Rozdział 8

Rozwiązywanie równań nieliniowych

W poniższych zadaniach przetestujemy jak działają cztery metody rozwiązywania równań nieliniowych skalarnych, tzn. metoda bisekcji, metoda Newtona, metoda siecznych i metoda iteracji prostych oraz dwie metody rozwiązywania układów równań nieliniowych, czyli wielowymiarowa metoda Newtona i metoda iteracji prostych w najprostszej formie.

Zapoznamy się również z funkcjami octave'a **fzero**() oraz fsolve () służącymi do rozwiązywania równań nieliniowych skalarnych i układów równań nieliniowych.

Zadanie 1 Zaimplementuj metodę bisekcji w skrypcie - dla rozwiązania równania $\cos(x) = 0$ na odcinku $[0, 2]$. Przetestuj, czy funkcja znajdzie dobre przybliżenie $\pi/2$.

Zadanie 2 Przetestuj metodę bisekcji z poprzedniego zadania do rozwiązania innych problemów:

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= 0 \\ \exp(x) &= 2 \\ \cos(10 * x) &= 0 \end{aligned}$$

startując z odcinka $[0, 110]$.

Zadanie 3 Napisz funkcję octave'a:

```
function [y,iter,kod]=bisekcja(FCN,a,b,...
                                tola,maxit),
```

której parametrami będą

- wskaźnik do funkcji FCN (inaczej: *function handle*),
- a, b - końce przedziału,
- tola - żądana tolerancja bezwzględna - błąd powinien być mniejszy od tola,
- maxit - maksymalna ilość iteracji.

Funkcja ma zwrócić

- y - przybliżone rozwiązanie,
- iter - ilość iteracji,
- kod - kod wyniku:
  - 0 metoda zbiegła,
  - 1 - metoda zatrzymała się z powodu przekroczenia maksymalnej ilości iteracji,
  - 2 - wartości w końcach odcinka funkcji mają ten sam znak.

Funkcja ma działać również jeśli podamy tylko trzy lub cztery pierwsze argumenty - wtedy maksymalna ilość iteracji domyślnie powinna wynosić sto, a tolerancja 10^{-5}.

Zadanie 4 Zapoznaj się z pomocą dla funkcji octave'a **fzero**() - rozwiązującą skalarne równania nieliniowe, przetestuj ją na kilku prostych przykładach skalarnych np.

- $\cos(x) = 0$,
- $x^2 - 2 = 0$,
- $x^{10} - 2 = 0$,
- $x - \sin(x) = 0$

i innych prostych równaniach nieliniowych.

Proszę przetestować tę funkcję dla różnych wartości początkowego przedziału $x_0 = [a, b]$.

Zadanie 5 Zapoznaj się z pomocą dla funkcji octave'a fsolve () - rozwiązującą układy równań nieliniowych. Przetestuj ją na kilku prostych przykładach skalarnych, np. na tych z poprzedniego zadania.

Zadanie 6 Zaimplementuj metodę Newtona w octavie i przetestuj jej zbieżność dla następujących funkcji:

f1(x)= $x * x - 2$ z $x_0 = 2$,

f2(x)= $x * x * x - 27$ z $x_0 = 27$,

f3(x)= $\exp(x) - 2$ z $x_0 = 10, -10, 1e3$,

f4(x)= $\sin(x)$ dla $x_0 = 2$,

f5(x)= $\cos(x)$ z $x_0 = 2$

f6(x)= $(x-2)^k$ x $x_0 = 3$ dla $k = 2, 4, 8, 16$,

f7(x)= $x * x - 2$ z $x_0 = 10^6$, sprawdź, czy metoda Newtona zbiega, a jeśli tak - to czy zbiega ona kwadratowo,

f8(x)= $1/x - a$ dla danych $a = 0.5, 2, 4, 100$ (oczywiście implementując bez dzielenia) jak dobrać x_0?

Dla wszystkich tych funkcji znamy rozwiązania, więc można wyświetlać równocześnie na ekranie błąd

$$e_n = x_n - r$$

(tutaj r - znane rozwiązanie) i badać eksperymentalnie rząd zbieżności, tzn. drukować na ekranie stosunki błędu bieżącego do poprzedniego w odpowiedniej potędze:

$$|e_n|/|e_{n-1}|^p$$

dla $p = 1, 2, 3$.

Proszę powtórzyć testy z innymi różnymi wartościami startowymi x_0.

Zadanie 7 Powtórz zadanie 6 zastępując metodę Newtona przez metodę siecznych.

Przetestuj, czy

$$e_n/(e_{n-1}e_{n-2})$$

asymptotycznie zbiega do stałej, i czy

$$|e_n|/|e_{n-1}|^p$$

dla $p = (1+\sqrt{5})/2$ zbiega do stałej np. dla $x * x - 2$ z $x_0 = 2$ lub innych równań z poprzedniego zadania.

Za x_1 możemy przyjąć $x_0 + 10^{-7}$.

Zadanie 8 Sprawdź, czy metoda iteracji prostych

$$x_n = \cos(x_{n-1})$$

zbiega do $x^* = \cos(x^*)$.

Zbadaj eksperymentalnie, czy zbieżność jest liniowa, tzn. czy

$$\frac{|x^* - x_n|}{|x^* - x_{n-1}|}$$

zbiega do stałej. Za dobre przybliżenie x^* można przyjąć rozwiązanie równania obliczone za pomocą wywołania funkcji octave'a: **fzero**().

Zadanie 9 Zaimplementuj przybliżoną metodę Newtona, w której pochodną przybliżamy ilorazem różnicowym, tzn.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n+h)-f(x_n)}{h}} = x_n - \frac{f(x_n) * h}{f(x_n + h) - f(x_n)}$$

dla ustalonego h.

Przetestuj różne h, np. $h = 10^{-4}, 10^{-7}, 10^{-10}$ itp.

Porównać zbieżność z dokładną metodą Newtona (szczególnie ostatnie iteracje) dla funkcji z zadania 6.

Zadanie 10 Rozwikływanie funkcji:

Dla funkcji $y(x)$ zadanej w sposób uwikłany równaniem

$$g(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 3 = 0$$

znajdź przybliżone wartości $y_k = y(x_k)$ dla $x_k = k * h$ dla $k = -N, \ldots, N$ i $h = 1/N$, tzn. spełniające $g(x_k, y_k) = 0$.

Testuj dla różnych wartości N, np. $N = 10, 20, 40, 80, ...$

oblicz y_k rozwiązując równanie

$$g(x_k, y_k) = 0.$$

korzystając z odpowiedniej funkcji octave'a lub własnej implementacji metody Newtona.

Jak w kolejnych krokach dobierać przybliżenie startowe w metodzie Newtona?

Zadanie 11 Odwracanie funkcji

Rozpatrzmy daną funkcję, np.

$$f(x) = \sin(x) + 2 * x.$$

Znajdź wartości funkcji odwrotnej f^{-1} na odcinku $[0, 5]$ na siatce $k * h$ dla $k = 0, .., 100$. Narysuj wykres funkcji f^{-1}.

Sam wykres można narysować dużo prościej bez wyliczania wartości f^{-1}. Jak to zrobić w octave'ie?

Zadanie 12 Wielowymiarowa metoda Newtona

Zaimplementuj wielowymiarową metodę Newtona w wersji z dokładnym Jakobianem i w wersji, gdy Jakobian przybliżamy różnicami dzielonymi z parametrem h.

Zastosuj tę metodę do rozwiązania układu

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 + 2x_2 = 1 \\ f_2(x_1, x_2) &= 3 * x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

dla różnych przybliżeń początkowych.

W przypadku zbieżności policz

$$\frac{\|x - x_n\|_p}{\|x - x_{n-1}\|_p^q}$$

dla $p = 1, 2, \infty$ oraz $q = 1, 2, 3$. Czy ten iloraz zbiega do stałej dla jakiegoś z tych q?

Funkcję $F(x) := (f_1(x), f_2(x))^T$ w octavie można zdefiniować następująco:

```
function y=F(x)
#x- wektor pionowy

   y=[[1 2]*x-1;3.*x(1)*x(1)+x(2)*x(2)-1];

endfunction
```

Zadanie 13 Wielowymiarowa metoda iteracji prostych

Zastosuj metodę iteracji prostych

$$x_n = x_n - aF(x)$$

do układu z zadania 12, tzn. przyjmijmy, że $F(x) := (f_1(x), f_2(x))^T$, a parametr $a \neq 0$ np. $a = 1, -1, 10^{-1}$ itp.

Czy metoda zawsze zbiega, a jeśli tak - to jak szybko? W przypadku zbieżności policz

$$\frac{\|x - x_n\|_p}{\|x - x_{n-1}\|_p}$$

dla $p = 1, 2, \infty$.

Zadanie 14 Do układu równań z zadania 12 zastosuj funkcję fsolve() - porównaj z implementacją metody Newtona w zadaniu 12, która była zastosowana do rozwiązania tego układu.

Czy obie metody zbiegają do tego samego rozwiązania dla tych samych wartości wektorów startowych?

Sprawdź - za pomocą funkcji **tic** i **toc** - czas potrzebny do rozwiązania tego układu równań za pomocą obu metod.