Rozdział 9

Układy równań liniowych - rozkłady typu LU i LL'

W tym rozdziale zapoznamy się z metodami służących do rozwiązywania układów równań liniowych przy pomocy uzyskiwaniu odpowiednich rozkładów macierzy typu LU i LL^T oraz obliczaniu macierzy odwrotnej.

Zapoznamy się z odpowiednimi funkcjami octave'a służącymi znajdowaniu odpowiednich rozkładów, czy rozwiązywaniu układów równań liniowych z pomocą tych rozkładów.

Podstawowe funkcje i operatory octave'a związane z rozkładem LU to:

- [L,U,P]=**lu**(A) - funkcja zwracająca czynniki rozkład LU nieosobliwej macierzy A, czyli $PA = LU$,
- [R]=**chol**(A) - funkcja zwracająca czynnik rozkładu Choleskiego macierzy symetrycznej dodatnio określonej $A = A^T > 0$, czyli $A = R^T R$, (zazwyczaj w literaturze podaje się ten rozkład w terminach czynnika $L = R^T$),
- operator x=A\b - operator rozwiązujący układ równań $Ax = b$ dla A macierzy nieosobliwej i b wektora prawej strony,
- **inv**(A) - funkcja zwracająca macierz odwrotną do A macierzy nieosobliwej,
- **cond**(A) - funkcja zwracająca współczynnik uwarunkowania macierzy A, czyli $\|A\|_2 * \|A^{-1}\|_2$.

Zadanie 1 Operator octave'a \ służący m.in. do rozwiązywaniu układów równań liniowych w octavie.

Przetestuj operator octave'a $\backslash$ dla układu równań z macierzą $A = [1, 2; 3, 4]$ i $x = [1; 3]$ z f=A*x. Czy y=A\f jest rozwiązaniem tego układu?

Policz normy residualną $\|Ay - f\|_p$ i normę błędu $\|x - x\|_p$ dla $p = 1, 2$.

Powtórz testy dla macierzy osobliwej $[1, 2; 3, 6]$ i prawie osobliwej $[1, 2; 3, 6 - 10^{-6}]$. Co się wtedy dzieje?

Zadanie 2 Przetestuj solver octave'a, tzn operator backslash dla dwóch prostych układów równań liniowych z macierzami nieosobliwymi: $A_1 = [1, 1; 1, 0.98]$ i $b = [2; 1]$, $A_2 = [1, 1; 1, 0.99]$ i wektorem prawej strony układu równań liniowych $b = [2; 1]$ jak w poprzednim zadaniu. Policz w normie drugiej różnicę rozwiązań, normę Frobeniusa różnicy $A_1 - A_2$ oraz uwarunkowania tych macierzy korzystając z funkcji octave'a **cond**().

Powtórz zadanie dla macierzy: $A_1 = [1, 1; 1, 1 - 2\epsilon]$ i $b = [2; 1]$, $A_2 = [1, 1; 1, 1 - \epsilon]$ dla $\epsilon = 10^{-p}$ z $p = 3, 4, \ldots, 16$.

Zadanie 3 Funkcja **inv**().

Zapoznaj się z pomocą do funkcji: **inv**(). Przetestuj, obliczając macierz odwrotną do $A = [1, 1; 1, -1]$. Czy macierz B obliczona za pomocą tej funkcji rzeczywiście jest macierzą odwrotną?

Policz normy pierwszą i Frobeniusa $\|A * B - I\|$ oraz $\|B * A - I\|$.

Zastosuj funkcje do rozwiązywania układu równań liniowych $Ax = f$ dla znanego x (liczymy $f = A * x$). Policz y jako iloczyn B z f i policz błędy residualny $\|Ay - f\|$ i $\|x - y\|$ w normie pierwszej i drugiej.

Powtórz to zadanie dla macierzy $N \times N$ losowej (funkcja octave'a **rand**() zwraca macierz losową) dla $n = 10, 50, 250, 1250$ ze znanym rozwiązaniem - oszacuj czas przy pomocy funkcji **tic** i **toc**. Porównaj czas i błędy w normie pierwszej dla rozwiązania uzyskanego przy pomocy operatora octave'a $\backslash$.

Zadanie 4 Funkcje **lu**() i **chol**().

- Zapoznaj się z pomocą do funkcji: **lu**() i **chol**().
- Dla macierzy $A = [1, 1; 1, -1]$ znajdź jej rozkłady: $PA = LU$ i rozkład Choleskiego $A = L_1^T L_1$.

- Sprawdź te rozkłady licząc normy macierzowe pierwszą i Frobeniusa błędów np. $PA - LU$ i $A - L_1^T L_1$.
- Zastosuj te rozkłady do znalezienia rozwiązania układu równań liniowych $Ax = f$ ze znanym rozwiązaniem np. $x = [1; 1]$ i $f = [2; 0]$.
- Policz normy pierwszą i drugą wektorowe pomiędzy x, a wynikiem algorytmu w, polegającym na zastosowaniu odpowiedniego rozkładu, oraz takie same normy residualne, tzn. normy $Aw - f$.

Zadanie 5 W octavie przetestuj eliminacje Gaussa z częściowym wyborem i bez wyboru dla macierzy $A = [e,\ 1; 1,\ 1]$ z $e = eps/10$ (funkcja octave'a **eps** zwraca epsilon maszynowy) i wektorem prawej strony $f = [1; 0]^T$. Trzeba tu zaprogramować samodzielnie eliminację Gaussa bez wyboru elementu głównego, tzn. bez permutacji ani wierszy, ani kolumn dla macierzy 2×2.

Zadanie 6 Testy solvera octave'a dla macierzy Hilberta $H(N)$

Polecenie octave'a **hilb**() tworzy macierz Hilberta.

- Stwórz macierz $H(N)$ dla $N = 10, 20, 30$,
- Dla znanego rozwiązania, np. stałego równego jeden na każdej pozycji, czyli $sol_k = 1$, policz $H(N) * sol = f$,
- Rozwiąż w octavie układ z $H(N)$ i f,
- Policz normy (1,2 itd) $\|H(N)x - f\|$ i $\|x - sol\|$ dla x rozwiązania wyliczonego przez octave,
- Policz uwarunkowanie macierzy Hilberta dla powyższych N.

Zadanie 7 Powtórz zadanie 6 w arytmetyce pojedynczej precyzji.

Należy tu sztucznie wymusić, za pomocą funkcji octave'a single (), aby zmienne były zmiennymi pojedynczej precyzji.

Zadanie 8 Przetestuj funkcję **invhilb**() tworzącą macierz odwrotną do macierzy Hilberta (por. zadanie 6).

- Policz normy: macierzowa normę Frobeniusa i normę macierzową pierwszą różnicy macierzy $E = H(N) * iH(N) - I$ dla $N = 10, 20, 30$, gdzie $iH(N)$ macierz odwrotna do macierzy Hilberta obliczona przez **invhilb**().

- Wykorzystaj $iH(N)$ do rozwiązania układu równań z macierzą Hilberta $H(N)$, tzn.:
  (a) stwórz macierze $H(N)$ oraz $iH(N)$ dla $N = 10, 20, 30$ korzystając z funkcji **hilb**() i **invhilb**(),
  (b) dla znanego rozwiązania *sol*, policz $H(N) * sol = f$,
  (c) rozwiąż układ $H(N)x = f$ mnożąc f przez $iH(N)$, tzn. $x = iH(N) * f$,
  (d) policz normy $\|H(N)x - f\|_p$ i $\|x - sol\|_p$ dla $p = 1, 2, \infty$.

Zadanie 9 Stwórz w octavie macierz trójdiagonalną $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ wymiaru $n \times n$ z 2 na diagonali i -1 na pod- i nad diagonalą, tzn.

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & |i-j| = 1 \\ 0 & |i-j| > 1 \end{cases}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

przy pomocy funkcji octave'a **diag**(), jak i wprost w pętli. Porównaj czas używając **tic** i **toc** dla $n = 10, 100, 1000$.

Policz uwarunkowanie macierzy dla różnych N.

Policz macierz odwrotną przy pomocy **inv**() (czy jest trójdiagonalna?).

Zadanie 10 Sprawdź z wykorzystaniem funkcji octave'a **chol**(), czy macierz z zadania 9 jest symetryczna i dodatnio określona.

Zadanie 11 Zaimplementuj rozkład LU dla macierzy trójdiagonalnej $N \times N$ bez wyboru elementu głównego, tzn. stwórz własną funkcję octave'a:

function [x,d,l]=lu3diag(a,b,c,f,N)

Parametry funkcji:

- a, b, c - przekątna, podprzekątna i nadprzekątna macierzy A,
- f - wektor prawej strony,
- N - wymiar zadania - długość przekątnej a.

Funkcja powinna zwrócić x - rozwiązanie $Ax = f$ oraz czynniki rozkładu macierzy $A = LU$, czyli diagonalę macierzy górnotrójkątnej U w wektorze d i poddiagonalę L - macierzy dolnotrójkątnej, trójdiagonalnej z jedynkami na diagonali, czyli wektor l.

Naddiagonala U równa się nadiagonali A, tzn. wektorowi c.

Zadanie 12 Zastosuj funkcję z zadania 11 do uzyskania rozkładu LU macierzy z zadania 9 dla $N = 4, 10, 15$. Porównaj z wynikiem uzyskanym przy pomocy funkcji octave'a **lu**().

Zadanie 13 Zastosuj funkcję z zadania 11 do rozwiązania układu równań z macierzą z zadania 9 dla $N = 10, 100, 1000$, czy 10000:

- Rozwiąż układ dla znanego rozwiązania, np. $x = (1, \dots, 1)^T$,
- Porównaj czas rozwiązywania własnym algorytmem i algorytmem octave'a, czyli operatorem A\f,
- Policz błąd rezydualny i błąd rzeczywisty w normie drugiej, tzn. $\|x - \tilde{x}\|_2$ i $\|f - A * \tilde{x}\|_2$, gdzie $f = A * x$, a $\tilde{x}$ to rozwiązanie obliczone przez octave'a lub obliczone własnym algorytmem.

Zadanie 14 Zaimplementuj rozkład LU dla macierzy trójdiagonalnej z częściowym wyborem elementu głównego.

Następnie testuj ten rozkład jak w zadaniu 13.

Zastosuj ten rozkład do rozwiązania układu równań z macierzą z poprzedniego zadania A i z macierzą $A - 1.5 * I$.

Zadanie 15 Zaprogramuj rozkład Choleskiego typu dla macierzy $A = A^T > 0$ trójdiagonalnej, tzn. policz L dolnotrójkątną z jedną poddiagonalą (czyli reprezentowaną przez dwa wektory z przekątną i podprzekątną) taką, że $A = L^T L$.

Zastosuj do rozwiązania układu równań z zadania 9.

Testuj analogicznie do zadania 13.

Porównaj macierz L uzyskaną w ten sposób z macierzą uzyskaną przez **chol**() zastosowaną do tej samej macierzy.