'ie istnieje funkcja znajdująca współczynniki wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a. Jest to funkcja **polyfit**(), czyli funkcja obliczająca współczynniki wielomianu interpolacyjnego w bazie potęgowej dla zadanych wartości i węzłów. Z kolei funkcja **polyval**() jest funkcją obliczającą wartość wielomianu zadanego poprzez współczynniki w bazie potęgowej w jednym lub równocześnie wielu punktach - czyli wektorowo. Co ważne, obie funkcje są ze sobą zgodne. Trzeba uważać na kolejność współczynników; octave numeruje współczynniki w bazie potęgowej

$$(x^j)_{j=0}^n$$

przestrzeni wielomianów stopnia nie większego od n w odwrotnej kolejności tzn.

$$(x^n, x^{n-1}, \ldots, 1)$$

czyli np. wektor współczynników $(3, 2, 1)$ odpowiada wielomianowi $3x^2+2x+1$. Oczywiście stopnień wielomianu, a dokładniej: dla jakiego n rozpatrujemy bazę potęgową dla tego wektora, jest długością wektora współczynników pomniejszoną o jeden.

Zadanie 1 Zapoznaj się z pomocą octave'a do funkcji octave'a **polyval**(). Oblicz wartość wielomianu $x^{50}-1$ dla $x=-1,0,1$.

Zadanie 2 Korzystając z funkcji **polyval**() narysuj wykres wielomianu x^3+x-2 bez wykorzystania pętli - czyli wektorowo.

Zadanie 3 Test funkcji **polyfit**().

Zapoznaj się z pomocą octave'a do funkcji octave'a **polyfit**().

Wykorzystując funkcję **polyfit**() znajdź wielomian interpolacyjny L_nF dla funkcji $F(x) = \sin(x)$ dla węzłów $-1, 0, 1$. Policz wartości różnicy $F - L_nF$ w węzłach oraz korzystając z funkcji **plot**() narysuj wykresy F i L_nF na jednym rysunku.

Wykonaj powtórnie to zadanie ale dla węzłów $-1, 0, 1, 10$.

Oblicz wartości wielomianu bez użycia pętli z wykorzystaniem funkcji **polyval**().

Zadanie 4 Interpolacja Lagrange'a - zbieżność ciągu wielomianów interpolacyjnych dla węzłów równoodległych i węzłów Czebyszewa:

- Wykorzystując funkcję **polyfit**() znajdź wielomiany interpolacyjne L_Nf dla funkcji $f = \sin()$ dla N węzłów równoodległych na $[0, 2*\pi]$ dla $N = 4, 8, 16, 32, 64$.
- Oblicz dyskretną normę maksimum różnicy $f - L_Nf$ na siatce tysiąca równoodległych punktów na tym odcinku, tzn. $e_N = \max|f(x_k) - L_Nf(x_k)|$, gdzie x_k to punkty siatki. Policz stosunek e_N/e_{2N} dla $N < 64$.

  Czy błędy maleją do zera? Jak zachowuje się e_N/e_{2N}?

  Siatkę tysiąca równoodległych punktów na odcinku $[a, b]$ najprościej utworzyć z wykorzystaniem funkcji octave'a: **linspace**(a,b,1000).
- Narysuj na ekranie wykresy $\sin(x)$ i tych wielomianów dla różnych N - używając funkcji **polyval**() i **plot**().

Zadanie 5 Powtórz zadanie 4 dla tej samej funkcji i tego samego odcinka dla węzłów Czebyszewa. Węzły Czebyszewa to pierwiastki wielomianu:

$$T_{n+1}(t) = \cos((n+1)\arccos(t))$$

na $[-1, 1]$ odpowiednio przesunięte i przeskalowane.

Przetestuj, czy błędy e_N dla węzłów Czebyszewa są mniejsze niż dla węzłów równoodległych.

Zadanie 6 Napisz funkcję znajdującą współczynniki w bazie potęgowej wielomianu interpolacyjnego zadanego stopnia dla węzłów równoodległych oraz węzłów Czebyszewa dla danej funkcji, odcinka $[a, b]$, tzn. napisz funkcję octave'a (w m-pliku):

```
function [LN,eN]=LagrInterp(FCN,a,b,N,type=0)
```

która dla parametrów:

- zadanego wskaźnika funkcyjnego FCN (ang. *function handle*) do funkcji jednego argumentu: **function** y=f(x),
- a, b - końców odcinka $[a, b]$,
- N - stopnia wielomianu interpolacyjnego
- **type** - typu węzłów 0 - równoodległych, 1 - Czebyszewa

zwróci wektor LN - współczynniki $L_N f$ wielomianu interpolującego funkcję w tych węzłach oraz eN przybliżenie dyskretnej normy maksimum różnicy $L_N f - f$ na tym odcinku.

Przybliżenie normy maksimum liczymy na dyskretnej siatce zawierającej tysiąc punktów.

Zadanie 7 Powtórz zadanie 4 dla obu typów węzłów, tzn. powtórz znajdowanie wielomianów interpolacyjnych na węzłach równoodległych i węzłach Czebyszewa dla funkcji

$$f(x) = \log(1 + x)$$

na odcinkach

- $[0, 1]$,
- $[0, 10]$.

Czy dla tej funkcji i obu odcinków błędy w normach maksimum maleją wraz ze wzrostem N? Porównaj wyniki otrzymane w tym zadaniu w obliczeniach z oszacowaniami teoretycznymi błędu interpolacji Lagrange'a.

Zadanie 8 Interpolacja Lagrange'a - przykład Rungego. Powtórz zadanie 4 dla obu typów węzłów, tzn. znajdowanie wielomianów interpolacyjnych na węzłach równoodległych i węzłach Czebyszewa, ale dla funkcji:

$$f(x) = 1/(1 + x * x)$$

na $[-5, 5]$.

Czy obliczone wyniki wskazują na to, że obliczone ciągi wielomianów interpolacyjnych zbiegają do f jednostajnie dla obu typów węzłów?

Zadanie 9 Napisz funkcję octave'a obliczającą wartość wielomianu zadanego w bazie potęgowej tzn.

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

algorytmem Hornera. Parametrami funkcji będą

- wektor współczynników a
- macierz wartości x.
- N - stopnień wielomianu (to może być parametr opcjonalny, domyślnie przyjmujący wartość równą długości wektora a minus jeden)

Funkcja ma zwrócić wartości wielomianu dla wartości w x.

Przetestuj funkcję dla wielomianów $1 + x^2$ oraz $1 - 2x + x^2$ dla węzłów równoodległych na $[-1, 2]$, tzn. policz wartości wielomianów dla kilku wartości oraz narysuj wykresy tych wielomianów z wykorzystaniem tej funkcji.

Zadanie 10 Napisz funkcję octave'a znajdującą dla danego wielomianu stopnia n:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

oraz danej liczby q współczynniki $(b_k)_{k=0}^{n}$ wielomianu

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$$

oraz wartość r takie, że

$$w(x) = (x - q) * p(x) + r,$$

obliczone z wykorzystaniem algorytmu Hornera.

Zadanie 11 Napisz funkcję octave'a znajdującą dla danego wielomianu stopnia n:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

oraz liczby q wartość $w(q)$ i pochodnej $w'(q)$, obliczone z wykorzystaniem algorytmu Hornera.

Zadanie 12 Algorytm Hornera w bazie Newtona. Różnice dzielone.

Zaprogramuj w octavie funkcję ze zmodyfikowanym algorytmem Hornera zwracającą wartość wielomianu zadanego w bazie Newtona dla danych węzłów. Parametrami będą

- x punkt, w którym obliczamy wielomian (ewentualnie tablica punktów, ale wtedy funkcja też musi zwrócić wektor z wartościami wielomianu w tych punktach),
- N - stopnień wielomianu,
- wektor długości $N+1$ ze współczynnikami wielomianu w bazie Newtona.

Przetestuj na kilku prostych przykładach: dla węzłów $-1, 0, 1$ i wielomian $w(x) = x^2$, który w bazie Newtona związanej z tymi węzłami ma następującą postać: $x^2 = (x+1)x - (x+1) + 1$.

Zadanie 13 Napisz funkcję octave'a, która dla danego wielomianu $w(x)$, którego współczynniki w bazie potęgowej znamy, oblicza współczynniki tego wielomianu w bazie Newtona dla zadanych węzłów podanych w wektorze y. Tzn. parametrami funkcji będą:

- wektor $a = (a_k)_k$ taki, że
$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
- $y = (y_k)_k$ wektor współczynników bazy Newtona.

Funkcja powinna zwrócić wektor współczynników b_k takich, że
$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k w_k,$$
gdzie
$$w_k(x) = \Pi_{j=0}^{k-1}(x - y_j).$$

Zadanie 14 Napisz funkcję, która dla danego wielomianu $w(x)$, którego współczynniki w bazie Newtona $(w_k)_{k=0}^{n}$ znamy, oblicza współczynniki tego wielomianu w bazie potęgowej $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$. Tzn. parametrami funkcji jest wektor współczynników $b = (b_k)_k$ takich, że
$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k w_k$$

i wektor $y = (y_k)_k$ węzłów bazy Newtona $(w_k)_{k=0}^n$ dla

$$w_k(x) = \Pi_{j=0}^{k-1}(x - y_j).$$

Funkcja ma zwrócić wektor współczynników $a = (a_k)_k$ takich, że

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Zadanie 15 Sprawdź eksperymentalnie ile wynosi dla różnych wartości $N = 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ przybliżenie:

$$A_{r,N} = \sum_{k=0}^{N} \|l_k\|_{\infty,[-1,1]}$$

dla $\{l_k\}_{k=0}^N$ bazy Lagrange'a dla węzłów równoodległych na $[-1, 1]$, tzn. dla $x_k = -1 + k * h$ dla $h = 2/N$.

Normę maksimum funkcji $\|f\|_{\infty,[a,b]}$ liczymy w sposób przybliżony obliczając dyskretną normę maksimum na $\max\{1000, 100 * N\}$ równoodległych punktach z odcinka $[a, b]$.

Zadanie 16 Sprawdź eksperymentalnie ile wynosi dla różnych N np.

$$N = 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

przybliżenie:

$$A_{c,N} = \sum_{k=0}^{N} \|l_k\|_{\infty,[-1,1]}$$

dla $\{l_k\}_{k=0}^N$ bazy Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa na $[-1, 1]$, tzn. dla x_k zer wielomianu $T_{N+1}(x) = \cos((N + 1)\arccos(x))$.

Normę maksimum funkcji $\|f\|_{\infty,[a,b]}$ liczymy w sposób przybliżony obliczając dyskretną normę maksimum na $\max\{1000, 100 * N\}$ równoodległych punktach z odcinka $[a, b]$.

Zadanie 17 Powtórz dwa poprzednie zadania dla węzłów równoodległych i węzłów Czebyszewa na odcinku $[0, 10]$ i dla odpowiedniej normy maksimum na tym odcinku.

Zadanie 18 Policz iloraz

$$\frac{\|L_N f\|_{\infty,[-5,5]}}{\sum_{k=0}^{N} \|l_k\|_{\infty,[-5,5]}}$$

dla $f = 1/(1+x^2)$ i $L_N f$ wielomianu interpolującego f w węzłach równoodległych na $[-5,5]$ dla $N = 10, 20, 40, 80$. Tutaj $\{l_k\}_{k=0}^N$ baza Lagrange'a dla tych węzłów.

Normę maksimum funkcji $\|f\|_{\infty,[a,b]}$ liczymy w sposób przybliżony obliczając dyskretną normę maksimum na $\max\{1000, 100 * N\}$ równoodległych punktach z odcinka $[a,b]$.

Zadanie 19 Powtórz poprzednie zadanie dla tych samych funkcji i odcinka dla węzłów Czebyszewa zamiast węzłów równoodległych.