

Rozdział 6

Dwa przykłady z mechaniki

W rozdziale tym przedstawimy proste przykłady rozwiązań równań mechaniki Newtona. Mechanika Newtona zajmuje się badaniem ruchu układu punktów materialnych w przestrzeni euklidesowej. Opis tego ruchu dany jest przez układ równań Newtona

$$\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}), \quad (6.1)$$

gdzie $x(t)$ opisuje trajektorię ruchu, \dot{x} jest jego prędkością a \ddot{x} – przyspieszeniem. Postać funkcji F jest elementem definicji rozpatrywanego układu mechanicznego. Do definicji tej należy też podanie obszaru określoności funkcji F oraz przestrzeni fazowej równania (6.1). Rozważania ograniczymy do opisu ruchu jednego punktu materialnego o jednostkowej masie. Zakładamy także, że funkcja $F(t, x, \dot{x})$ jest gładką funkcją swoich argumentów (np. jest funkcją klasy C^1), co gwarantuje istnienie i jednoznaczność rozwiązań układu (6.1).

6.1 Układy zachowawcze z jednym stopniem swobody

Rozpocniemy od opisu ogólnego modelu m -wymiarowego, pokazując własności ruchu punktu materialnego w całej ogólności. Dopiero kiedy będzie to niezbędne dla dalszego prowadzenia wykładu ograniczymy się do przypadku jednowymiarowego ($m = 1$).

6.1 DEFINICJA. *Układem zachowawczym nazywamy ruch punktu materialnego opisywany równaniem różniczkowym*

$$\ddot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (6.2)$$

gdzie siła $F(x)$ jest funkcją klasy C^1 w otwartym zbiorze $D \subset \mathbb{R}^m$, dla której istnieje funkcja $U(x)$, taka że

$$F(x) = -\text{grad } U. \quad (6.3)$$

Siłę zdefiniowaną w ten sposób nazywa się **siłą potencjalną** (U nazywane jest **potencjałem**).

Dla układów zachowawczych można zdefiniować **energię całkowitą** układu $E = T(\dot{x}) + U(x)$, gdzie T jest energią kinetyczną daną wzorem

$$T = \frac{\|\dot{x}\|^2}{2}$$

a $U(x)$ **energię potencjalną** układu.

W przypadku jednowymiarowym potencjał $U(x)$ można otrzymać przez całkowanie siły

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(z) dz. \quad (6.4)$$

Całka w równaniu (6.4) zawsze istnieje (przy założeniu, że funkcja F jest klasy C^1). Oznacza to, że każdy układ z jednym stopniem swobody jest układem zachowawczym.

6.2 TWIERDZENIE. *Całkowita energia układu $E = T + U$ jest całką pierwszą równania (6.2).*

Dowód. Mamy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\|\dot{x}(t)\|^2}{2} + U(x(t)) \right) = \dot{x}\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\dot{x} = \dot{x}F(x) - F(x)\dot{x} = 0.$$

Dowodzi to, że funkcja

$$\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + U(x(t))$$

jest całką pierwszą równania (6.2). ■

Z twierdzenia 6.2 wynika ważny w mechanice wniosek.

6.3 WNIOSEK. (Prawo zachowania energii) *Energia całkowita punktu materialnego poruszającego się zgodnie z równaniem (6.2), gdzie $F(x)$ jest siłą potencjalną, jest stała w trakcie ruchu.*

W dalszym ciągu udowodnimy jeszcze jeden ważny dla opisu ruchu zachowawczego wynik, który jest prawdziwy w dowolnym wymiarze. W tym celu zamienimy równanie (6.2) układem równań pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= F(x_1). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Zajmiemy się teraz punktami równowagi układu (6.5). W przestrzeni zmiennych $(x_1, x_2) \in D \times \mathbb{R}^m$ są to punkty $(\bar{x}_1, 0)$, dla których $F(\bar{x}_1) = 0$.

6.4 TWIERDZENIE. *Jeśli w stanie równowagi układu zachowawczego energia całkowita układu osiąga minimum lokalne, to ten stan równowagi jest stabilny.*

Dowód. Z tw. 6.2 wiemy, że energia całkowita układu zachowawczego jest całką pierwszą. W zmiennych (x_1, x_2) ta całka zapisuje się formułą $E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\|x_2\|^2 + U(x_1)$. Jeśli punkt $(\bar{x}_1, 0)$ jest punktem równowagi i energia całkowita osiąga w tym punkcie lokalne minimum, to funkcja

$$V(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) - E(\bar{x}_1, 0)$$

jest funkcją Lapunowa dla tego położenia równowagi.

Łatwo widać, że funkcja $V(x_1, x_2)$ spełnia warunki definicji 5.3 (oczywiście po drobnej modyfikacji, bo w definicji zakładano, że badanym rozwiązaniem jest rozwiązanie zerowe a w naszym przypadku jest to rozwiązanie $(\bar{x}_1, 0)$). Funkcja $V(x_1, x_2)$ jest nieujemna i zeruje się jedynie w punkcie $(\bar{x}_1, 0)$, bo jest to minimum lokalne. Aby sprawdzić warunek 3) def. 5.3 obliczamy

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot F(x_1) = -F(x_1) \cdot x_2 + x_2 \cdot F(x_1) = 0,$$

gdzie symbol $a \cdot b$ oznacza iloczyn skalarny w \mathbb{R}^m . Z tw. 5.4 wynika, że rozwiązanie $(\bar{x}_1, 0)$ jest stabilne. ■

Obecnie zajmiemy się jedynie jednowymiarowym układem (6.2) lub równoważnie układem (6.5). Dla tego układu przestrzenią fazową jest $D \times \mathbb{R}$, gdzie D jest otwartym odcinkiem (być może nieograniczonym) w \mathbb{R} .

6.5 TWIERDZENIE. *Dla układu z jednym stopniem swobody poziomice energii całkowitej są gładkimi krzywymi w otoczeniu każdego swojego punktu z wyjątkiem punktu równowagi.*

Dowód. Poziomica energii jest zbiorem $\{(x_1, x_2): E(x_1, x_2) \equiv x_2^2/2 + U(x_1) = E_0\}$, gdzie E_0 jest stałą. Pochodne cząstkowe funkcji E dane są wzorami

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = -F(x_1), \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} = x_2.$$

Jeśli punkt (x_1, x_2) nie jest położeniem równowagi, to nie są spełnione jednocześnie równania

$$F(x_1) = 0 \quad \text{oraz} \quad x_2 = 0.$$

Wynika stąd, że przynajmniej jedna pochodna cząstkowa funkcji E w punkcie (x_1, x_2) jest różna od zera. Z tw. o funkcji uwikłanej wynika wtedy istnienie gładkiej funkcji $x_1 = x_1(x_2)$ lub $x_2 = x_2(x_1)$. ■

Zajmiemy się teraz szczegółowo badaniem poziomicy energii. Założymy przy tym, że potencjał $U(x_1)$ jest funkcją klasy C^2 na całej prostej \mathbb{R} . Przypomnijmy, że punkt x_0 nazywa się punktem krytycznym funkcji jednej zmiennej $f(x)$, jeśli $f'(x_0) = 0$. Zajmiemy się na początku poziomiami energii $x_2^2/2 + U(x_1) = E_0$ dla wartości energii E_0 , które nie są równe wartości potencjału U w żadnym punkcie krytycznym tego potencjału (nie są wartościami krytycznymi potencjału). Z

gładkości potencjału wynika, że zbiór $\{x_1: U(x_1) \leq E_0\}$ składa się z przeliczalnej liczby rozłącznych odcinków. Skrajne z tych odcinków mogą być rozciągającymi się do nieskończoności półprostymi, może też się zdarzyć, że cały zbiór pokrywa się z prostą rzeczywistą \mathbb{R} .

Przeanalizujmy jak wygląda poziomicą energii dla jednego z odcinków ograniczonych $[a, b]$. Na odcinku tym mamy $U(a) = U(b) = E_0$ oraz $U(x_1) < E_0$ dla $x_1 \in (a, b)$.

6.6 TWIERDZENIE. *Jeśli odcinek $[a, b]$ jest ograniczony, $U(a) = U(b) = E_0$, $U'(a) < 0$, $U'(b) > 0$ i $U(x_1) < E_0$ dla $x_1 \in (a, b)$, to równanie*

$$\frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E_0, \quad x_1 \in [a, b],$$

definiuje zamkniętą krzywą gładką na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 będącą krzywą fazową równania (6.2).

Dowód. Z prawa zachowania energii wynika, że znalezienie rozwiązania równania (6.2) w przypadku układu z jednym stopniem swobody sprowadza się do scałkowania równania o rozdzielonych zmiennych

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E_0 - U(x))}. \quad (6.6)$$

Niech (x_1, x_2) leży na rozważanej poziomici i niech $x_2 > 0$. Niech $\varphi(t)$ będzie rozwiązaniem równania (6.2) z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = x_1$, $\dot{\varphi}(t_0) = x_2$. Z równania (6.6) otrzymamy wtedy związek

$$t - t_0 = \int_{x_1}^{\varphi(t)} \frac{dz}{\sqrt{2(E_0 - U(z))}}.$$

Aby przekonać się jak daleko można przedłużyć to lokalne rozwiązanie, policzmy czas jaki jest potrzebny, aby trajektoria przeszła z punktu a do punktu b

$$\frac{T}{2} = \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{2(E_0 - U(z))}}. \quad (6.7)$$

Występująca tu całka jest niewłaściwa (na obu końcach), ale zbieżna. Aby się o tym przekonać dokonamy odpowiedniego oszacowania funkcji podcałkowej. Ponieważ funkcja U jest klasy C^2 oraz $U'(a) < 0$, to w pewnym otoczeniu punktu a mamy oszacowanie $U'(x) \leq \frac{1}{2}U'(a)$. Z tw. o wartości średniej dostajemy $U(x) = U(a) + U'(\xi)(x - a)$. Stąd mianownik naszej całki może być oszacowany następująco

$$\frac{1}{\sqrt{2(E_0 - U(x))}} = \frac{1}{\sqrt{-2U'(\xi)(x - a)}} \leq \frac{1}{\sqrt{-U'(a)(x - a)}}.$$

Teraz zbieżność interesującej nas całki w końcu $x = a$ wynika ze zbieżności całki

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x - a}}.$$

Zbieżność w końcu $x = b$ dowodzi się analogicznie.

Znaleźliśmy w ten sposób rozwiązanie $\varphi(t)$ równania (6.2) na pewnym odcinku czasu $[t_1, t_2]$ o długości $T/2$, takim że $\varphi(t_1) = a$ i $\varphi(t_2) = b$. Ponieważ poziomicą energii jest symetryczna względem osi x_1 , to biorąc $\varphi(t_2 + t) = \varphi(t_2 - t)$, dla $t \in [0, T/2]$, rozszerzamy nasze rozwiązanie na przedział $[t_1, t_1 + T]$ przy czym z konstrukcji tego rozszerzenia wynika, że otrzymujemy funkcję okresową o okresie T . Odpowiadająca otrzymanemu rozwiązaniu krzywa fazowa jest częścią poziomicy energii E_0 nad odcinkiem $[a, b]$. ■

Zbadamy teraz zachowanie się poziomicy energii w otoczeniu punktu krytycznego potencjału. Jeśli $U(\bar{x}_1) = E_0$ i $U'(\bar{x}_1) = 0$, to w otoczeniu punktu \bar{x}_1 potencjał można w przybliżeniu przedstawić (korzystając z wzoru Taylora) w postaci $U(x_1) = U(\bar{x}_1) + \frac{1}{2}U''(\xi)(x_1 - \bar{x}_1)^2$. Wtedy poziomice energii są krzywymi kwadratowymi $x_2^2 + k(x_1 - \bar{x}_1)^2 = \text{const}$. W przypadku gdy $k > 0$ (potencjał ma minimum w punkcie \bar{x}_1) krzywe te są elipsami o środku w punkcie krytycznym $(\bar{x}_1, 0)$. Dla $k < 0$ (potencjał ma maksimum w punkcie \bar{x}_1) krzywe te są hiperbolami o środku w $(\bar{x}_1, 0)$.

Globalne zachowanie poziomicy energii dla krytycznych wartości energii jest dość skomplikowane. Jak poprzednio rozpatrujemy ograniczony odcinek $[a, b]$, na którym $U(a) = U(b) = E_0$, przy czym wartość E_0 odpowiada wartości potencjału w punkcie krytycznym. Możliwych jest kilka przypadków. Kiedy oba końce odcinka $[a, b]$ są punktami krytycznymi ($U'(a) = U'(b) = 0$), to krzywymi fazowymi są dwa otwarte łuki

$$x_2 = \pm \sqrt{2(E_0 - U(x_1))}, \quad x_1 \in (a, b).$$

Jeśli $U'(a) = 0, U'(b) \neq 0$ lub $U'(a) \neq 0, U'(b) = 0$, to równanie

$$\frac{1}{2}x_2^2 + U(x_1) = E_0$$

definiuje jedną otwartą krzywą fazową. Jeśli wreszcie $U'(a) \neq 0$ i $U'(b) \neq 0$, to znaczy, że punkt krytyczny znajduje się poza odcinkiem $[a, b]$ i otrzymujemy zamknięte krzywe fazowe jak dla niekrytycznych wartości energii.

6.7 Przykład. Przeanalizujemy teraz poziomice energii oraz krzywe fazowe wahadła bez uciekania się do przybliżenia małych odchyłeń. Jak pamiętamy z wyrowadzenia w przykładzie 4.20 równanie to ma postać

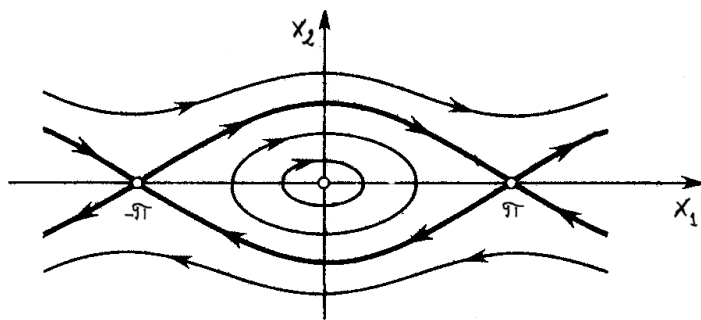
$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \sin x.$$

Potencjałem dla tego równania jest funkcja $U(x) = -\omega_0^2 \cos x$. Mamy więc dwa krytyczne poziomy energii: $E_0 = -\omega_0^2$, który odpowiada stabilnemu położeniu równowagi $x = 2n\pi$, oraz $E_0 = \omega_0^2$ odpowiadający niestabilnemu położeniu równowagi $x = \pi + 2n\pi$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. W dalszym ciągu będziemy

analizowali kształt krzywych fazowych wyłącznie w otoczeniu punktów $x = -\pi$, $x = 0$ i $x = \pi$, ponieważ portret fazowy jest okresowy o okresie 2π .

Na płaszczyźnie fazowej (x_1, x_2) punkt $(0, 0)$ odpowiadający minimum potencjału jest stabilnym położeniem równowagi a krzywe fazowe w jego małym otoczeniu są zamkniętymi krzywymi fazowymi jak to wynika z tw. 6.6. Punkty $(-\pi, 0)$ oraz $(\pi, 0)$ odpowiadają przypadkowi, gdy $U(-\pi) = U(\pi) = \omega_0^2$ oraz $U'(-\pi) = U'(\pi) = 0$. Oznacza to, że punkty te są same krzywymi fazowymi a krzywe fazowe w ich otoczeniu są dyfeomorficzne z hiperbolami. Prócz tego istnieją krzywe fazowe w formie otwartych łuków łączące punkt $(-\pi, 0)$ z punktem $(\pi, 0)$.

Jeśli portret fazowy przetłumaczymy na zachowanie wahadła, to obraz ten wygląda następująco. Dla poziomów energii $E_0 \leq -\omega_0^2$ wahadło nie porusza się spoczywając w położeniu równowagi $(0, 0)$. Dla poziomów energii $-\omega_0^2 < E_0 < \omega_0^2$ wahadło wykonuje okresowe wahanienia (krzywe fazowe są zamkniętymi krzywymi). Dla poziomu energii $E_0 = \omega_0^2$ stan wahadła jest zależny od warunków początkowych: jeśli chwili początkowej mieliśmy $x(t_0) = -\pi$, $\dot{x}(t_0) = 0$, to wahadło pozostaje w położeniu równowagi $(-\pi, 0)$ (analogicznie dla punktu $(\pi, 0)$). Jeśli dane początkowe odpowiadają położeniu wahadła na jednej z krzywych fazowych łączących punkty $(-\pi, 0)$ i $(\pi, 0)$ (jak wiemy są dwie takie krzywe fazowe), to porusza się ono po tej krzywej, przy czym czas potrzebny na przebycie drogi z punktu $(-\pi, 0)$ do punktu $(\pi, 0)$ jest nieskończony (wynika to z równości (6.7)). Dla wartości $E_0 > \omega_0^2$ mamy niezamknięte krzywe fazowe. Odpowiada to ruchowi wahadła, przy którym obraca się ono wokół swojej osi (rys. 6.1).



Rysunek 6.1: Portret fazowy wahadła

6.2 Ruch w centralnym polu sił

W tym podrozdziale zajmiemy się ruchem punktu materialnego w przestrzeni trójwymiarowej \mathbb{R}^3 pod wpływem działania siły centralnej.

6.8 DEFINICJA. Pole wektorowe w \mathbb{R}^3 nazywa się centralne względem początku

układu współrzędnych, jeśli jest ono niezmiennicze względem ruchów przestrzeni \mathbb{R}^3 nie zmieniających położenia początku układu współrzędnych. Jeśli $F(x)$ jest wektorem pola centralnego, to istnieje funkcja skalarna Φ , taka że

$$F(x) = \Phi(|x|) \frac{x}{|x|}.$$

Wynika stąd następujące równanie ruchu punktu materialnego w centralnym polu sił

$$\ddot{x} = \Phi(|x|) \frac{x}{|x|}. \quad (6.8)$$

Z definicji tej wynika prosty wniosek.

6.9 WNIOSEK. *Centralne pole sił jest polem potencjalnym.*

Dowód. Niech $r = |x|$. Potencjał pola dany jest wtedy wzorem

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \Phi(z) dz.$$

■

6.10 DEFINICJA. *Momentem pędu* względem początku układu współrzędnych poruszającego się punktu materialnego nazywamy wektor $M = x \times \dot{x}$.

6.11 TWIERDZENIE. (Prawo zachowania momentu pędu) *W trakcie ruchu w centralnym polu sił moment pędu względem centrum pola nie zmienia się w czasie.*

Dowód. Jeśli pomnożymy równanie ruchu (6.8) wektorowo przez x , to otrzymamy

$$x \times \ddot{x} = \Phi(|x|) \frac{1}{|x|} x \times x = 0.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} x \times \dot{x} = \dot{x} \times \dot{x} + x \times \ddot{x} = x \times \ddot{x} = 0.$$

■

Z powyższego twierdzenia wynika ważny wniosek.

6.12 WNIOSEK. *Ruch punktu materialnego w centralnym polu sił w \mathbb{R}^3 jest ruchem płaskim, tj. odbywa się na płaszczyźnie.*

Dowód. Rozważmy równanie (6.8) z warunkami początkowymi

$$x(0) = \alpha_0, \quad \dot{x}(0) = \alpha_1.$$

Wektory α_0 i α_1 wyznaczają płaszczyznę w \mathbb{R}^3 ($\alpha_0 \times \alpha_1$ jest wektorem prostopadłym do tej płaszczyzny). Ponieważ $x \times \dot{x}$ jest momentem pędu, który jest stały w czasie, więc

$$x \times \dot{x} = c = \alpha_0 \times \alpha_1.$$

Wynika z tego, że ruch punktu materialnego odbywa się cały czas w płaszczyźnie prostopadłej do wektorów α_0 i α_1 . ■

Ponieważ ruch odbywa się na płaszczyźnie, celowe jest wprowadzenie na niej współrzędnych biegunowych. Niech (r, θ) będą tymi współrzędnymi. Układ (6.8) redukuje się wtedy do układu

$$\begin{aligned} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin \theta &= -\frac{dU}{dr} \cos \theta, \\ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta &= -\frac{dU}{dr} \sin \theta, \end{aligned} \quad (6.9)$$

a warunki początkowe mogą być zapisane w postaci

$$\begin{aligned} r(0) &= a, \quad \dot{r}(0) = 0, \\ \theta(0) &= 0, \quad \dot{\theta}(0) = \frac{C}{a^2}. \end{aligned}$$

Kombinacja liniowa równań (6.9) prowadzi do układu

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= -\frac{dU}{dr}, \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Zauważmy, że drugie z równań (6.10) może być zapisane w postaci

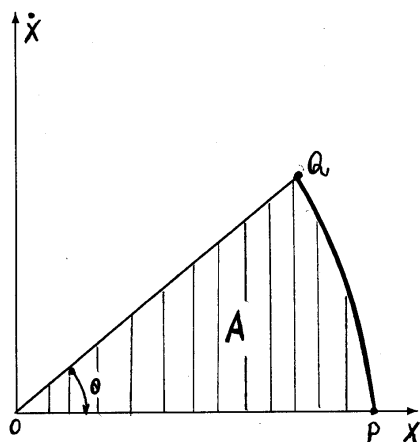
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Stąd

$$r^2\dot{\theta} = C. \quad (6.11)$$

Równość ta, będąca konsekwencją zachowania momentu pędu, ma interesującą interpretację geometryczną. Wyobraźmy sobie ciało poruszające się z punktu P do punktu Q po krzywej PQ (patrz rys. 6.2). Niech A będzie polem ograniczonym przez promienie OP , OQ i łuk PQ . Wtedy

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\theta,$$



Rysunek 6.2: Prędkość polowa

czyli

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}C. \quad (6.12)$$

Wielkość $\frac{dA}{dt}$ nazywa się w mechanice **prędkością polową**. Równanie (6.11) wyraża stałość prędkości polowej w ruchu punktu materialnego. Taką formę prawa zachowania pędu sformułował Kepler opisując prawa rządzące ruchem planet wokół słońca. W wersji Keplera (było to jego II prawo) miało ono formę:

Planeta porusza się wokół Słońca po krzywej płaskiej ze stałą prędkością polową.

6.13 TWIERDZENIE. *Ruch punktu materialnego w centralnym polu sił można opisać jednowymiarowym równaniem ruchu*

$$\ddot{r} = -\frac{dV}{dr}, \quad (6.13)$$

gdzie r jest promieniem wodzącym punktu, a $V(r)$ jest **efektywnym potencjałem** danym wzorem

$$V(r) = U(r) + \frac{C^2}{2r^2}.$$

We wzorze tym $U(r)$ jest potencjałem siły centralnej zdefiniowanym w dowodzie wniosku 6.9, a stała C jest stałą z równania (6.11) definiującą wartość momentu pędu.

Dowód. W pierwszym z równań (6.10) robimy podstawienie $\dot{\theta} = C/r^2$ wynikające z równania (6.11). Otrzymujemy wtedy

$$\ddot{r} = -\frac{dU}{dr} + \frac{C^2}{r^3},$$

co odpowiada równaniu

$$\ddot{r} = -\frac{dV}{dr}$$

$$z V(r) = U(r) + \frac{C^2}{2r^2}. \quad \blacksquare$$

Zajmiemy się teraz dokładniej problemem ruchu planet wokół słońca, aby otrzymać wszystkie prawa odkryte przez Keplera. W pewnym uproszczeniu możemy opisać to zadanie jako ruch ciała o małej masie μ wokół położonego w początku układu współrzędnych ciała o bardzo dużej masie m . Ciała te oddziałują na siebie siłą przyciągania grawitacyjnego

$$F(x) = -G \frac{\mu m x}{|x|^3}.$$

Odpowiada to ruchowi punktu materialnego w polu sił centralnych

$$\ddot{x} = -k \frac{x}{|x|^3}. \quad (6.14)$$

Korzystając z tej postaci siły centralnej scałkujemy równanie ruchu (6.13) z potencjałem V wynikającym z siły grawitacji. Z równania (6.13) wynika prawo zachowania energii $E_0 = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r)$. Pozwala ono uprościć problem całkowania równania (6.13). Z prawa zachowania energii mamy związek

$$\dot{r} = \sqrt{2(E_0 - V(r))}.$$

Ponieważ z równania (6.11) mamy $\dot{\theta} = C/r^2$, to

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{C/r^2}{\sqrt{2(E_0 - V(r))}}.$$

Całkujemy to ostatnie równanie dla $V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{C^2}{2r^2}$ i dostajemy

$$\theta = \int \frac{C/r^2}{\sqrt{2(E_0 - V(r))}} dr = \arccos \frac{C/r - k/C}{\sqrt{2E_0 + k^2/C^2}},$$

gdzie przyjęliśmy dla uproszczenia stałą całkowania równą zero. Prowadzi to do równania

$$r = \frac{C^2/k}{1 + e \cos \theta}, \quad (6.15)$$

gdzie $e = \sqrt{1 + 2E_0 C^2/k^2}$.

Równanie (6.15) jest równaniem stożkowej we współrzędnych biegunowych. Stała e nazywa się mimośrodem (ekscentrycznością) stożkowej. Odpowiada ona:

- a) okręgowi, jeśli $e = 0$,
- b) elipsie, jeśli $e < 1$,

c) paraboli, jeśli $e = 1$,

d) hiperboli, jeśli $e > 1$,

przy czym początek układu współrzędnych jest jednym z ognisk tej stożkowej. Wiadomo, że orbity są ograniczone jeśli $E_0 < 0$, co odpowiada $e < 1$ i gwarantuje prawdziwość I prawa Keplera:

Planeta porusza się wokół Słońca po elipsie, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy.

Kepler sformułował także III prawo ruchu planet:

Kwadrat czasu obiegu planety wokół Słońca jest proporcjonalny do trzeciej potęgi dłuższej osi elipsy, po której porusza się planeta.

Dowód tego prawa wynika z innego zapisu równania elipsy

$$r = \frac{b^2/a}{1 + e \cos \theta},$$

gdzie a jest dłuższą, a b krótszą półosią elipsy. Korzystając z równań (6.15) i (6.12) znajdujemy prędkość polową

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} b \sqrt{k/a}.$$

Stąd okres obiegu T można obliczyć ze wzoru

$$T = \frac{\text{pole elipsy}}{\text{prędkość polowa}} = \frac{\pi ab}{dA/dt} = \frac{2\pi a^{3/2}}{k^{1/2}}.$$