Rozdział 6

Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa definiujemy rekurencyjnie: $T_{-1} \equiv 0$, $T_0 \equiv 1$ oraz

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{6.1}$$

albo ze wzoru:

$$T_n(x) = \cos(n * \arccos(x)) \qquad x \in [-1, 1]. \tag{6.2}$$

W tym rozdziale przetestujemy podstawowe własności tych wielomianów.

Zadanie 1 Napisz rekurencyjną funkcję octave'a obliczającą wartość wielomianu zadanego poprzez współczynniki w bazie Czebyszewa wprost ze wzoru rekurencyjnego (6.1), tzn. parametrami funkcji będą:

- x argument dla którego chcemy obliczyć wartość wielomianu
- a - wektor zawierający współczynniki $a_0, \ldots, a_n$ takie, że $w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$.
- n - stopień wielomianu (parametr opcjonalny, można tę wartość uzyskać z wektora a)

Funkcja octave'a ma zwrócić wartość $w(x)$.

Przetestuj tę funkcję dla $w(x) = T_{15}(x)$, tzn. narysuj dwa wykresy $T_{15}(x)$ raz korzystając z tej funkcji oraz drugi raz korzystając wprost ze wzoru (6.2).

Zadanie 2 Napisz nierekurencyjną funkcję octave'a

```
function [Y]=Czebyszew(X,a,n)
```

obliczającą wartość wielomianu zadanego poprzez współczynniki w bazie Czebyszewa z wzoru (6.1), tzn. parametry wejściowe funkcji to:

- macierz $X = (x_{ij})_{ij}$, wymiaru $k \times l$
- wektor współczynników

  $$a = [a_0, \dots, a_n]$$

  takich, że

  $$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x).$$

- n stopień wielomianu; ten parametr może być opcjonalny, jeśli go nie podamy to funkcja powinna przyjąć, że n to wymiar wektora współczynników minus jeden.

Funkcja octave'a powinna zwrócić macierz $Y = (y_{ij})_{ij}$, wymiaru $k \times l$ z wartościami $y_{ij} = w(x_{ij})$.

Funkcja ma korzystać z wzoru rekurencyjnego (6.1), ale jako funkcja octave'a ma być **nierekurencyjna**. Koszt algorytmu powinien wynosić $k * l * O(n)$.

Narysuj dwa wykres $T_3(x)$ - jeden korzystając z tej funkcji oraz drugi - ze wzoru (6.2).

Zadanie 3 Sprawdź obliczeniowo, czy powyższe wzory na wielomiany Czebyszewa: wzór definiujący wielomiany Czebyszewa rekurencyjnie (6.1) i (6.2), są zgodne na odcinku $[-1, 1]$. Tzn. dla dużej ilości np. 10000 losowych punktów na $[-1, 1]$ policz wartości T_{32} ze wzoru

$$T_{32}(x) = \cos(32 * \arccos(x))$$

oraz ze wzoru rekurencyjnego (6.1).

Policz maksimum wartości absolutnych z różnicy między wartościami wielomianu obliczonymi obiema metodami. Porównaj czas obliczania wartości tego wielomianu obydwoma wzorami.

Powtórz testy ale dla wielomianów innych stopni, np. T_7, T_{50}.

Zadanie 4 Narysuj korzystając z wzoru

$$T_n(x) = \cos(n * \arccos(x))$$

wykres wielomianów T_n dla $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Policz dyskretną normę maksimum na siatce. Czy wynosi jeden? Policz na wykresie zera oraz ekstrema każdego z wielomianów.

Zadanie 5 Wyznacz zera i ekstrema T_{10} i T_{15} ze wzoru $T_n(x) = \cos(n * \arccos(x))$. Sprawdź wartości tych wielomianów w jego zerach i ekstremach.

Zadanie 6 Sprawdzenie własności optymalności zer wielomianu Czebyszewa jako węzłów interpolacji Lagrange'a.

Chcemy eksperymentalnie sprawdzić, czy wielomian $2^{-n}T_{N+1}(x)$ ma minimalną normę supremum na $[-1, 1]$ wśród wszystkich wielomianów postaci $\Pi_{k=0}^{N}(x - x_k)$.

Policz dla $N + 1$ różnych losowych węzłów x_k, $k = 0, \dots, N$ z odcinka $[-1, 1]$ dla $N = 2, 4, 8, 16, 32$ i kilkuset różnych losowych zestawów przybliżoną normę supremum wielomianu $\Pi_{k=0}^{n}(x-x_k)$.

Przeprowadź testy również dla węzłów Czebyszewa (czyli zer T_{N+1}) oraz węzłów równoodległych dla tego samego N.

Zadanie 7 Sprawdzenie własności ekstremalnej wielomianów Czebyszewa.

Z teorii wiadomo, że wielomian $2^{-n}T_{N+1}(x)$ ma minimalną normę supremum na $[-1, 1]$ wśród wszystkich wielomianów postaci

$$w(x) = x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Chcemy sprawdzić eksperymentalnie, czy ta własność się potwierdzi.

Policz dla $N + 1$ losowych współczynników a_k dla $k = 0, \dots, N$ przybliżoną normę supremum wielomianu:

$$w(x) = x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Przetestuj dla $N = 2, 4, 8, 16, 32$ i co najmniej kilku tysięcy różnych losowych zestawów węzłów. Węzły losujemy funkcją **randn**() zwracającą liczby losowe o rozkładzie normalnym.

Zadanie 8 Sprawdzenie własności ekstremalnej wielomianów Czebyszewa przyjmujących ustaloną wartość poza $[-1, 1]$.

Chcemy sprawdzić, czy dla dowolnego punktu $a = 2$ i $b \neq 1$ wielomian

$$w^*(x) = T_n(x)/T_n(2)$$

ma minimalną normę supremum na $[-1, 1]$ wśród wszystkich wielomianów w stopnia nie większego od $n+1$ przyjmujących wartość b w punkcie a.

Policz dla n losowych współczynników a_k z $k = 1, \ldots, n$ dla $n = 2, 4, 8, 16, 32$ i co najmniej kilku tysięcy różnych losowych zestawów węzłów przybliżoną normę supremum wielomianu

$$w(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k (x-2)^k$$

i porównaj z normą supremum w^* na $[-1, 1]$ równą $1/T_n(2)$ (dlaczego tyle ona wynosi?).

Węzły losujemy funkcją **randn**() zwracającą liczby losowe o rozkładzie normalnym.

Zadanie 9 Funkcja octave'a służąca przybliżonemu obliczaniu całek po odcinkach (zadanie pomocnicze)

Zapoznaj się z funkcją octave'a **quad**().

Policz całkę przy pomocy funkcji **quad**() z $\sin(x)$ na $[-\pi, 2*\pi]$.

Zadanie 10 (trudne) **Iloczyn skalarny typu $L^2_w(a, b)$.**

Napisz funkcję octave'a:

```
function [nl2]=IlSkL2w(FCN,GCN,a,b,FCNW)

 komendy octave'a

 nl2=....

endfunction
```

która oblicza iloczyn skalarny typu $L^2_w(a, b)$ z wagą $w(x)$ tzn.:

$$(f, g)_{L^2_w(a,b)} = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$$

dla danej funkcji wagowej $w(x)$ i funkcji f, g.

Parametry funkcji to:

- wskaźniki do funkcji FCN, GCN do dwóch funkcji octave'a

```
function y=f(x)

  y = ......
endfunction



function y=g(x)

  y = ......
endfunction
```

  obliczających odpowiednio wartości funkcji $f(x)$ i $g(x)$ dla $x \in [a, b]$.

- a, b - końce odcinka całkowania $[a, b]$,
- $FCNW$ to wskaźnik do funkcji wagowej

```
function y=w(x)

  y = ......
endfunction
```

Funkcja powinna zwrócić przybliżenie iloczynu skalarnego obliczone za pomocą funkcji octave'a **quad**().

W przypadku wywołania funkcji IlSkL2() tylko z czterema pierwszymi argumentami (tzn. bez podania wskaźnika do wagi) funkcja powinna zwrócić iloczyn skalarny z wagą $w \equiv 1$.

Zadanie 11 Ortogonalność wielomianów Czebyszewa w $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1, 1)$.

Sprawdź eksperymentalnie w octavie, np. za pomocą funkcji **quad**() lub własnej funkcji z poprzedniego zadania, czy wielomiany Czebyszewa tworzą układ ortogonalny w $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1, 1)$, tzn. czy prawdą jest, że

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & m = n > 0, \\ \pi & m = n = 0. \end{cases}$$

Sprawdź powyższe zależności dla różnych m, n różnej wielkości np. dla $m = 0, 1, 2, 3, 100, 1000$ i $n = 0, 3, 10, 500, 1004$.