Rozdział 2

Proste równania skalarne

Znajdowanie rozwiązań równań różniczkowych w formie jawnych wzorów analitycznych jest sprawą trudną. Nie istnieje uniwersalna procedura znajdowania takich rozwiązań dla szerokiej klasy równań. Znane są jedynie procedury dla pewnych szczególnych klas równań – w zasadzie wyłącznie dla równań skalarnych. Przykłady takich procedur zostaną przedstawione w tym rozdziale.

2.1 Równania o zmiennych rozdzielonych

2.1 DEFINICJA. *Równanie*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

nazywamy ***równaniem o zmiennych rozdzielonych****, jeśli funkcja dwóch zmiennych* $f(t, x)$ *jest iloczynem dwóch funkcji jednej zmiennej*

$$f(t, x) = g_1(t)g_2(x).$$

Równanie o zmiennych rozdzielonych można prosto scałkować. Dowód poniższego twierdzenia jest jednocześnie konstruktywną metodą całkowania takich równań.

2.2 TWIERDZENIE. *Dane jest równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych*

$$\dot{x} = g_1(t)g_2(x). \tag{2.1}$$

Niech funkcje $g_1(t)$ *i* $g_2(x)$ *będą ciągłe dla* $t \in (a, b)$ *i* $x \in (c, d)$ *oraz niech* $g_2(x)$ *nie ma zer w przedziale* (c, d)*. Wtedy przez każdy punkt* (t_0, x_0) *prostokąta* $Q = \{(t, x)\colon\ t \in (a, b), x \in (c, d)\}$ *przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (2.1) dana wzorem*

$$x(t) = G_2^{-1}\big(G_1(t) - G_1(t_0) + G_2(x_0)\big), \tag{2.2}$$

gdzie $G_1(t)$ *jest funkcją pierwotną funkcji* $g_1(t)$*, a* $G_2(x)$ *– funkcją pierwotną funkcji* $1/g_2(x)$*.*

Dowód. Równanie (2.1) dzielimy przez $g_2(x)$

$$\frac{1}{g_2(x)}\frac{dx}{dt} = g_1(t)$$

a następnie zapisujemy tę równość w postaci

$$\frac{d}{dt}G_2(x(t)) = g_1(t),$$

gdzie $G_2(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $1/g_2(x)$. Całkując ostatnie równanie w przedziale (t_0, t) otrzymujemy

$$G_2\big(x(t)\big) - G_2\big(x(t_0)\big) = G_1(t) - G_1(t_0),$$

gdzie $G_1(t)$ jest funkcją pierwotną funkcji $g_1(t)$. Funkcja G_2 jest monotoniczna, bo $G_2' = 1/g_2 \neq 0$, czyli pochodna G_2 ma stały znak. Istnieje więc funkcja odwrotna do G_2. Stąd rozwiązanie ma postać

$$x(t) = G_2^{-1}\big(G_1(t) - G_1(t_0) + G_2(x_0)\big).$$

W ten sposób udowodniliśmy wzór (2.2). Jednocześnie otrzymane rozwiązanie jest jednoznaczne, co wynika z definicji całki oznaczonej. ■

2.3 Przykład. Powrócimy do równania

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x}{y}, \tag{2.3}$$

które było rozpatrywane w przykładzie 1.9. Zapisując to równanie w postaci

$$\frac{dy}{dx} = x\,\frac{y+1}{y},$$

widzimy, że jest to równanie o zmiennych rozdzielonych.

Łatwo zauważyć, że funkcją pierwotną dla $\frac{y}{y+1}$ jest funkcja $y - \ln|y+1|$, a funkcją pierwotną dla x jest $\frac{1}{2}x^2 + c$. W efekcie rozwiązanie równania (2.3) ma postać podaną w przykładzie 1.9.

$$y - \ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + c.$$

2.4 Przykład. Z doświadczeń fizycznych wiadomo, że ciało zrzucone pionowo w dół z wysokiej wieży nie upada w punkcie wyznaczonym przez spuszczony z tej wieży ciężarek na nitce (ciało rzucone upada na wschód od punktu wyznaczonego przez ciężarek). Przyczyną tego zjawiska jest występowanie siły Coriolisa związanej z ruchem obrotowym Ziemi. Wiadomo, że na ciało o masie m poruszające się względem Ziemi z prędkością v działa siła Coriolisa

$$F = 2mv \times \omega,$$

gdzie ω jest wektorem prędkości kątowej Ziemi, a znak $\times$ oznacza iloczyn wektorowy.

Aby zobaczyć jak duże przesuniecie daje uwzględnienie siły Coriolisa rozważmy kamień rzucony do szybu o głębokości h w miejscu, którego szerokość geograficzna wynosi φ. Niech $x(t)$ będzie trajektorią lotu kamienia. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona funkcja ta spełnia równanie

$$\ddot{x} = g + 2\dot{x} \times \omega, \tag{2.4}$$

w którym uwzględniliśmy siłę przyciągania ziemskiego oraz siłę Coriolisa.

Niech $z(t)$ będzie trajektorią spadającego kamienia na nieobracającej się Ziemi. Funkcja ta dana jest wzorem $z(t) = z(0) + \frac{1}{2}gt^2$, bo spełnia równanie $\ddot{z} = g$. Ponieważ prędkość kątowa Ziemi jest bardzo mała, to rozwiązania równania (2.4) będziemy poszukiwać w postaci przybliżenia liniowego względem ω. Wtedy funkcję $x(t)$ możemy w przybliżeniu przedstawić jako $x(t) = z(t) + |\omega|y + \mathcal{O}(\omega^2)$, gdzie $y(t)$ jest poszukiwaną poprawką.

Wstawiając to przybliżenie do równania (2.4) dostajemy równanie o rozdzielonych zmiennych

$$|\omega|\ddot{y} = 2t\, g \times \omega.$$

Prowadzi to do zagadnienia Cauchy'ego dla funkcji $y(t)$ (warunki początkowe wynikają w sposób oczywisty z charakteru funkcji $y(t)$)

$$\ddot{y} = 2t\, g \times \frac{\omega}{|\omega|}, \quad y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0.$$

Wykorzystując dwukrotnie wzór z tw. 2.2 znajdujemy rozwiązanie tego zagadnienia początkowego

$$y(t) = \frac{1}{3}t^3 g \times \frac{\omega}{|\omega|},$$

(stałe całkowania znikają ze względu na postać warunku początkowego).

Wykorzystując fakt, że przy swobodnym spadaniu zachodzi związek $h = \frac{1}{2}gt^2$ rozwiązanie można zapisać w postaci

$$y(t) = \frac{2}{3}th \times \frac{\omega}{|\omega|}.$$

Zauważmy, że wektor h skierowany jest do środka Ziemi, więc w punkcie o szerokości geograficznej φ iloczyn wektorowy $h \times \frac{\omega}{|\omega|}$ ma wartość $|h| \cos\varphi$.

Ostatecznie

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}h\cos\varphi,$$

gdzie wszystkie wielkości traktujemy już jak skalary (długości odpowiednich wektorów).

Aby wyrobić sobie wyobrażenie jak duże jest odchylenie wywołane siłą Coriolisa, rozważmy rzut kamieniem do szybu o głębokości 100 m w punkcie o szerokości geograficznej $60°$. Ponieważ $\omega = 7.3\ 10^{-5}\text{sec}^{-1}$, to $\omega y = 1.10$ cm.

2.5 Przykład. Wykorzystamy współrzędne biegunowe na płaszczyźnie (r, φ) aby znaleźć równanie krzywej o tej własności, że w każdym punkcie styczna do krzywej tworzy z promieniem wodzącym stały kąt α.

Punkt na płaszczyźnie leżący na poszukiwanej krzywej ma współrzędne biegunowe $(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$. Wektor styczny do tej krzywej ma współrzędne

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}\right) = (\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi, \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi),$$

gdzie $\dot{r}$ oznacza pochodną $\frac{dr}{d\varphi}$. Obliczmy iloczyn skalarny promienia wodzącego oraz wektora stycznego

$$\begin{aligned}&(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\cdot(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi, \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi) =\\ &\dot{r}r\cos^2\varphi - r^2\sin\varphi\cos\varphi + \dot{r}r\sin^2\varphi + r^2\sin\varphi\cos\varphi = \dot{r}r.\end{aligned}$$

Jak wiadomo dla iloczynu skalarnego wektorów u i v zachodzi zależność $u \cdot v = |u|\,|v|\cos\alpha$, gdzie α jest kątem między wektorami. Aby wykorzystać tę zależność musimy policzyć długości wektora promienia wodzącego, co jest łatwe, bo długość tego wektora wynosi r, oraz długość wektora stycznego. Obliczmy kwadrat długości wektora stycznego

$$\begin{aligned}&(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi)^2 =\\ &\dot{r}^2\cos^2\varphi - 2\dot{r}r\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + \dot{r}^2\sin^2\varphi + 2\dot{r}r\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi\\ &= \dot{r}^2 + r^2.\end{aligned}$$

Prowadzi to do następującego równania różniczkowego dla poszukiwanej krzywej

$$\frac{\dot{r}r}{r\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}} = \cos\alpha.$$

Po przekształceniach dostajemy równanie

$$\dot{r}^2 = cr^2,$$

gdzie $c = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

Prowadzi to do dwóch równań o rozdzielonych zmiennych

$$\dot{r} = c_1 r, \quad \text{oraz} \quad \dot{r} = -c_1 r,$$

gdzie $c_1 = \operatorname{ctg}\alpha$. Rozwiązania tych równań są postaci

$$\begin{aligned}r(\varphi) &= r(\varphi_0)\exp\big(c_1(\varphi - \varphi_0)\big),\\ r(\varphi) &= r(\varphi_0)\exp\big(-c_1(\varphi - \varphi_0)\big),\end{aligned}$$

czyli jest to zwijająca się oraz rozwijająca się spirala logarytmiczna (o tym która się zwija decyduje znak stałej c_1, czyli wartość kąta α).

2.2 Równania jednorodne

Metoda całkowania równań różniczkowych opisana w dowodzie tw. 2.2 jest jedną z nielicznych metod znajdowania rozwiązań analitycznych. Wiele innych metod polega w rzeczywistości na sprowadzeniu rozważanego problemu do równania o zmiennych rozdzielonych.

Obecnie zajmiemy się jednorodnymi równaniami różniczkowymi. Równania te przez odpowiednią zamianę zmiennych sprowadzają się właśnie do równań o zmiennych rozdzielonych.

Przypomnijmy, że funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ nazywa się funkcją jednorodną stopnia n, jeśli $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, dla $t > 0$.

Zanim zaczniemy rozpatrywać równania z funkcjami jednorodnymi, sformułujemy nieco ogólniej zapis równania. Zauważmy bowiem, że w przypadku pojedynczego równania decyzja, która zmienna jest zmienną zależną, a która zmienną niezależną, jest dość arbitralna. Aby podkreślić tę dowolność wyboru, będziemy równanie

$$\dot{x} = f(t, x)$$

zapisywać w postaci zachowującej pełną symetrię zmiennych

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{2.5}$$

Równanie zapisane w postaci (2.5) będziemy nazywali **równaniem różniczkowym w postaci różniczek**.

2.6 DEFINICJA. *Równanie różniczkowe w postaci różniczek (2.5) nazywa się **równaniem jednorodnym** (stopnia n), jeśli funkcje $M(x, y)$ i $N(x, y)$ są funkcjami jednorodnymi stopnia n.*

2.7 TWIERDZENIE. *Dane jest równanie jednorodne stopnia n*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{2.6}$$

Zakładamy, że $M(x, y)$ i $N(x, y)$ są funkcjami ciągłymi w zbiorze $Q = \{(x, y)\colon a < \frac{y}{x} < b\}$ oraz

$$xM(x, y) + yN(x, y) \neq 0.$$

Wtedy przez każdy punkt $(x_0, y_0) \in Q$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (2.6).

Dowód. Równanie (2.6) można sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych przez dowolne z podstawień: $y = ux$ lub $x = vy$. Podstawmy $y = ux$ i scałkujmy równania (2.6)

$$\begin{aligned} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \\ &= M(x,ux)dx + N(x,ux)(xdu + udx) = \\ &= x^n M(1,u)dx + x^n N(1,u)(xdu + udx) = \\ &= x^n \big(M(1,u) + uN(1,u)\big)dx + x^{n+1} N(1,u)du = 0. \end{aligned}$$

Po przekształceniu otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dx}{x} = -\frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)} du. \tag{2.7}$$

Ponieważ $M(1,u) + uN(1,u) \neq 0$, więc prawa strona jest funkcją ciągłą, czyli ma funkcję pierwotną $G(u)$. Stąd po scałkowaniu

$$\ln|x| = G(u) - G\Big(\frac{y_0}{x_0}\Big) + \ln|x_0|.$$

Po przejściu do zmiennych (x,y), mamy

$$\ln|x| = G\Big(\frac{y}{x}\Big) - G\Big(\frac{y_0}{x_0}\Big) + \ln|x_0|.$$

Zgodnie z tw. 2.2 całkowanie równania (2.7) jest możliwe tylko w takim obszarze Q, który nie zawiera punktów (x,y) o współrzędnej $x = 0$. Jeśli obszar Q zawiera takie punkty, a nie zawiera punktów o współrzędnej $y = 0$, to równanie (2.6) można rozwiązać, stosując podstawienie $x = vy$. ■

2.8 Przykład. Znajdziemy krzywe całkowe następującego równania zapisanego w postaci różniczek

$$\big(\sqrt{x^2 + y^2} + x\big)dy - ydx = 0. \tag{2.8}$$

Równanie (2.8) jest równaniem jednorodnym stopnia pierwszego i spełnione są założenia tw. 2.7. Po podstawieniu $x = vy$ otrzymujemy

$$y\big(\sqrt{1 + v^2} + v\big)dy - y(vdy + ydv) = 0.$$

Po uproszczeniach równanie to sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych

$$\sqrt{1 + v^2}dy - ydv = 0,$$

które po scałkowaniu daje równość

$$\ln y + c_1 = \ln\Big(v + \sqrt{1 + v^2}\Big).$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$v + \sqrt{1 + v^2} = c_2 y, \quad \text{gdzie} \quad c_2 = \ln c_1.$$

Przechodzimy do zmiennych (x, y) i ostatnie równanie zapisujemy w postaci

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = c_1 y^2,$$

czyli

$$y^2 = \frac{2}{c_1}x + \frac{1}{c_1^2}.$$

Po podstawieniu $c = \frac{1}{c_1}$ otrzymujemy

$$y^2 = 2c\Big(x + \frac{c}{2}\Big).$$

Jest to równanie paraboli, której wierzchołek leży w punkcie $(-\frac{c}{2}, 0)$, a ognisko znajduje się w początku układu współrzędnych.

2.9 Przykład. Znajdziemy rodzinę krzywych całkowych, opisanych równaniem

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$$

Równanie to nie jest równaniem jednorodnym. Można jednak szukać takiego nowego układu zmiennych, aby wyeliminować w wyrażeniach $M(x, y)$ oraz $N(x, y)$ wyraz wolny.

Zdefiniujmy nowe zmienne

$$s = x - x_0, \quad t = y - y_0.$$

Podstawiając te zmienne do równania dostajemy

$$\begin{aligned} s + x_0 + t + y_0 - 2 &= s + t + x_0 + y_0 - 2, \\ s + x_0 - t - y_0 + 4 &= s - t + x_0 - y_0 + 4. \end{aligned}$$

Aby wyeliminować wyraz wolny należy wybrać x_0 i y_0, tak aby spełniały one układ równań

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 - 2 &= 0, \\ x_0 - y_0 + 4 &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ponieważ wyznacznik tego układu liniowego jest różny od zera, znajdujemy rozwiązanie $x_0 = -1$, $y_0 = 3$. Po podstawieniu otrzymujemy równanie jednorodne

$$(s + t)ds + (s - t)dt = 0.$$

Dalsze postępowanie jest już proste. Podstawiamy $t = us$ i mamy równanie

$$(s + us)ds + (s - us)(sdu + uds) = 0.$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$(1 + 2u - u^2)ds + s(1 - u)du = 0.$$

Po scałkowaniu mamy

$$\ln|s| + \frac{1}{2}\ln|1 + 2u - u^2| = \ln c,$$

czyli

$$s^2(1 + 2u - u^2) = c^2.$$

Wracamy do wyjściowych zmiennych (x, y) i otrzymujemy równanie

$$(x+1)^2\left(1 + 2\frac{y-3}{x+1} - \frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right) = c^2,$$

czyli

$$(x+1)^2 + 2(y-3)(x+1) - (y-3)^2 = c^2.$$

Metody z przykładu 2.9 nie można zastosować, gdy wyznacznik układu (2.9) jest zerowy. Wtedy jednak oba wiersze macierzy układu są do siebie proporcjonalne i podstawienie $z = ax + by$ pozwala sprowadzić równanie do równania o zmiennych rozdzielonych.

2.3 Równania w postaci różniczek zupełnych

Może się zdarzyć, że równanie w postaci różniczek jest różniczką zupełną funkcji dwóch zmiennych. Analiza dostarcza nam narzędzi, które pozwalają łatwo ten fakt sprawdzić. Z drugiej strony, jeśli pewna różniczka dwóch zmiennych jest różniczką zupełną, to łatwo można znaleźć funkcję, której różniczka pokrywa się z rozważaną.

2.10 TWIERDZENIE. *Załóżmy, że w zbiorze* $Q = \{(x, y) : x \in (a, b), y \in (c, d)\}$ *funkcje* $M(x, y)$, $N(x, y)$, $M_y(x, y)$ *i* $N_x(x, y)$ *są ciągłe oraz*

$$M_y(x, y) = N_x(x, y). \tag{2.10}$$

Wtedy wyrażenie

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{2.11}$$

jest różniczką zupełną, czyli różniczką pewnej funkcji $F(x, y)$*. Jeśli dodatkowo jedna z funkcji* $M(x, y)$ *lub* $N(x, y)$ *jest różna od zera w każdym punkcie zbioru* Q*, to przez każdy punkt* $(x_0, y_0) \in Q$ *przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{2.12}$$

Dowód. Jeśli spełniony jest warunek (2.10), to istnienie funkcji $F(x,y)$, której różniczką jest wyrażenie (2.11), wynika z odpowiedniego twierdzenia z analizy. Oznacza to, że (2.11) jest różniczką zupełną. Załóżmy, że $N(x,y) \neq 0$. Wtedy równanie (2.12) można przepisać w postaci

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.13}$$

Z faktu, że (2.11) jest różniczką zupełną wynikają równości

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Wobec tego równanie (2.13) sprowadza się do równania

$$\frac{dF\big(x, y(x)\big)}{dx} = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$F\big(x, y(x)\big) = c. \tag{2.14}$$

Przyjmując $c = F(x_0, y_0)$ uzyskujemy jednoznaczność rozwiązania oraz spełnienie warunku początkowego. Warunek $N \neq 0$ gwarantuje spełnienie założeń twierdzenia o funkcji uwikłanej, czyli równanie (2.14) można rozwikłać, znajdując funkcję $y(x)$ w jawnej postaci. ■

2.11 Przykład. Znajdziemy krzywą całkową równania

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0,$$

przechodzącą przez punkt (1,1).
Sprawdzamy, że jest to równanie w postaci różniczki zupełnej

$$\frac{\partial(2x + 3x^2y)}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial(x^3 - 3y^2)}{\partial x}.$$

Całkując to równanie, skorzystamy z faktu, że całka krzywoliniowa różniczki zupełnej nie zależy od drogi całkowania. Całkę łączącą punkt $(1,1)$ z punktem (x,y) obliczymy po łamanej łączącej punkty $(1,1)$, $(x,1)$ i (x,y).

$$\int_{(1,1)}^{(x,y)} (2t + 3t^2s)dt + (t^3 - 3s^2)ds =$$
$$\int_{(1,1)}^{(x,1)} (2t + 3t^2)dt + \int_{(x,1)}^{(x,y)} (x^3 - 3s^2)ds =$$
$$x^2 + x^3 - 2 + x^3y - y^3 - x^3 + 1 = x^2 + x^3y - y^3 - 1.$$

Oznacza to, że $F(x,y) = x^2 + x^3 y - y^3 - 1$. W celu znalezienia rozwiązania naszego równania należy rozwikłać równanie

$$F(x,y) = 0.$$

Równanie to można rozwikłać względem każdej zmiennej bo $F_y(1,1) = -2$ a $F_x(1,1) = 5$. Jednak ze względu na postać funkcji $F(x,y)$ znalezienie rozwiązania w postaci rozwikłanej nie jest proste.

Równania w postaci różniczek zupełnych nie występują zbyt często. Wiele równań można jednak sprowadzić do postaci różniczki zupełnej po pomnożeniu przez pewną funkcję. Funkcja taka nazywa się **czynnikiem całkującym**. Jeśli wyrażenie

$$Mdx + Ndy \tag{2.15}$$

pomnożymy przez czynnik całkujący $\mu(x,y)$

$$\mu M dx + \mu N dy$$

i zażądamy, aby nowe wyrażenie było różniczką zupełną

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x},$$

to otrzymamy skomplikowane równanie o pochodnych cząstkowych

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{2.16}$$

Oczywiście rozwiązanie równania (2.16) nie jest wcale łatwiejsze od rozwiązania wyjściowego równania zwyczajnego. Często jednak jest bliskie różniczce zupełnej. Wtedy czynnik $N_x - M_y$, występujący po prawej stronie równania (2.16), może być stały albo może być funkcją tylko jednej zmiennej. Sugeruje to poszukiwanie czynnika całkującego w postaci $\mu(x)$ lub $\mu(y)$ albo $\mu = \mu(z)$, gdzie z jest znaną funkcją zmiennych x i y.

Można tu sformułować kilka prostych obserwacji pomocnych w znajdowaniu takich czynników całkujących:

1. Jeśli
$$-\frac{1}{N}(N_x - M_y) = f(x)$$
to czynnik całkujący jest funkcją jedynie zmiennej x: $\mu(x) = \exp\int f(x)$.

2. Jeśli
$$\frac{1}{M}(N_x - M_y) = f(y)$$
to czynnik całkujący jest funkcją jedynie zmiennej y: $\mu(y) = \exp\int f(y)$.

3. Czynnik całkujący jest postaci $\mu(x,y) = \varphi(z(x,y))$, gdzie z jest nowa zmienną, jeśli
$$\frac{N_x - M_y}{Nz_x - Mz_y} = f(z).$$

Poniższe przykłady ilustrują kilka takich przypadków.

2.12 Przykład. Znajdziemy całkę ogólną równania
$$(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0. \tag{2.17}$$

Równanie nie jest w postaci różniczki zupełnej, bo
$$N_x - M_y = -\cos y.$$

Zauważmy jednak, że wyrażenie
$$\frac{1}{N}(N_x - M_y) = -1$$
można traktować jako funkcją zmiennej x, co prowadzi do czynnika całkującego $\mu(x) = e^x$. Mnożymy równanie (2.17) przez ten czynnik całkujący i otrzymujemy
$$e^x(x + \sin x + \sin y)dx + e^x \cos y dy = 0.$$

Równanie to całkujemy po łamanej złożonej z odcinków równoległych do osi współrzędnych (jak w przykładzie 2.11), łączącej punkt (p_1, p_2) z punktem (x, y)
$$\int_{(p_1,p_2)}^{(x,y)} e^t(t + \sin t + \sin s)dt + e^t \cos s ds =$$
$$\int_{(p_1,p_2)}^{(x,p_2)} e^t(t + \sin t + \sin p_2)dt + \int_{(x,p_2)}^{(x,y)} e^x \cos s ds =$$
$$xe^x - e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + e^x \sin p_2 + e^x \sin y$$
$$- p_1 e^{p_1} + e^{p_1} - \frac{1}{2}(\sin p_1 - \cos p_1)e^{p_1} - e^x \sin p_2 =$$
$$xe^x - e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + e^x \sin y$$
$$- p_1 e^{p_1} + e^{p_1} - \frac{1}{2}(\sin p_1 - \cos p_1)e^{p_1}.$$

Całka ogólna ma więc postać
$$xe^x - e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + e^x \sin y = c.$$

2.13 Przykład. Znajdziemy całkę ogólną równania

$$(xy^2 + y)dx - (x + y^2)dy = 0. \tag{2.18}$$

Równanie nie jest w postaci różniczki zupełnej bo

$$N_x - M_y = -2xy - 2.$$

Zauważmy jednak, że wyrażenie

$$\frac{1}{M}(N_x - M_y) = -\frac{2}{y},$$

jest funkcją zmiennej y, co prowadzi do czynnika całkującego $\mu(x) = y^{-2}$. Mnożymy równanie (2.18) przez ten czynnik całkujący i otrzymujemy

$$(x + y^{-1})dx - (xy^{-2} + 1)dy = 0.$$

Równanie to całkujemy po łamanej złożonej z odcinków równoległych do osi współrzędnych (jak w przykładzie 2.11), łączącej punkt (p_1, p_2) z punktem (x, y)

$$\int_{(p_1,p_2)}^{(x,y)} (t + s^{-1})dt - (ts^{-2} + 1)ds =$$
$$\frac{1}{2}x^2 + xy^{-1} - y - \frac{1}{2}p_1^2 + p_1p_2^{-1} - p_2.$$

Całka ogólna ma więc postać

$$\frac{1}{2}x^2 + xy^{-1} - y = c.$$

2.14 Przykład. Znajdziemy całkę ogólną równania

$$xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0. \tag{2.19}$$

Ponieważ

$$N_x - M_y = -1,$$

równanie nie jest w postaci różniczki zupełnej. Postać funkcji $M(x, y)$ i $N(x, y)$ wskazuje także, że nie ma czynnika całkującego, który byłby tylko funkcją zmiennej x lub y. Można jednak zauważyć, że poszukując czynnika całkującego w postaci $\mu = \mu(z)$ dostaniemy z równania (2.16) wyrażenie

$$\frac{1}{xy^2z_y - (x^2y - x)z_x}.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli przyjąć $z(x,y) = xy$, to wyrażenie powyższe stanie się funkcją wyłącznie zmiennej z

$$\frac{1}{xy^2z_y - (x^2y - x)z_x} = \frac{1}{x^2y^2 - (x^2y^2 - xy)} = \frac{1}{xy}.$$

Poszukujemy więc czynnika całkującego w formie $\mu = \mu(xy)$. Aby znaleźć ten czynnik wracamy do równania (2.16) i po podstawieniu $z = xy$ otrzymujemy równanie

$$z^2\mu' - (z^2 - z)\mu' = -\mu.$$

Po uporządkowaniu mamy

$$z\mu' = -\mu,$$

czyli $\mu = (xy)^{-1}$. Po pomnożeniu równania (2.19) przez czynnik całkujący otrzymujemy

$$ydx + \Big(x - \frac{1}{y}\Big)dy = 0.$$

Całkujemy to równanie, jak w poprzednim przykładzie, po łamanej łączącej punkty (p_1, p_2) i (x, y)

$$\begin{aligned}\int_{(p_1,p_2)}^{(x,y)} sdt + \Big(t - \frac{1}{s}\Big)ds &= p_2x - p_1p_2 + xy - p_2x - \ln|y| + \ln|p_2| \\ &= xy - \ln|y| - p_1p_2 + \ln|p_2|.\end{aligned}$$

Stąd mamy całkę ogólną

$$xy - \ln|y| = c.$$

2.4 Równania liniowe pierwszego rzędu

Obecnie zajmiemy się przypadkiem równań liniowych pierwszego rzędu.

2.15 DEFINICJA. *Równanie postaci*

$$\dot{x} + p(t)x = q(t), \tag{2.20}$$

*gdzie $p(t)$ i $q(t)$ są funkcjami zmiennej $t \in (a,b)$, nazywa się **równaniem liniowym**. Jeśli $q(t) \equiv 0$, to jest to **równanie liniowe jednorodne**.*

Dla równania (2.20) bardzo łatwo można otrzymać twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności.

2.16 TWIERDZENIE. *Jeśli funkcje $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe dla $t \in (a,b)$, to przez każdy punkt zbioru $Q = (a,b) \times \mathbb{R}$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (2.20). Maksymalnym przedziałem istnienia każdego takiego rozwiązania jest przedział (a,b).*

Dowód. Dowód przeprowadzimy konstruktywnie, podając rozwiązanie w postaci wzoru analitycznego. Rozważmy najpierw równanie jednorodne

$$\dot{x} = -p(t)x.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Jego rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = c\exp\Big(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big). \tag{2.21}$$

Aby znaleźć rozwiązanie równania niejednorodnego, stosujemy metodę **uzmienniania stałej**: w miejsce stałej c wstawiamy nieznaną funkcję $z(t)$ i poszukujemy rozwiązania w postaci

$$x(t) = z(t)\exp\Big(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big). \tag{2.22}$$

Po podstawieniu (2.22) do równania (2.20) otrzymujemy

$$\dot{z}(t)\exp\Big(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big) - z(t)p(t)\exp\Big(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big) + \\ + p(t)z(t)\exp\Big(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big) = q(t).$$

Daje to następujące równanie dla funkcji $z(t)$

$$\dot{z} = q(t)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big),$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} q(\tau)\exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} p(s)ds\Big)d\tau. \tag{2.23}$$

Podstawiamy (2.23) do (2.21) oraz wykorzystujemy fakt, że $z(t_0) = x(t_0)$ i dostajemy rozwiązanie równania (2.20)

$$x(t) = x(t_0)\exp\Big(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big) + \int_{t_0}^{t} q(\tau)\exp\Big(-\int_{\tau}^{t} p(s)ds\Big)d\tau. \tag{2.24}$$

Należy jeszcze pokazać, że otrzymane rozwiązanie lokalne przedłuża się na cały odcinek (a, b). Wystarczy w tym celu udowodnić, że rozwiązanie jest ograniczone w każdym punkcie wewnętrznym przedziału (a, b). Niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem przechodzącym przez punkt (t_0, x_0). Pokażemy, że jeśli $t_1 \in (a, b)$, to $x(t_1)$ jest ograniczone. Wykorzystując postać rozwiązania (2.24) dostajemy oszacowanie

$$|x(t_1)| \leqslant \Big|x_0 + \int_{t_0}^{t_1} q(\tau)d\tau\Big|e^{K(t_1-t_0)},$$

gdzie $K = \sup_{t\in[t_0,t_1]} |p(t)|$. Ponieważ odcinek $[t_0, t_1]$ jest zwarty, więc funkcja $q(t)$ jest ograniczona dla $t \in [t_0, t_1]$ i

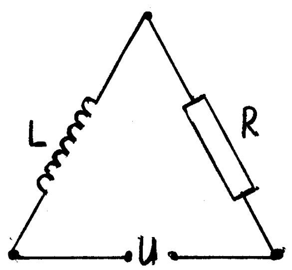
$$\left|x_0 + \int_{t_0}^{t_1} q(\tau)d\tau\right| = c < +\infty.$$

Stąd

$$|x(t_1)| \leqslant ce^{K(t_1-t_0)}.$$

Oznacza to, że rozwiązanie $x(t)$ jest ograniczone w każdym punkcie $t_1 \in (a, b)$. ■

2.17 Przykład. Niech będzie dany prosty obwód elektryczny, zawierający oporność R i indukcyjność L (rys. 2.1). Niech I oznacza natężenie prądu w obwodzie a U – przyłożone napięcie. Z teorii obwodów elektrycznych znane są prawa rządzące



Rysunek 2.1: Schemat obwodu elektrycznego

przepływem prądu w takim obwodzie

$$L\frac{dI}{dt} = U \quad \text{(prawo Faradaya)},$$
$$RI = U \quad \text{(prawo Ohma)}.$$

Sumując spadki napięcia na oporności R i indukcyjności L dostajemy równanie na natężenie prądu w obwodzie

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U. \tag{2.25}$$

Równanie (2.25) jest równaniem liniowym. Jeśli dane jest natężenie prądu w chwili początkowej $I_0 = I(0)$, to rozwiązanie równania (2.25) dane jest wzorem

$$I(t) = e^{-\int_0^t \frac{R}{L}ds}\left(I_0 + \int_0^t \frac{U}{L}e^{\int_0^\tau \frac{R}{L}ds}d\tau\right). \tag{2.26}$$

Jeśli R, L i U są stałe, to rozwiązanie redukuje się do prostszej postaci

$$I(t) = \frac{U}{R} + e^{-\frac{R}{L}t}\Big(I_0 - \frac{U}{R}\Big).$$

Przeanalizujmy asymptotyczne zachowanie się natężenia prądu w obwodzie, gdy obwód zostaje podłączony do źródła napięcia ($I_0 = 0$). Wtedy

$$I(t) = \frac{U}{R}\Big(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\Big), \quad \lim_{t\to+\infty} I(t) = \frac{U}{R}.$$

Zachowanie asymptotyczne przy wyłączaniu napięcia ($U = 0$) ma postać

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad \lim_{t\to+\infty} I(t) = 0.$$

2.18 Przykład. W dalszym ciągu zajmować się będziemy obwodem elektrycznym opisanym w poprzednim przykładzie. Pozostawiając założenie, że R i L są stałe, przyjmiemy oscylujący przebieg napięcia $U = B\sin\omega t$ (obwód zasilany prądem zmiennym). Rozwiązanie (2.26) nadal pozostaje prawdziwe. Jeśli $\frac{R}{L} \neq \omega$, to rozwiązanie przyjmie postać

$$\begin{aligned} I(t) =& e^{-\frac{R}{L}t}\Big(I_0 + \frac{B}{L}\frac{\omega}{(R/L)^2+\omega^2}\Big) \\ &+ \frac{B}{L}\Big(\frac{R/L}{(R/L)^2+\omega^2}\sin\omega t - \frac{\omega}{(R/L)^2+\omega^2}\cos\omega t\Big) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Jeśli $\frac{R}{L} = \omega$, rozwiązanie przyjmie prostszą postać

$$I(t) = e^{-\omega t}\Big(I_0 + \frac{B}{2L\omega}\Big) + \frac{B}{2L\omega}(\sin\omega t - \cos\omega t),$$

którą można otrzymać przez formalne podstawienie $\frac{R}{L} = \omega$ do wzoru (2.27).

Jeśli we wzorze (2.27) wprowadzimy przesunięcie fazowe δ, takie że $\operatorname{tg}\delta = \frac{\omega}{R/L}$, to wzór ten uprości się do następującego

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\Big(I_0 + \frac{B}{L}\frac{\omega}{(R/L)^2+\omega^2}\Big) + \frac{B}{L\sqrt{(R/L)^2+\omega^2}}\sin(\omega t - \delta).$$

Z ostatniego wzoru łatwo widać, że dla dużych t natężenie prądu oscyluje z tą samą częstością co napięcia jedynie z pewnym przesunieciem fazowym w stosunku do oscylacji napięcia.

2.5 Równania sprowadzalne do równań liniowych

Podamy teraz przykłady równań nieliniowych, które przez odpowiednią zamianę zmiennych można sprowadzić do równań liniowych, a tym samym efektywnie scałkować. Jako pierwszy przykład rozważmy równanie nieliniowe

$$\dot{x} + p(t)x + q(t)x^n = 0. \tag{2.28}$$

Równanie tej postaci nazywa się **równaniem Bernoulliego**. Liczbę n nazywa się **wykładnikiem Bernoulliego**. Dla $n = 0$ lub $n = 1$ równanie (2.28) jest równaniem liniowym. Dla innych wartości wykładnika Bernoulliego równanie (2.28) można sprowadzić do równania liniowego przez podstawienie

$$z = x^{1-n}. \tag{2.29}$$

Po podzieleniu równania (2.28) przez x^n otrzymujemy

$$\dot{x}x^{-n} + p(t)x^{1-n} + q(t) = 0. \tag{2.30}$$

Po uproszczeniach dostajemy równanie

$$\frac{1}{1-n}\dot{z} + p(t)z + q(t) = 0,$$

czyli równanie liniowe.

2.19 Przykład. Znajdziemy rozwiązanie ogólne równania

$$\dot{x} - 2tx = 2t^3x^2. \tag{2.31}$$

Jest to równanie Bernoulliego z wykładnikiem 2. Dzielimy równanie (2.31) przez x^2 i podstawiamy $z = x^{-1}$, skąd otrzymujemy

$$\frac{\dot{x}}{x^2} - 2tx^{-1} = 2t^3,$$

a po uporządkowaniu wyrazów

$$\dot{z} + 2tz = -2t^3.$$

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$\dot{z} + 2tz = 0.$$

Jego rozwiązanie ogólne ma postać

$$z(t) = Ce^{-t^2}.$$

Następnie dokonujemy uzmienniania stałej

$$z = u(t)e^{-t^2}.$$

Po wstawieniu do równania niejednorodnego mamy

$$(\dot{u} - 2tu)e^{-t^2} + 2tue^{-t^2} = -2t^3.$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy

$$\dot{u}e^{-t^2} = -2t^3,$$

a po scałkowaniu

$$u = -2\int e^{t^2}t^3dt = -\int e^y y dy = -ye^y + e^y + c = (1-t^2)e^{t^2} + c.$$

Korzystając z tego rozwiązania, obliczamy $z(t)$, a następnie $x(t)$

$$z(t) = 1 - t^2 + ce^{-t^2}, \qquad x(t) = \left(1 - t^2 + ce^{-t^2}\right)^{-1}.$$

Innym typem równania, które w pewnych przypadkach daje się sprowadzić do równania liniowego, jest równanie

$$\dot{x} + p(t)x + q(t)x^2 + r(t) = 0. \tag{2.32}$$

Równanie to nazywa się **równaniem Riccatiego**. W ogólności nie istnieje sposób jego analitycznego całkowania. Jeśli jednak znamy jedno rozwiązanie szczególne $x_1(t)$ równania (2.32), to przez podstawienie

$$u = x - x_1 \tag{2.33}$$

można to równanie sprowadzić do równania Bernoulliego. Ponieważ $\dot{x} = \dot{u} + \dot{x}_1$, więc podstawiając tę równość do lewej strony równania (2.32) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 + \dot{u} + p(t)(x_1 + u) + q(t)(x_1 + u)^2 + r(t) = \\
&= [\dot{x}_1 + p(t)x_1 + q(t)x_1^2 + r(t)] + \dot{u} + p(t)u + 2q(t)x_1u + q(t)u^2 = \\
&= \dot{u} + p(t)u + 2q(t)x_1u + q(t)u^2.
\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że x_1 jest rozwiązaniem, więc część wyrażenia wzięta w nawias kwadratowy znika. Wynika stąd, że $u(t)$ spełnia równanie

$$\dot{u} + p(t)u + 2q(t)x_1(t)u + q(t)u^2 = 0.$$

Jest to równanie Bernoulliego z wykładnikiem 2 i jako takie można je rozwiązać analitycznie. Oczywiście powstaje pytanie, jak można znaleźć szczególne rozwiązanie $x_1(t)$. Niestety nie ma tu ogólnych metod. W zasadzie rozwiązanie $x_1(t)$ należy zgadnąć. Kiedy jednak uda się nam odgadnąć jedno rozwiązanie, wtedy przedstawiona metoda postępowania pozwala znaleźć rozwiązanie ogólne tego równania.

2.20 Przykład. Rozwiążemy równanie

$$\dot{x} + x^2 = 1 + t^2.$$

Z postaci równania łatwo można zgadnąć jego rozwiązanie szczególne $x_1(t) = t$. Poszukujemy teraz rozwiązania ogólnego

$$x(t) = t + u(t).$$

Prowadzi to do równania dla funkcji $u(t)$

$$\dot{u} + 2tu + u^2 = 0.$$

Jest to równanie Bernoulliego z wykładnikiem 2. Podstawiając $z = u^{-1}$ otrzymujemy

$$\dot{z} - 2tz - 1 = 0.$$

Z równania tego znajdujemy

$$z = e^{t^2}\Big(c + \int e^{-t^2} dt\Big).$$

Rozwiązanie ogólne wyjściowego równania ma więc postać

$$x(t) = t + e^{-t^2}\Big(c + \int e^{-t^2} dt\Big)^{-1}.$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że rozwiązanie to wyraża się przez funkcję $\int e^{-t^2} dt$, która nie jest funkcją elementarną.

Przypadek szczęśliwego zgadnięcia rozwiązania szczególnego równania Riccatiego jest oczywiście dość rzadki. Co prawda nie znane są procedury znajdowania takich rozwiązań dla równań Riccatiego w postaci ogólnej, ale w literaturze jest opisanych wiele przypadków szczególnych, kiedy znana jest metoda znalezienia rozwiązania szczególnego. Nie jest naszym celem przedstawienia wielu przypadków szczególnych, opiszemy tylko jeden, przydatny dla znacznej klasy równań.

Jeśli równanie Riccatiego jest postaci

$$\dot{x} = ax^2 + b\frac{x}{t} + c\frac{1}{t^2}, \tag{2.34}$$

gdzie a, b i c są stałe, to rozwiązania szczególnego należy poszukiwać w postaci

$$x_1(t) = \frac{A}{t}.$$

Poniższy przykład ilustruje postępowanie dla takich równań.

2.21 Przykład. Rozwiążemy równanie

$$\dot{x} + x^2 = 2t^{-2}. \tag{2.35}$$

Jest to równanie Riccatiego typu (2.34). Będziemy poszukiwali rozwiązania szczególnego w postaci

$$x(t) = \frac{a}{t}.$$

Po wstawieniu do równania (2.35) otrzymujemy

$$\frac{-a}{t^2} + \frac{a^2}{t^2} = \frac{2}{t^2},$$

czyli

$$a^2 - a - 2 = 0.$$

Stąd $a = 2$ lub $a = -1$. Mamy więc rozwiązanie szczególne

$$x_1(t) = \frac{2}{t}.$$

Poszukujemy teraz rozwiązania ogólnego

$$x(t) = x_1(t) + u(t).$$

Prowadzi to do równania dla funkcji $u(t)$

$$\dot{u} + 4t^{-1}u + u^2 = 0.$$

Jest to równanie Bernoulliego z wykładnikiem 2. Podstawiamy $z = u^{-1}$ i otrzymujemy

$$\dot{z} - 4t^{-1}z - 1 = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania liniowego jest funkcja

$$z = -\frac{1}{3}t + ct^4.$$

Stąd rozwiązanie ogólne równania (2.35) ma postać

$$x(t) = \left(-\frac{1}{3}t + ct^4\right)^{-1} + \frac{2}{t}.$$