Rozdział 5

Splajny kubiczne i liniowe. Interpolacja splajnowa

W tym rozdziale zajmiemy się interpolacją splajnową, czyli interpolowaniem danej funkcji za pomocą splajnów - inaczej funkcji giętych.

Skupimy się na splajnach kubicznych, czyli funkcjach, które są klasy C^2 na odcinku $[a, b]$ i dla danego podziału tego odcinka:

$$a = x_0 < x_1 \ldots < x_N = b$$

na pododcinki. Te funkcje obcięte do każdego pododcinka $[x_i, x_{i+1}]$ są wielomianami kubicznymi.

Zadanie interpolacji splajnami kubicznymi polega na znalezieniu spaljnu kubicznego s spełniającego:

$$\begin{aligned} s(x_0) &= y_0 \\ s(x_1) &= y_1 \\ &\vdots \\ s(x_N) &= y_N \end{aligned}$$

dla zadanych wartości y_k. Okazuje się, że tak postawione zadanie nie jest jednoznaczne; trzeba dodać dwa dodatkowe warunki na s. Zazwyczaj są to odpowiednie warunki brzegowe, tzn. związane z wartościami s, pierwszych lub drugich pochodnych s w końcach odcinka.

Zadanie 1 Funkcje octave'a **spline**() and ppval.

Zapoznaj się z pomocą do tych funkcji (**help spline** i **help** ppval).

Wykorzystując te funkcje narysuj wykres splajnu kubicznego s_1 na podziale równomiernym odcinka $[-3, 3]$ z węzłami $\{x_k = k\}$

dla $k = -3, -2, \ldots, 3$ przyjmującego wartości $s_1(x_k) = (-1)^k$ w tych węzłach.

Następnie znajdź współczynniki splajnu kubicznego s_2 na tym samym podziale odcinka i przyjmującego te same wartości w węzłach co s_1, ale który dodatkowo przyjmuje wartości pochodnych w końcowych węzłach równe zero, tzn. wywołaj funkcje **spline**() podając dwie wartości więcej.

Następnie narysuj wykresy splajnów s_1 i s_2 na tym samym rysunku.

Czy otrzymaliśmy te same splajny?

Policz przybliżoną normę maksimum różnicy $s_1 - s_2$ na odcinku $[-3, 3]$.

Zadanie 2 Splajn kubiczny bazowy.

Dla danych węzłów równoodległych $\{k\}_{k=-5,-4,\ldots,5}$ na $[-5, 5]$ narysuj wykres splajnu kubicznego typu not-a-knot (czyli splajnu, którego współczynniki zwróci funkcja **spline**() przy najprostszym wywołaniu przez podanie wektora węzłów i wektora wartości w tych węzłach, por. **help spline**) takiego, że $s(0) = 1$ i $s(k) = 0$ dla węzłów $k \neq 0$.

Określ na podstawie wykresu nośnik tego splajnu.

Zadanie 3 Splajn kubiczny o minimalnym nośniku.

Dla danych węzłów równoodległych $\{k\}_{k=-5,-4,\ldots,5}$ na $[-5, 5]$ narysuj wykres splajnu kubicznego takiego, że $s(-1) = s(1) = 1, s(0) = 4$ i $s(k) = 0$ dla węzłów $k \notin \{-1, 0, 1\}$ oraz ma pochodne równe zero w węzłach skrajnych, tzn. : -5 i 5. Czy poza $[-2, 2]$ ten splajn jest równy zero?

Policz przybliżone normy maksimum na $[-5, -2]$ i $[2, 5]$ dla tego splajnu.

Zadanie 4 Testowanie eksperymentalne rzędu zbieżności splajnu interpolacyjnego kubicznego z hermitowskimi warunkami brzegowymi.

Korzystając z funkcji octave'a **spline**() znajdź współczynniki interpolacyjnego splajnu kubicznego hermitowskiego S_N na N węzłach równoodległych dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ na odcinku $[-\pi, 2 * \pi]$ dla $N = 2^k N_0$ dla $N_0 = 5$ i $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Następnie

- narysuj wykresy funkcji $f(x)$ i splajnów S_N dla różnych N.
- oblicz dyskretną normę maksimum na siatce równomiernej złożonej z tysiąca punktów na tym odcinku, tzn. $e_N = \max_k |\sin(x_k) - S_N(x_k)|$ dla x_k punktów siatki.
- policz równocześnie współczynnik $\frac{e_N}{e_{2N}}$. Czy prawdą jest, że

$$\frac{e_N}{e_{2N}} \approx 2^p$$

dla jakiegoś p całkowitego np. $p = 4, 8$ lub 16?

Zadanie 5 Testowanie eksperymentalne rzędu zbieżności splajnu interpolacyjnego kubicznego bez warunków brzegowych (splajn typu *not a knot*).

Powtórz zadanie 4, ale dla splajnów interpolacyjnych otrzymanych przez **spline**() bez podawania wartości pochodnych w skrajnych węzłach. Czy współczynniki $\frac{e_N}{e_{2N}}$ są te same? Tzn. czy szybkość zbieżności $\|\sin(x) - S_N\|_\infty$ jest taka sama?

Zadanie 6 Testowanie eksperymentalne rzędu zbieżności splajnu interpolacyjnego kubicznego naturalnego (warunek brzegowy - zerowanie się drugich pochodnych w końcach odcinka).

Powtórz zadanie 4, ale dla splajnów interpolacyjnych naturalnych. Tu trzeba wykorzystać funkcję z octave-forge (czyli rozszerzenia pakietu octave)
pp=csape(x,y,'variational')
- ostatni argument określa to, że splajn będzie naturalny.

Podajemy link do strony www z pomocą do funkcji csape():
`http://octave.sourceforge.net/splines/function/csape.html`

Zadanie 7 Przykład Rungego, czyli $f(x) = 1/(1 + x * x)$ i odcinek $[-5, 5]$, a zbieżność interpolacji splajnami kubicznymi.

Przetestuj jak w poprzednich zadaniach, czy splajny interpolacyjne kubiczne z podanymi warunkami na pochodne w końcach odcinka zbiegają w normie supremum do f, tzn. korzystając z funkcji octave'a **spline**() znajdź współczynniki splajnu interpolacyjnego kubicznego S_N na N węzłach równoodległych dla f na odcinku $[-5, 5]$ dla $N = 2^k N_0$ dla $N_0 = 5$ i $k = 1, 2, 3, 4, 5$ oraz narysuj wykresy f i tych splajnów dla różnych N.

Następnie oblicz dyskretną normę maksimum na siatce złożonej z tysiąca punktów na tym odcinku, tzn. $e_N = \max|\sin(x_k) - S_N \sin(x_k)|$ dla $x_k = -5 + k * 0.01$ z $k = 0, \ldots, 1000$.

Policz równocześnie współczynnik $\frac{e_N}{e_{2N}}$. Czy $\frac{e_N}{e_{2N}} \approx 2^p$ dla jakiegoś p całkowitego?

Zadanie 8 Funkcja octave'a mkpp() . Zapoznaj się z tą funkcją (**help** mkpp()). Utwórz przy pomocy mkpp() splajn kubiczny s na podziale $-1 \leq 0 \leq 1$ odcinka $[-1, 1]$ taki, że s jest wielomianem trzeciego stopnia na całym odcinku $[-1, 1]$ np. $s(x) = x^2$ lub $(x + 1)^3$.

Zadanie 9 Funkcja octave'a umkpp().

Zapoznaj się z tą funkcją (**help** umkpp()).

Utwórz przy pomocy **spline**() splajn kubiczny s na podziale $-1 \leq 0 \leq 1$ odcinka $[-1, 1]$ taki, że s interpoluje wielomian trzeciego stopnia na całym odcinku $[-1, 1]$ np. $f(x) = (x + 1)^3$.

Następnie sprawdź współczynniki s w bazie $\{(x - x_k)^j\}_{j=0,1,2,3}$ za pomocą umkpp() na obu przedziałach, tzn. dla $x_0 = -1$ na przedziale $[-1, 0]$ i $x_1 = 0$ na $[0, 1]$.

Zadanie 10 Znajdź za pomocą funkcji octave'a umkpp() współczynniki splajnu z zadania 3 na wszystkich pododcinkach $[k, k + 1]$ w bazie $\{(x - k)^j\}_{j=0,\ldots,3}$ dla $k = -2, \ldots, 1$ czyli tam, gdzie ten B-splajn ma nośnik.

Porównaj z wynikami otrzymanymi teoretycznie.

Zadanie 11 Interpolacja splajnami liniowymi.

Dla danego równomiernego podziału odcinka $[-\pi, 2*\pi]$ na N pododcinków utwórz za pomocą mkpp() strukturę splajnu liniowego s_n interpolującego funkcję $\sin(x)$ w węzłach dla $N = 3, 6, 9, 18$.

- Narysuj wykresy funkcji $\sin(x)$ oraz tych splajnów liniowych na jednym wykresie
- Policz przybliżone normy maksimum (na 1000 punktach z tego odcinka) błędu $e_N = \|\sin - s_n\|_\infty$.
- Policz współczynnik $\frac{e_N}{e_{2N}}$. Czy widać, że

$$\frac{e_N}{e_{2N}} \approx 2^p$$

dla jakiegoś p całkowitego np. $p = 2, 4$ lub 8?

W tym zadaniu można wykorzystać funkcję z następnego zadania, tj. zadania 12.

Zadanie 12 Napisz w octavie funkcję **function** pp=linspline(x,y), która dla

- x wektora $N+1$ różnych węzłów uszeregowanych ($a = x_0 < x_1 \ldots < x_N = b$)
- y - wektora $N+1$ wartości funkcji $y = f(x)$

zwróci w strukturze *pp* współczynniki splajnu liniowego s dla podziału zadanego węzłami x_k.

Strukturę należy utworzyć funkcją octave'a mkpp() w taki sposób, aby można było obliczyć wartość tego splajnu w punkcie (tablicy punktów) za pomocą funkcji octave'a ppval().

Zadanie 13 Testowanie rzędu zbieżności interpolacji splajnami liniowymi w zależności od gładkości funkcji.

Dla funkcji

$$f_j(x) = (x)_+^j = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^j & x > 0 \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3$$

oraz dla podziału odcinka $[a, b]$ z $a = -\pi$ i $b = 3$ na węzły równoodległe

$$\{x_k = -\pi + k * h\}$$

dla $h = (b - a)/N$ i $N = 4, 8, 16, 32, 64$.

Przetestuj rząd zbieżności splajnu liniowego interpolacyjnego.

Bardziej szczegółowo:

- przy pomocy funkcji octave'a z zadania 12 znajdź współczynniki odpowiedniego splajnu liniowego $s_N f_j$.
- policz przybliżoną normę maksimum błędu (na 1000 równomiernych punktach), tzn. przybliżenie

  $$e_N = \|s_N f_j - f_j\|_{\infty,[a,b]}.$$

- policz współczynniki $\frac{e_N}{e_{2N}}$. Czy widać, że

  $$\frac{e_N}{e_{2N}} \approx 2^p$$

  dla jakiegoś p całkowitego np. $p = 2, 4$ lub 8? Czy widać różnicę dla różnych j?