

Rozdział 5

Układy autonomiczne

5.1 Stabilność w sensie Lapunowa

Przedmiotem analizy w tym rozdziale będą układy równań autonomicznych

$$\dot{x} = f(x), \quad (5.1)$$

z funkcją $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie Q jest otwartym zbiorem w \mathbb{R}^m , a f jest funkcją klasy C^1 .

Ograniczenie analizy do układów autonomicznych nie jest istotne, ponieważ w roz. 1 pokazaliśmy jak dowolne równanie nieautonomiczne

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (5.2)$$

można sprowadzić do postaci autonomicznej.

Analizę układu (5.1) rozpoczniemy od badania stabilności jego rozwiązań pod wpływem małych zmian warunków początkowych. Częściowej informacji dostarczą twierdzenia o ciągłej i gładkiej zależności rozwiązania od danych początkowych. Jednak uzyskane wyniki mają charakter lokalny, tzn. rozwiązanie zależy w sposób regularny w tym sensie, że jeśli dokonamy małego zaburzenia w chwili początkowej, to rozwiązanie zmieni się też mało dla czasu bliskiego chwili zaburzenia. Ta informacja nic nie mówi o zachowaniu się rozwiązania dla długiego czasu, jeśli dokonamy małego zaburzenia.

Zajmiemy się teraz odpowiedzią na pytanie, jakie warunki muszą być spełnione, aby małe zaburzenie danych początkowych powodowało małą zmianę rozwiązania nawet na długim odcinku czasu. Rozpoczniemy od definicji stabilności rozwiązania w sensie Lapunowa. Ponieważ definicja ta jest niemal identyczna dla układów autonomicznych i nieautonomicznych sformułujemy ją jednocześnie dla obu układów.

5.1 DEFINICJA. Niech dany będzie układ równań (5.1) z funkcją $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie Q jest otwartym zbiorem w \mathbb{R}^m , a f jest funkcją klasy C^1 (lub układ (5.2) z funkcją $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie Q jest otwartym zbiorem w \mathbb{R}^{m+1} , a f jest funkcją

klasy C^1). Niech $\bar{x}(t)$ będzie rozwiązaniem jednego z tych układów w przedziale $[0, +\infty)$. Mówimy, że rozwiązanie $\bar{x}(t)$ jest **stabilne w sensie Lapunowa** dla $t \rightarrow +\infty$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $t_0 \geq 0$ oraz $\eta > 0$, że każde rozwiązanie $x(t)$ równania (5.1) (odpowiednio równania (5.2)), takie że

$$|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| < \eta,$$

spełnia dla $t > t_0$ warunek

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon.$$

Jeśli dodatkowo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \bar{x}(t)| = 0,$$

to mówimy, że rozwiązanie $\bar{x}(t)$ równania (5.1) (równania (5.2)) jest **asymptotycznie stabilne**.

5.2 Przykład. Rozważmy układ liniowy w \mathbb{R}^2

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Funkcja stała $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest rozwiązaniem tego równania. Zbadajmy stabilność tego rozwiązania. Z rozdziału 4 wiemy, że rozwiązania równania (5.3) mają postać

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\alpha t}(c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t), \\ x_2(t) &= e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t - c_2 \sin \beta t). \end{aligned}$$

Jeśli $\alpha < 0$, to $|x_1(t)|$ i $|x_2(t)|$ są dowolnie bliskie zeru dla dostatecznie dużych t . Wynika stąd, że $\bar{x}(t)$ jest asymptotycznie stabilnym położeniem równowagi dla $\alpha < 0$. Jeśli $\alpha > 0$, to $|x_1(t)|$ i $|x_2(t)|$ oscylują z amplitudą rosnącą jak $e^{\alpha t}$, więc $\bar{x}(t)$ nie jest rozwiązaniem stabilnym.

W przykładzie 5.2 pokazaliśmy sposób badania stabilności skuteczny tylko wtedy, gdy potrafimy znaleźć rozwiązanie równania. Obecnie podamy sposób badania stabilności rozwiązania bez konieczności jego znajdowania. Najpierw zajmijmy się przypadkiem równań autonomicznych.

Rozważmy równanie (5.1) z funkcją f określoną na zbiorze Q , zawierającym początek układu współrzędnych oraz spełniającą warunek $f(0) = 0$.

5.3 DEFINICJA. *Funkcją Lapunowa dla równania (5.1) nazywamy funkcję $V(x)$ klasy C^1 w Q ($V: Q \rightarrow \mathbb{R}$), spełniającą warunki:*

- 1) $V(x) \geq 0$,
- 2) $V(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,

3) jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (5.1), to funkcja złożona $V(x(t))$ jest nierosnącą funkcją zmiennej t czyli

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \text{grad } V \cdot f \leq 0.$$

5.4 TWIERDZENIE. Niech f będzie odwzorowaniem określonym na zbiorze otwartym Q , zawierającym początek układu współrzędnych. Zakładamy, że f jest klasy C^1 oraz spełnia warunek $f(0) = 0$. Jeśli dla równania (5.1) z odwzorowaniem f istnieje funkcja Lapunowa, to rozwiązanie $\bar{x}(t) \equiv 0$ równania (5.1) jest stabilne. Jeśli dodatkowo

$$\text{grad } V \cdot f < 0 \quad (5.4)$$

dla $x \in Q \setminus \{0\}$, to rozwiązanie $\bar{x}(t) \equiv 0$ jest asymptotycznie stabilne.

Dowód. Udowodnimy najpierw stabilność rozwiązania $\bar{x}(t) \equiv 0$. Rozważmy kule $B(\varepsilon)$ o środkach w zerze i promieniach $\varepsilon < \varepsilon_0$ oraz brzegi tych kul, czyli sfery $S(\varepsilon)$. Niech ε_0 będzie taki, że $B(\varepsilon_0) \subset Q$. Niech $\delta = \min_{x \in S(\varepsilon)} V(x)$. Z własności 2) definicji 5.3 wynika, że $\delta > 0$.

Niech $U = \{x \in B(\varepsilon) : V(x) < \delta\}$. Z własności 3) definicji 5.3 wynika, że rozwiązanie zaczynające się w punkcie $x_0 \in U$ nie osiągnie brzegu $S(\varepsilon)$. Ponieważ wzdłuż krzywej całkowitej funkcja Lapunowa nie rośnie, więc biorąc x_0 , takie że $V(x_0) < \delta$, otrzymamy dla $x(t)$ będącego rozwiązaniem z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$ oszacowanie $V(x(t)) < \delta$, dla każdego $t > 0$. Dowodzi to stabilności rozwiązania $\bar{x}(t) = 0$.

W celu udowodnienia asymptotycznej stabilności tego rozwiązania wystarczy wykazać, że przy wzmocnionych założeniach, jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem, to

$$V(x(t)) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } t \rightarrow +\infty. \quad (5.5)$$

Aby udowodnić prawdziwość (5.5) założmy, że istnieje rozwiązanie $y(t)$, dla którego $V(y(t))$ nie dąży do zera. Ponieważ funkcja $V(y(t))$ jest monotoniczna, więc oznacza to, że $V(y(t)) > \alpha > 0$ dla $t > t_0$. Tym samym rozwiązanie $|y(t)| \geq \varepsilon_1$ dla pewnego $\varepsilon_1 > 0$ oraz $t > t_0$. Z warunku (5.4) wynika istnienie $m > 0$, takiego że

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) \leq -m < 0$$

na zewnątrz kuli $B(\varepsilon_1)$, tj. dla $t > t_0$. Stąd

$$V(y(t)) - V(y(t_0)) \leq -m(t - t_0),$$

czyli

$$V(y(t)) \leq V(y(t_0)) - m(t - t_0) \rightarrow -\infty \quad \text{dla } t \rightarrow +\infty.$$

Jest to sprzeczne z definicją funkcji Lapunowa i dowodzi, że $V(x(t)) \rightarrow 0$ dla wszystkich rozwiązań równania (5.1).

Z warunku (5.5) wynika zbieżność $x(t) \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow +\infty$. Gdyby tak nie było, to istniałoby rozwiązanie $y_1(t)$, takie że dla pewnego $\varepsilon_1 > 0$ i ciągu $\{t_n\}$ prawdziwe byłoby oszacowanie $\varepsilon_1 \leq |y_1(t_n)| \leq \varepsilon_0$. Z ciągu $\{y_1(t_n)\}$ można wybrać zbieżny podciąg $y_1(t_{n_k}) \rightarrow y_0$, gdzie $|y_0| \geq \varepsilon_1$. Stąd $V(y_0) \geq m_0 > 0$. Z ciągłości funkcji $V(y)$ wynika, że $V(y_1(t_{n_k}))$ jest bliskie $V(y_0)$. Dla dostatecznie dużych n_k będzie więc $V(y_1(t_{n_k})) > \frac{m_0}{2}$. Z monotoniczności funkcji V na krzywej całkowej $y_1(t)$ wynika, że ostatnia nierówność jest prawdziwa dla wszystkich dostatecznie dużych t . To jest jednak sprzeczne z (5.5). ■

W przypadku równań nieautonomicznych (5.2) należy dokonać pewnych modyfikacji definicji funkcji Lapunowa, aby twierdzenie analogiczne do tw. 5.4 było prawdziwe.

5.5 DEFINICJA. Funkcja $V(t, x)$ klasy C^1 na $Q = \{(t, x) : t \geq t_0, |x| \leq b\}$ nazywa się **funkcją Lapunowa** dla równania (5.2), jeśli:

- 1) $V(t, 0) = 0$ dla $t \geq t_0$,
- 2) istnieje funkcja ciągła $W(x)$ określona dla $|x| \leq b$, taka że:
 - a) $W(x) \geq 0$,
 - b) $W(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
 - c) $V(t, x) \geq W(x)$ dla $t \geq t_0$,
- 3) jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (5.2), to

$$\frac{d}{dt}V(t, x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t} + \text{grad}_x V \cdot f(t, x) \leq 0.$$

5.6 TWIERDZENIE. Niech funkcja $f(t, x)$ w równaniu (5.2) będzie ciągła na zbiorze $Q = \{(t, x) : t \geq t_0, |x| \leq b\}$ i spełnia warunek

$$f(t, 0) = 0 \quad \text{dla } t \geq t_0.$$

Jeśli dla równania (5.2) istnieje funkcja Lapunowa spełniająca warunki definicji 5.5, to rozwiązanie $\bar{x}(t) = 0$ jest stabilne. Jeśli dodatkowo istnieje funkcja $W_1(x)$ ciągła dla $|x| \leq b$, która spełnia warunki a) i b) definicji 5.5 oraz

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{grad}_x V \cdot f(t, x) \leq -W_1(x) \quad \text{dla } t \geq t_0,$$

to rozwiązanie $\bar{x}(t) = 0$ jest asymptotycznie stabilne.

Dowód tego twierdzenia przebiega analogicznie do dowodu tw. 5.4.

5.7 Przykład. Dla równania z przykładu 5.2 znajdziemy funkcję Lapunowa. Niech $V(x) = x_1^2 + x_2^2$. Funkcja ta spełnia warunki 1) i 2) definicji 5.3, należy jedynie sprawdzić warunek 3). Niech więc $x(t)$ będzie rozwiązaniem. Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= 2x_1(t)\dot{x}_1 + 2x_2(t)\dot{x}_2 = \\ &= 2x_1(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2x_2(-\beta x_1 + \alpha x_2) = 2\alpha(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Dla $\alpha < 0$ jest spełniony warunek 3) i funkcja $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ jest funkcją Lapunowa dla równania (5.3). Oznacza to, że $x(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem stabilnym. Co więcej, $\frac{dV}{dt} < 0$ dla niezerowych rozwiązań, więc są spełnione także warunki asymptotycznej stabilności, tzn. rozwiązanie $x(t) = 0$ jest asymptotycznie stabilne.

5.8 Przykład. Zbadamy stabilność położenia równowagi dla wahadła z tarciem, którego równanie ma postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 \sin x_1 - 2kx_2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Punkt $(0, 0)$ jest położeniem równowagi dla tego układu. (Oczywiście, położeniami równowagi są wszystkie punkty o współrzędnych $(n\pi, 0)$, ich analiza przebiega analogicznie). Aby zbadać stabilność rozwiązania $(0, 0)$, tworzymy funkcję Lapunowa

$$V(x_1, x_2) = \omega_0^2(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Ponieważ $\omega_0^2 > 0$, więc $V(x_1, x_2) \geq 0$ i $V(x_1, x_2) = 0$ tylko jeśli $x_1 = x_2 = 0$.

Mamy dalej

$$\frac{d}{dt}V(x_1, x_2) = \omega_0^2 x_2 \sin x_1 + x_2(-\omega_0^2 \sin x_1 - 2kx_2) = -2kx_2^2 \leq 0.$$

Wynika stąd, że punkt $(0, 0)$ jest punktem równowagi stabilnej. Zbadanie stabilności asymptotycznej wymaga dodatkowej analizy, bo $2kx_2^2$ zeruje się we wszystkich punktach $(x_1, 0)$. Pokażemy jednak, że jeśli taki punkt leży na krzywej całkowej, to jest to punkt przegięcia dla funkcji Lapunowa $V(x_1(t), x_2(t))$ i funkcja ta jest ściśle malejąca, czyli punkt $(0, 0)$ jest asymptotycznie stabilny. Rzeczywiście, jeśli $(x_1(t_1), 0)$ leży na krzywej całkowej i $x_1(t_0) \neq 0$ (ale jest w bliskim otoczeniu zera), to z (5.6) otrzymujemy $\dot{x}_2(t_1) \neq 0$. Stąd, na krzywej całkowej przechodzącej przez punkt $(x_1, 0)$, po obu stronach tego punktu mamy $x_2(t) \neq 0$ i funkcja Lapunowa jest ściśle malejąca dla $t \neq t_1$, czyli punkt $(x_1(t_1), 0)$ jest jej punktem przegięcia.

5.2 Potoki i orbity

Zajmiemy się teraz klasyfikacją zbiorów rozwiązań równań autonomicznych. W tym celu rozwiązania traktujemy jako trajektorie w odpowiedniej przestrzeni topologicznej, czyli pewne podzbiory tej przestrzeni.

Rozważmy ponownie równanie autonomiczne

$$\dot{x} = f(x), \quad (5.7)$$

którego prawa strona jest funkcją klasy C^1 w pewnym zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^m$. Z założenia tego wynika, że równanie (5.7) uzupełnione warunkiem początkowym

$$x(0) = p, \quad p \in Q, \quad (5.8)$$

ma jednoznaczne rozwiązanie w pewnym przedziale $(-a, a)$.

Następujący wniosek wynika bezpośrednio z tw. 3.1.

5.9 WNIOSK. Niech funkcja $\varphi(t; p)$, jako funkcja argumentu t , będzie rozwiązaniem zagadnienia początkowego (5.7) – (5.8), określonym w zbiorze otwartym $\Omega \subset (-a, a) \times Q$. Funkcja ta spełnia warunki:

- 1) $\varphi(0; p) = p$,
- 2) $\varphi(t; p)$ jest ciągła na Ω ,
- 3) $\varphi(t + \tau; p) = \varphi(t; \varphi(\tau; p))$ na Ω .

Rozważmy teraz przestrzeń fazową M równania (5.7) i niech $f(x)$ będzie funkcją klasy C^1 na M . Wtedy dla każdego warunku początkowego $p \in M$ mamy rozwiązanie $\varphi(t; p) \subset M$. Załóżmy w dalszym ciągu, że rozwiązanie $\varphi(t; p)$ może być przedłużone na całą prostą $(-\infty, \infty)$ z zachowaniem warunku $\varphi(t; p) \subset M$.

Z założeń na temat funkcji $f(x)$ oraz z tw. 3.15 wynika, że istnieje rodzina dyfeomorfizmów parametryzowana zmienną t

$$g^t: M \rightarrow M,$$

wyznaczona równością $g^t(p) = \varphi(t; p)$.

5.10 DEFINICJA. *Potokiem* nazywamy parę (M, g^t) , gdzie M jest przestrzenią fazową, a $g^t, t \in (-\infty, \infty)$, jest rodziną dyfeomorfizmów M , spełniającą warunki:

- 1) $g^t: M \rightarrow M$,
- 2) g^t oraz $(g^t)^{-1} \equiv g^{-t}$ są różniczkowalnymi przekształceniami M w M ,
- 3) $g^{t+s} = g^t g^s$.

Zauważmy, że dla rozwiązania równania różniczkowego warunki definicji są spełnione na podstawie tw. 3.15 (gładka zależność od danych początkowych) i wniosku 5.9.

5.11 DEFINICJA. *Trajektorią albo orbitą punktu* p w potoku (M, g^t) nazywamy zbiór wartości odwzorowania $g^t(p)$, $t \in (-\infty, \infty)$.

5.12 DEFINICJA. Punkt p o tej własności, że $f(p) = 0$ nazywa się **punktem krytycznym** albo **punktem osobliwym** potoku wyznaczonego przez równanie (5.7).

Łatwo zauważyć, że jeśli punkt p jest krytyczny, to jego orbita jest stała ($g^t(p) = p$). Stąd punkty takie często nazywa się też **punktami stacjonarnymi** (**położeniami równowagi**).

5.13 Przykład. Rozważmy równanie $\dot{x} = x$, gdzie $x = x(t) \in \mathbb{R}$. Orbita punktu p ma postać $\{e^t p\}$, $t \in (-\infty, \infty)$. Jeśli $p > 0$, to orbita ta jest półprostą $(0, \infty)$, jeśli $p < 0$, to półprostą $(-\infty, 0)$, a dla $p = 0$ orbita jest stałym punktem $\{0\}$. Oznacza to, że punkt $p = 0$ jest punktem krytycznym.

5.14 Przykład. Rozważmy układ równań

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2).\end{aligned}$$

Przez wprowadzenie współrzędnych biegunowych

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

powyższy układ można sprowadzić do postaci

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1.$$

Dla pierwszego równania można łatwo znaleźć rozwiązania. Mają one postać

$$\left\{ \frac{pe^t}{\sqrt{p^2 e^{2t} - p^2 + 1}} \right\},$$

czyli orbitami są: punkt $r = 0$, odcinek $(0, 1)$, punkt $r = 1$ i półprosta $(1, \infty)$. Jeśli dołączymy do tego zależność od kąta θ , to jako orbity w układzie zmiennych (x_1, x_2) będziemy mieli: punkt krytyczny $(0, 0)$, orbitę okresową $x_1^2 + x_2^2 = 1$ oraz orbity otwarte, które spiralnie od wewnątrz i od zewnątrz nawijają się na orbitę okresową.

Powyższe przykłady pokazują istotne zalety badania równań w przestrzeni fazowej. Badanie wielkiej liczby oddzielnych rozwiązań można ograniczyć do badania znacznie mniejszej liczby orbit.

5.15 TWIERDZENIE. Przez każdy punkt przestrzeni fazowej M przechodzi dokładnie jedna orbita.

Dowód. Niech $\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow M$ i $\varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow M$ będą dwoma rozwiązaniami równania (5.7) z różnymi warunkami początkowymi. Załóżmy, że wyznaczone przez te rozwiązania orbity mają punkt wspólny. Oznacza to, że istnieją takie t_1 i t_2 ,

że $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$. Rozważmy funkcję φ_2 i funkcję $\varphi_3 = T^{t_1-t_2}\varphi_1$, gdzie $T^s\varphi(t) = \varphi(t+s)$. Zauważmy, że jeśli $\varphi(t)$ jest rozwiązaniem równania (5.7), to $T^s\varphi(t)$ jest też rozwiązaniem tego równania. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} T^s \varphi(t) \right|_{t=t_0} &= \left. \frac{d\varphi(t+s)}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{t=t_0+s} = \\ &= f(\varphi(t_0+s)) = f(\varphi(t+s)) \Big|_{t=t_0} = f(T^s \varphi(t)) \Big|_{t=t_0}. \end{aligned}$$

Wynika z tego, że φ_3 jest rozwiązaniem równania (5.7). Ponieważ $\varphi_2(t_2) = \varphi_3(t_2)$, więc są to rozwiązania z tym samym warunkiem początkowym. Z jednoznaczności wynika, że $\varphi_2 = \varphi_3$. Tak więc φ_1 i φ_2 opisują tę samą orbitę i różnią się tylko parametryzacją tej orbity zmienną niezależną t .

Udowodniliśmy w ten sposób, że jeśli dwie orbity mają chociaż jeden punkt wspólny, to są identyczne. Dowodzi to jednoznaczności wyznaczenia orbity przechodzącej przez dany punkt przestrzeni fazowej. Fakt, że przez każdy punkt przestrzeni fazowej p przechodzi orbita, wynika z istnienia rozwiązania równania (5.7) z warunkiem $x(0) = p$. ■

Przejdziemy obecnie do klasyfikowania orbit układów autonomicznych. Okazuje się, że z topologicznego punktu widzenia jest bardzo mało orbit istotnie różnych (wszystkie przypadki są zilustrowane w przykładzie 5.14).

5.16 TWIERDZENIE. Niech będzie dany potok (M, g^t) , $t \in (-\infty, \infty)$, generowany przez równanie autonomiczne (5.7) z funkcją $f \in C^1(M)$. Orbity tego potoku dzielą się na trzy kategorie:

- 1) orbity otwarte, dyfeomorficzne z prostą rzeczywistą,
- 2) orbity zamknięte, dyfeomorficzne z okręgiem,
- 3) punkty krytyczne.

Dowód. Niech $\varphi_0(t)$, $t \in (-a, a)$, będzie rozwiązaniem równania (5.7), które nie jest typu 1), tj. niech spełnia warunek $\varphi_0(t_1) = \varphi_0(t_2)$ dla pewnych t_1 i t_2 ($t_2 > t_1$). Wtedy rozwiązanie to przedłuża się na całą prostą jako rozwiązanie okresowe $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ z okresem $T = t_2 - t_1$. Jeśli zdefiniujemy funkcję

$$\varphi(t) = \varphi_0(t_1 + \tau) \quad \text{dla } t = nT + \tau,$$

to funkcja ta jest rozwiązaniem równania (5.7) jako przesunięcie rozwiązania φ_0 (patrz dowód tw. 5.15). Funkcja ta jest okresowa, bo jeśli t jest postaci $nT + \tau$, to $t+T = (n+1)T + \tau$ i $\varphi(t) = \varphi(t+T)$. Pokażemy obecnie, że funkcja $\varphi(t)$ jest ciągła. Funkcja ta jest oczywiście kawałkami ciągła, a jedyne punkty mogące budzić wątpliwości to punkty nT , w których jest ona prawostronnie ciągła. Pokażemy, że w tych punktach jest także ciągła lewostronnie. Niech ciąg t_α będzie zbieżny lewostronnie do nT . Wtedy $\varphi(t_\alpha) = \varphi_0(t_1 + \tau_\alpha)$, gdzie ciąg τ_α dąży lewostronnie do T . Z ciągłości funkcji φ_0 wynika, że $\varphi_0(t_1 + \tau_\alpha) \rightarrow \varphi_0(t_1 + T) = \varphi_0(t_2) = \varphi_0(t_1) = \varphi(nT)$, co dowodzi lewostronnej ciągłości funkcji $\varphi(t)$.

Jeśli teraz T_1, T_2 są dwoma okresami funkcji φ , to $T_1 \pm T_2$ jest też okresem, bo $\varphi(t + T_1 \pm T_2) = \varphi(t + T_1) = \varphi(t)$. Niech K oznacza zbiór wszystkich okresów funkcji $\varphi(t)$. Są dwie możliwości. Pierwsza, kiedy zbiór K zawiera element najmniejszy $T_0 > 0$. Wtedy $\varphi(t + T_0) = \varphi(t)$ oraz $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, dla $0 \leq t_1 < t_2 < T_0$. Odpowiada to orbicie zamkniętej o okresie T_0 .

Druga możliwość, to brak najmniejszego elementu większego od zera w zbiorze K , czyli w zbiorze tym są okresy dowolnie małe. Pokażemy obecnie, że zbiór okresów jest domknięty. Niech $\{T_i\}$ będzie zbieżnym ciągiem okresów. Niech $T = \lim_{i \rightarrow \infty} T_i$. Z ciągłości funkcji $\varphi(t)$ mamy dla każdego t równość

$$\varphi(t + T) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t + T_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi(t).$$

Wynika stąd, że w drugim przypadku najmniejszy okres jest równy zero, czyli $\varphi(t) = \varphi(0)$ dla każdego t . To oznacza, że w tym przypadku zbiór K pokrywa się z całą prostą rzeczywistą \mathbb{R} a rozwiązanie $\varphi(t)$ jest punktem krytycznym. ■

5.3 Klasyfikacja punktów krytycznych układów liniowych na płaszczyźnie

Klasyfikację punktów krytycznych układów autonomicznych ograniczymy do badania dwuwymiarowych układów liniowych o stałych współczynnikach

$$\dot{x} = Ax \tag{5.9}$$

z macierzą

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Jak łatwo zauważyć, punkt $x = 0$ jest punktem krytycznym równania (5.9). Jeśli macierz A jest nieosobliwa ($\det A \neq 0$), to układ (5.9) nazywa się **prostym**.

Analizę zachowania się rozwiązań układu (5.9) w otoczeniu punktu krytycznego rozpoczniemy od przypadku układów prostych. W celu znalezienia rozwiązań rozpatrzmy wielomian charakterystyczny macierzy A

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0,$$

gdzie $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$ jest śladem macierzy A . Znajdujemy pierwiastki wielomianu charakterystycznego

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A + \sqrt{\Delta}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - \sqrt{\Delta}),$$

gdzie $\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A$. Znajomość pierwiastków wielomianu charakterystycznego pozwala znaleźć postać kanoniczną macierzy A .

Przypadek $\Delta > 0$. Macierz A ma wówczas dwie różne, rzeczywiste wartości własne, a odpowiadające im wektory własne tworzą kanoniczną bazę przestrzeni \mathbb{R}^2 . W tej bazie macierz A ma postać

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Równanie (5.17) sprowadza się wtedy do układu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2, \end{aligned}$$

którego rozwiązania dane są wzorami

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

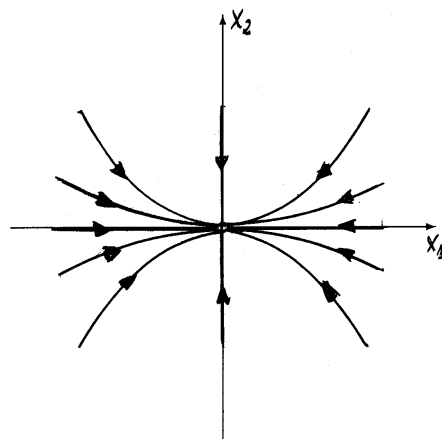
Przez proste przekształcenie otrzymujemy równanie orbit w przestrzeni fazowej \mathbb{R}^2

$$x_2 = c x_1^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

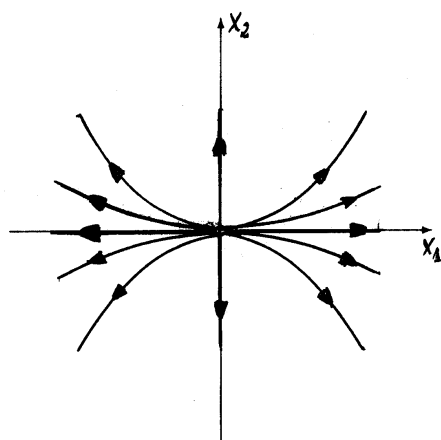
Obrazy orbit w otoczeniu punktu krytycznego $x = 0$ zależą istotnie od znaku pierwiastków λ_1 i λ_2 . Poniżej zilustrujemy wszystkie istotnie różne sytuacje.

Jeśli $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, to portret fazowy w otoczeniu punktu krytycznego jest przedstawiony na rys. 5.1. W takiej sytuacji punkt krytyczny $x = 0$ jest stabilny (rozwiązania dążą do niego, gdy $t \rightarrow \infty$). Punkt taki nazywa się **węzłem stabilnym** (przypadek $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ jest analogiczny).

Jeśli $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, to otrzymany portret fazowy ma analogiczny kształt orbit, a jedynie ewolucja na orbitach odbywa się w przeciwnym kierunku (rys. 5.2). Mamy wtedy do czynienia z **węzłem niestabilnym**.



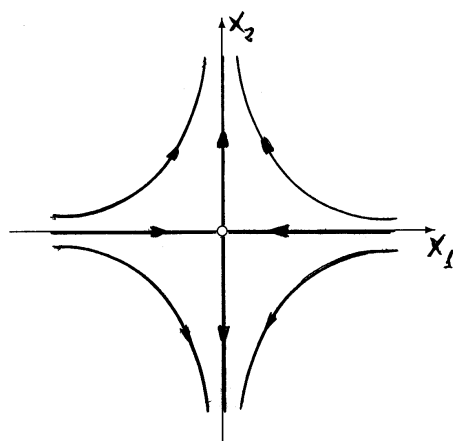
Rysunek 5.1: Węzeł stabilny



Rysunek 5.2: Węzeł niestabilny

Jeśli pierwiastki λ_1 i λ_2 mają przeciwne znaki, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, to otrzymujemy portret fazowy przedstawiony na rys. 5.3. Punkt krytyczny $x = 0$ nazywa się wtedy **siodłem**. Zwróćmy uwagę, że półosie współrzędnych także są orbitami, przy czym po osi Ox_1 ewolucja odbywa się do punktu krytycznego, a po osi Ox_2 od punktu krytycznego. Już z tej obserwacji wynika, że siodło nie jest punktem stabilnym.

Przypadek $\Delta=0$. Macierz A ma wówczas podwójny pierwiastek wielomianu charakterystycznego λ_0 . Jeśli wartości własnej λ_0 odpowiadają dwa liniowo niezależ-

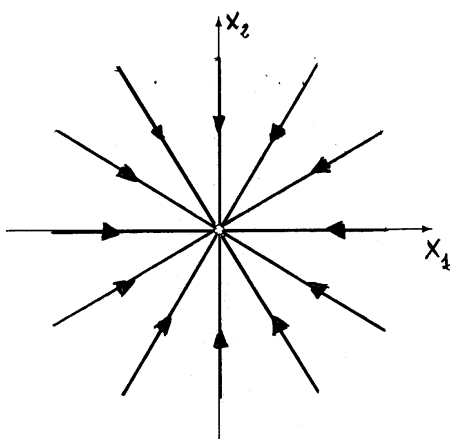


Rysunek 5.3: Siodło

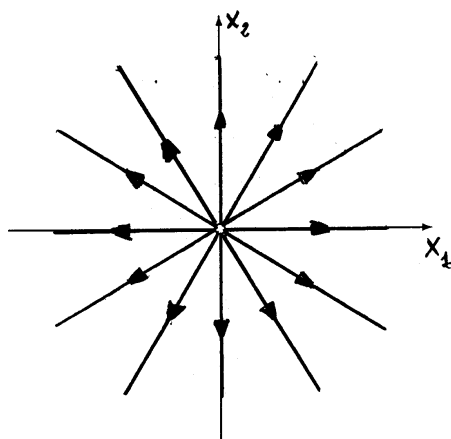
ne wektory własne, to macierz A ma postać kanoniczną

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Punkt $x = 0$ nazywa się wtedy **węzłem gwiaździstym**. Jeśli $\lambda_0 < 0$, to otrzymujemy węzeł gwiaździsty stabilny (rys. 5.4), jeśli $\lambda_0 > 0$, to mamy węzeł gwiaździsty niestabilny (rys. 5.5).



Rysunek 5.4: Węzeł gwiaździsty stabilny



Rysunek 5.5: Węzeł gwiaździsty niestabilny

Jeśli macierz A ma tylko jeden wektor własny odpowiadający wartości własnej λ_0 , to cała przestrzeń \mathbb{R}^2 jest przestrzenią niezmienniczą macierzy A , a jej postacią

kanoniczną jest klatka Jordana

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

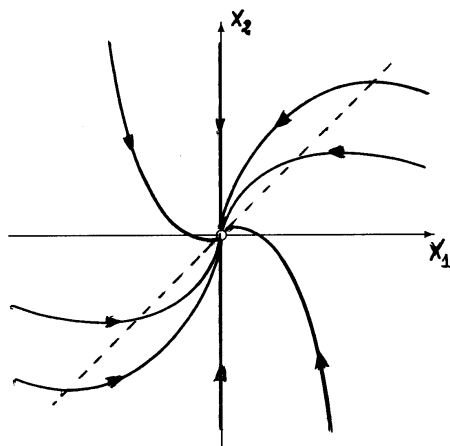
Równanie (5.9) ma wtedy postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_0 x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \lambda_0 x_2. \end{aligned}$$

Stąd

$$x_1 = c_1 e^{\lambda_0 t}, \quad x_2 = (c_2 + c_1 t) e^{\lambda_0 t}.$$

W takiej sytuacji punkt $x = 0$ nazywa się **węzłem zdegenerowanym**. Dla $\lambda_0 < 0$ jest to węzeł stabilny (rys. 5.6). Dla $\lambda_0 > 0$ otrzymujemy węzeł zdegenerowany niestabilny (rys. 5.7).



Rysunek 5.6: Węzeł zdegenerowany stabilny

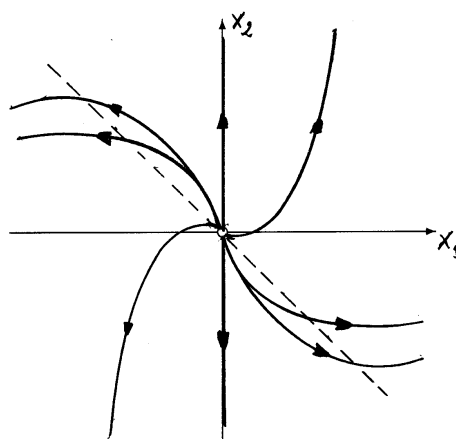
Aby mieć lepsze wyobrażenie o kształcie orbit w otoczeniu węzła zdegenerowanego, rozpatrzmy punkty, w których orbity osiągają wartość ekstremalną względem zmiennej x_2 . W takich punktach $\dot{x}_2 = 0$, czyli $x_1 = -\lambda_0 x_2$ (proste o tym równaniu zaznaczyliśmy linią przerywaną na odpowiednich rysunkach).

Przypadek $\Delta < 0$. Mamy wówczas dwa sprzężone pierwiastki zespolone λ_0 i $\bar{\lambda}_0$. W zmiennych rzeczywistych macierz A ma postać kanoniczną

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta > 0.$$

Równanie (5.9) sprowadza się do układu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - \beta x_2, \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 + \alpha x_2. \end{aligned}$$



Rysunek 5.7: Węzeł zdegenerowany niestabilny

Po przejściu do współrzędnych biegunowych

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = \alpha r \cos \theta - \beta r \sin \theta, \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = \beta r \cos \theta + \alpha r \sin \theta. \end{aligned}$$

Mnożymy te równania przez $\cos \theta$ i $\sin \theta$, a następnie dodajemy i odejmujemy je stronami, skąd otrzymujemy

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = \beta.$$

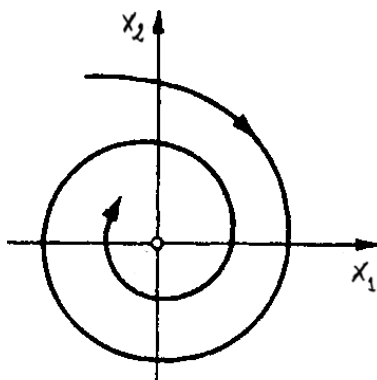
Rozwiązanie ma więc postać

$$r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta = \theta_0 + \beta t.$$

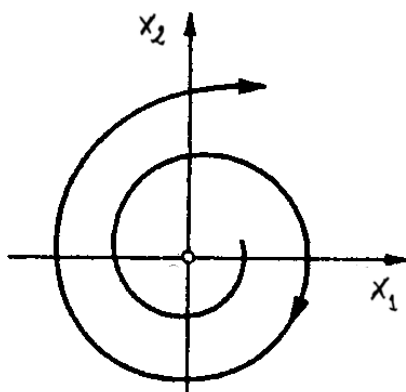
Jeśli $\alpha < 0$, to otrzymujemy portret fazowy, na którym orbity są spiralami zwijającymi się do punktu $x = 0$. Punkt ten nazywa się **ogniskiem stabilnym** (rys. 5.8). Jeśli $\alpha > 0$, to otrzymujemy **ognisko niestabilne**, dla którego spirale wychodzą z punktu $x = 0$ (rys. 5.9).

Dla $\alpha = 0$ orbity są koncentrycznymi okręgami (rys. 5.10). Punkt $x = 0$ nazywa się wtedy **środkiem**. Środek jest oczywiście punktem stabilnym, ale nie jest on asymptotycznie stabilny – w przeciwieństwie do wszystkich poprzednich przypadków, gdzie stabilność była jednocześnie asymptotyczną stabilnością.

Obecnie rozpatrzmy sytuację, kiedy układ (5.9) **nie jest układem prostym**. Wtedy $\det A = 0$ i przynajmniej jedna z wartości własnych macierzy A jest równa



Rysunek 5.8: Ognisko stabilne



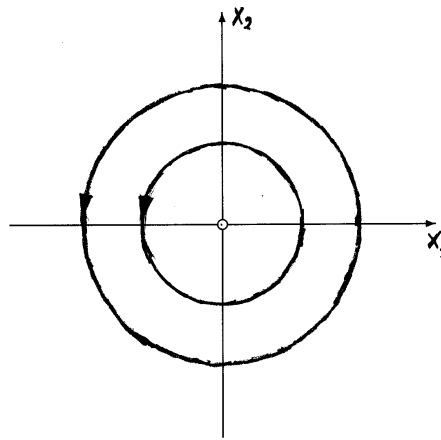
Rysunek 5.9: Ognisko niestabilne

zeru. Możliwe są wtedy dwa przypadki zależne od rzędu macierzy A : $\text{rz } A = 0$, czyli macierz jest zerowa i każdy punkt płaszczyzny jest krytyczny oraz $\text{rz } A = 1$. Pierwszy z tych przypadków jest nieciekawy. W drugim przypadku, tzn. kiedy $\text{rz } A = 1$, istnieje cała prosta (przechodząca przez punkt $x = 0$) złożona z punktów krytycznych.

Jeśli $\Delta > 0$, to macierz A ma dwie wartości własne $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2 = 0$ oraz postać kanoniczną

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dla $\lambda_1 < 0$ otrzymujemy portret fazowy, na którym wszystkie punkty osi Ox_2 są punktami krytycznymi i wszystkie są stabilne, ale nie asymptotycznie stabilne (rys. 5.11). Dla $\lambda_1 > 0$ portret fazowy jest analogiczny, tylko punkty krytyczne są



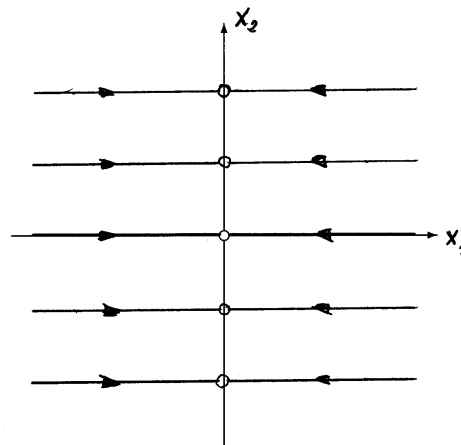
Rysunek 5.10: Środek

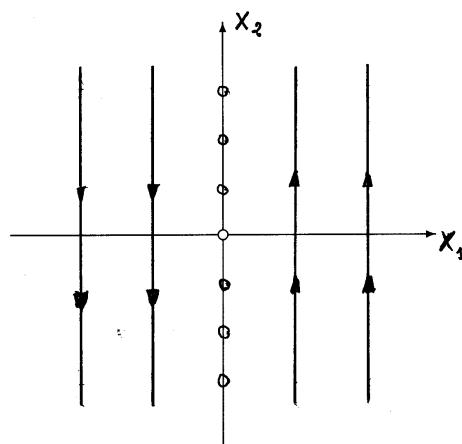
niestabilne.

Jeśli $\Delta = 0$, to zero jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego i macierz A ma formę kanoniczną

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Otrzymujemy wtedy portret fazowy, na którym cała oś Ox_2 jest złożona z punktów krytycznych (rys. 5.12).

Rysunek 5.11: Portret fazowy dla układu nieprostego, $\Delta > 0$

Rysunek 5.12: Portret fazowy dla układu nieprostego, $\Delta = 0$

Aby rozpatrywać portret fazowy w układzie współrzędnych, w którym zostało napisane równanie (5.9), musimy przypomnieć, że dla macierzy A istnieje przekształcenie nieosobliwe Q , takie że $Q^{-1}AQ$ jest macierzą w postaci kanonicznej. Przekształcenie Q przeprowadza przy tym bazę kanoniczną na bazę przestrzeni wyjściowej. Znaczący to, że jeśli jest dane równanie

$$\dot{x} = Ax,$$

które w bazie kanonicznej przyjmuje postać

$$\dot{y} = Jy,$$

gdzie J jest formą kanoniczną macierzy A , to

$$x = Qy.$$

Kolumny macierzy przekształcenia Q są zbudowane z wektorów bazy kanonicznej, wyrażonych we współrzędnych zmiennej x . Aby je znaleźć, należy skorzystać z metod opisanych w roz. 4.

5.17 Przykład. Znajdziemy portret fazowy układu

$$\dot{x} = Ax,$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

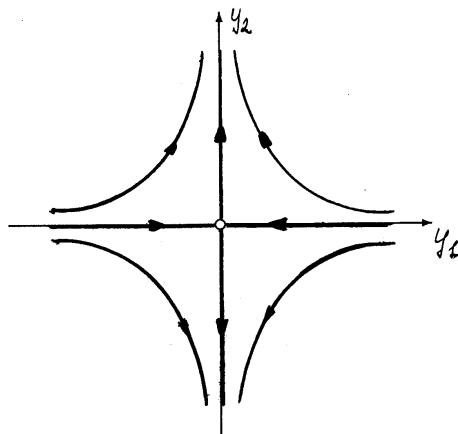
Wielomian charakterystyczny ma postać

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 25.$$

Pierwiastkami tego wielomianu są $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 5$. Odpowiadają im wektory własne

$$v_1 = [2, 1], \quad v_2 = [1, 3].$$

Ponieważ $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, więc punkt $x = 0$ jest siodłem. Portret fazowy w zmiennych kanonicznych $y_1 y_2$ jest pokazany na rys. 5.13.

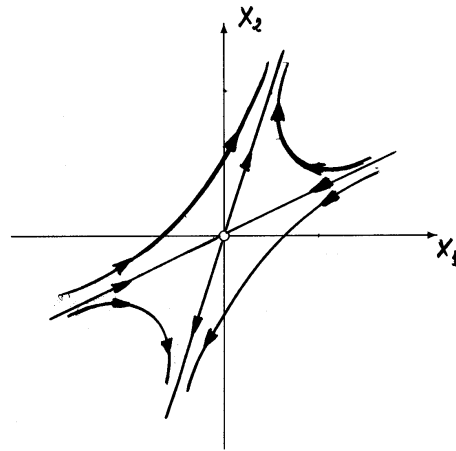


Rysunek 5.13: Portret fazowy w zmiennych kanonicznych dla układu z przykładu 5.17

W zmiennych wyjściowych oś Oy_1 przechodzi na oś o kierunku wektora v_1 , a oś Oy_2 na oś o kierunku wektora v_2 . W zmiennych x portret fazowy jest pokazany na rys. 5.14.

Obecnie podsumujemy nasze badania portretów fazowych układów liniowych w \mathbb{R}^2 . W analizie portretów fazowych na płaszczyźnie występują trzy istotnie różne sytuacje:

- 1) Pierwiastki są rzeczywiste i odpowiadają im dwa liniowo niezależne wektory własne. W tym przypadku układ równań (5.9) separuje się na dwa układy jednowymiarowe.
- 2) Pierwiastki są zespolone, sprzężone. Gdyby równanie (5.9) rozpatrywać w przestrzeni zespolonej, wówczas przypadek ten nie różniłby się od przypadku 1). Rozpatrując go w przestrzeni rzeczywistej, musimy przejść do współrzędnych biegunowych, w których układ (5.9) separuje się na dwa układy jednowymiarowe.
- 3) Pierwiastek jest podwójny, rzeczywisty, ale odpowiada mu tylko jeden wektor własny. W tym przypadku układ się nie separuje, a przestrzenią niezmienniczą jest całe \mathbb{R}^2 .



Rysunek 5.14: Portret fazowy w zmiennych wyjściowych dla układu z przykładu 5.17

Przedstawiona wyżej klasyfikacja została dokonana ze względu na postać kanoniczną macierzy A . Przypadek 1) odpowiada macierzy kanonicznej w postaci diagonalnej. Przypadek 2) odpowiada macierzy diagonalnej w przestrzeni zespolonej i macierzy postaci $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, w przestrzeni rzeczywistej. Wreszcie przypadek 3) odpowiada niediagonalnej klatce Jordana $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

5.4 Punkty krytyczne układów nieliniowych

Będziemy teraz starali się pokazać, w jakim stopniu prowadzone poprzednio badania portretów fazowych układów liniowych o stałych współczynnikach mogą być przydatne do badania portretów fazowych dowolnych układów autonomicznych.

5.18 DEFINICJA. Niech będą dane dwa potoki (M, g_1^t) i (M, g_2^t) z tą samą przestrzenią fazową. Mówimy, że potoki te są **topologicznie sprzężone**, jeśli istnieje taki homeomorfizm przestrzeni fazowej $h: M \rightarrow M$, że $h \circ g_1^t = g_2^t \circ h$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Aby nieco lepiej zrozumieć sens sprzężenia dwóch potoków, zatrzymajmy się jeszcze przy układach liniowych o stałych współczynnikach.

5.19 DEFINICJA. Niech w przestrzeni \mathbb{R}^m będzie dane równanie

$$\dot{x} = Ax$$

z macierzą A o stałych współczynnikach. Niech (\mathbb{R}^m, e^{tA}) będzie potokiem generowanym przez to równanie. Mówimy, że potok ten jest **hiperboliczny**, jeśli wszystkie wartości własne macierzy A mają niezerowe części rzeczywiste.

Przytoczymy obecnie bez dowodu twierdzenie o topologicznym sprzężeniu układów liniowych.

5.20 TWIERDZENIE. *Niech będą dane dwa potoki hiperboliczne (M, e^{tA_1}) oraz (M, e^{tA_2}) . Potoki te są topologicznie sprzężone, jeśli liczby wartości własnych z dodatnią i ujemną częścią rzeczywistą są takie same dla macierzy A_1 i A_2 .*

Z twierdzenia 5.20 wynika, że punkty krytyczne w \mathbb{R}^2 prostych układów liniowych o stałych współczynnikach rozpadają się na nierównoważne topologicznie klasy:

- 1) punkty krytyczne niestabilne (węzły i ogniska niestabilne),
- 2) siodła,
- 3) punkty krytyczne stabilne (węzły i ogniska stabilne),
- 4) punkty odpowiadające potokom niehiperbolicznym (środki).

Przejdziemy teraz do badania punktów krytycznych układów nieliniowych. Aby porównać portrety fazowe takich układów z portretami fazowymi układów liniowych, musimy przeprowadzić linearyzację.

5.21 DEFINICJA. *Niech będzie dany układ autonomiczny*

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.10}$$

*i niech $x = 0$ będzie jego punktem krytycznym. **Linearyzacją układu** (5.10) w otoczeniu punktu $x = 0$ nazywamy układ liniowy o stałych współczynnikach*

$$\dot{x} = Ax, \tag{5.11}$$

taki że układ (5.10) można zapisać w postaci

$$\dot{x} = Ax + g(x),$$

gdzie $g(x)$ jest funkcją ciągłą, która spełnia warunek

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = 0.$$

Może się zdarzyć, że punkt $x = 0$ nie jest punktem krytycznym układu (5.10), tzn. $f(0) \neq 0$, ale istnieje punkt x_0 , taki że $f(x_0) = 0$. Wtedy punktem krytycznym jest punkt x_0 i linearyzację należy przeprowadzić wokół tego punktu, tzn. przedstawić układ (5.10) w postaci

$$\dot{x} = A(x - x_0) + g(x),$$

gdzie $g(x)$ jest ciągła i spełnia warunek

$$\lim_{|x-x_0| \rightarrow 0} \frac{|g(x)|}{|x-x_0|} = 0.$$

Z twierdzenia 5.20 można się domyślić, że układy nieliniowe dają się porównywać z układami liniowymi tylko wtedy, gdy odpowiednie potoki liniowe są hiperboliczne.

5.22 DEFINICJA. Punkt krytyczny układu autonomicznego (5.10) nazywa się **prostym**, jeśli otrzymany po linearyzacji układ jest prosty ($\det A \neq 0$). Punkt krytyczny nazywa się **hiperbolicznym**, jeśli otrzymany po linearyzacji układ generuje potok hiperboliczny.

5.23 TWIERDZENIE. (Grobmana-Hartmana) Jeśli $x = 0$ jest punktem hiperbolicznym układu

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad (5.12)$$

gdzie $g(x)$ jest klasy C^1 w otoczeniu zera, $g(0) = 0$ oraz

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = 0,$$

to portret fazowy układu (5.12) jest w otoczeniu punktu $x = 0$ homeomorficzny z portretem fazowym układu zlinearyzowanego

$$\dot{x} = Ax.$$

Następujący przykład jest klasyczną ilustracją tego, co może się dzieć wokół punktu niehiperbolicznego.

5.24 Przykład. Zbadajmy portrety fazowe układów

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{aligned} \quad (5.13)$$

oraz

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Oba układy mają taką samą linearyzację wokół punktu $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1. \end{aligned}$$

Dla równania zlinearyzowanego początek układu współrzędnych jest środkiem, czyli punktem niehiperbolicznym. Natomiast po przejściu do współrzędnych biegunowych dla układu (5.13) otrzymujemy

$$\dot{r} = r^3, \quad \dot{\varphi} = 1,$$

czyli początek układu współrzędnych jest ogniskiem niestabilnym. Dla układu (5.14) mamy

$$\dot{r} = -r^3, \quad \dot{\varphi} = 1,$$

czyli początek układu współrzędnych jest ogniskiem stabilnym.

5.25 Przykład. W przykładzie tym pokażemy, że wzmocnienie tezy w tw. 5.23 nie jest możliwe. Rozważmy układ

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + \frac{x_2}{\ln(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + \frac{x_1}{\ln(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}.\end{aligned}$$

Należy sklasyfikować punkt krytyczny $x = (0, 0)$.

Linearyzacja prowadzi do układu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2.\end{aligned}$$

Punkt $(0, 0)$ dla układu zlinearyzowanego jest węzłem niestabilnym ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$). Oznacza to, że punkt ten jest punktem hiperbolicznym i także dla układu nieliniowego będzie punktem krytycznym niestabilnym. Przechodzimy do współrzędnych biegunowych i sprowadzamy układ nieliniowy do postaci

$$\dot{r} = r, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{\ln r}.$$

Rozwiązaniem tego układu są funkcje

$$r = ce^t, \quad \varphi = \varphi_0 + \ln|t + c|.$$

Stąd widać, że punkt $x = (0, 0)$ dla układu nieliniowego jest ogniskiem niestabilnym. Różny charakter punktu osobliwego dla układu nieliniowego i jego linearyzacji jest związany z faktem, że tw. 5.23 gwarantuje tylko ciągłość przekształcenia portretu fazowego równania nieliniowego oraz jego linearyzacji.

5.5 Całki pierwsze

5.26 DEFINICJA. Niech będzie dane równanie autonomiczne

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.15}$$

z prawą stroną ciągłą w pewnym zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^m$. Funkcję $U(x)$ określoną w otwartym zbiorze $Q_0 \subset Q$ nazywamy **całką pierwszą niezależną od czasu** równania (5.15), jeśli jest ona stała na każdej krzywej całkowej tego równania.

Jeśli funkcja $U(x)$ jest klasy C^1 w Q_0 , to warunek stałości na krzywych całkowych przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt}U(x(t)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial x_i} f_i(x) = 0. \tag{5.16}$$

Całka pierwsza niezależna od czasu ma tę własność, że jej poziomice zawierają krzywe całkowe równania (5.15). Jeśli więc znamy całkę pierwszą $U(x)$, to łatwo można znaleźć postać krzywych całkowych, rozwiązując równanie $U(x) = \text{const}$.

W przypadku równań nieautonomicznych należy wprowadzić nieco inną definicję całki pierwszej.

5.27 DEFINICJA. Niech będzie dane równanie

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (5.17)$$

z prawą stroną ciągłą w pewnym zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Funkcję $U(t, x)$ określoną w otwartym zbiorze $Q_0 \subset Q$ nazywamy **całką pierwszą** równania (5.17), jeśli jest ona stała na każdej krzywej całkowej tego równania.

Jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (5.17), takim że $(t, x(t)) \in Q_0$ dla t należącego do przedziału (α, β) , to funkcja $U(t, x(t))$ jest niezależna od t . Jeśli funkcja $U(t, x)$ jest klasy C^1 , to warunek stałości na krzywych całkowych przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt}U(t, x(t)) = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial x_i} f_i(t, x) = 0. \quad (5.18)$$

5.28 Przykład. W przypadku układów autonomicznych na płaszczyźnie znalezienie całek pierwszych sprowadza się do jednokrotnego scałkowania pewnego równania skalarnego. Jeśli dany jest układ w \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (5.19)$$

to możemy go zamienić na jedno równanie

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \quad (5.20)$$

Zapisujemy to równanie w postaci różniczek

$$f_1(x_1, x_2)dx_2 - f_2(x_1, x_2)dx_1 = 0.$$

Jeśli powyższa forma jest różniczką zupełną, to rozwiązanie jest postaci

$$U(x_1, x_2) = \text{const}.$$

Jeśli takie rozwiązanie znajdziemy, to funkcja $U(x_1, x_2)$ będzie całką pierwszą układu (5.19). Rzeczywiście, różniczkując U i traktując x_2 jako funkcję x_1 otrzymujemy

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} = 0.$$

Z równania (5.20) dostajemy

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial U}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = 0,$$

co zgadza się ze wzorem (5.16).

Z tego co zostało powiedziane wyżej, jest jasne, że całkowanie różniczek zupełnych prowadzi do całek pierwszych. Równie łatwo można znaleźć całkę pierwszą w przypadku, gdy równanie (5.20) jest równaniem o zmiennych rozdzielonych.

5.29 Przykład. Znajdziemy całki pierwsze dla układu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1 x_2.\end{aligned}$$

Równanie (5.20) dla danego układu ma postać

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 + x_1 x_2}{x_1 - x_1 x_2} = \frac{x_2(x_1 - 1)}{x_1(1 - x_2)}.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\left(\frac{1 - x_2}{x_2}\right) dx_2 = \left(\frac{x_1 - 1}{x_1}\right) dx_1.$$

Po scałkowaniu mamy

$$\ln x_2 - x_2 = x_1 - \ln x_1 + c.$$

Skąd po przekształceniu otrzymujemy

$$x_1 e^{-x_1} x_2 e^{-x_2} = c.$$

5.30 Przykład. Przykład ten pokazuje, że całki pierwsze mogą być takie same dla różnych układów równań. Rozważmy dwa układy:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(1 - x_2). \end{cases}$$

Poszukiwanie całek pierwszych ze wzoru (5.20) prowadzi do identycznego równania dla obu układów

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, którego całka ma postać

$$x_1 x_2 = c.$$

Mamy więc tę samą rodzinę całek pierwszych dla dwu różnych układów. Ponieważ są to układy autonomiczne, więc krzywe fazowe obu układów leżą na poziomicach tej samej funkcji $x_1 x_2 = c$.

Poza pokazanymi wyżej przykładami znajdowania całek pierwszych dla układów autonomicznych na płaszczyźnie trudno jest znaleźć nietrywialne (czyli różne od stałych) całki pierwsze. Pewnym wyjątkiem są problemy wynikające z mechaniki, gdzie istnienie całek pierwszych, nawet dla zagadnień wielowymiarowych, jest związane ze spełnieniem praw zachowania, takich jak prawo zachowania energii, prawo zachowania pędu itp.

5.6 Przykłady z dynamiki populacji

Zajmiemy się teraz analizą kilku nieliniowych modeli dynamiki populacji, które są opisywane układami równań autonomicznych.

Rozpocznijmy od analizy wzrostu populacji. Wzrost populacji jest zwykle charakteryzowany przez podanie dwóch liczb: **współczynnika urodzeń** b oraz **współczynnika zgonów** d . Na tej podstawie można napisać równanie wzrostu populacji

$$\dot{x} = rx, \quad (5.21)$$

gdzie $r = b - d$ jest **współczynnikiem wzrostu populacji**. Równanie (5.21) prowadzi do **wykładniczego prawa wzrostu**

$$x(t) = x_0 e^{rt},$$

po raz pierwszy sformułowanego przez Thomasa R. Malthusa w 1798 roku. Gdyby wzrostem populacji rządziło równanie (5.21) i współczynnik urodzeń był wyższy od współczynnika zgonów ($r > 0$), następowałby wykładniczy przyrost liczebności populacji. Taki model wzrostu populacji ma zastosowania w dynamice wzrostu populacji pewnych bakterii. Przede wszystkim jednak model (5.21) okazał się dobrym modelem rozpadu pierwiastków promieniotwórczych (dla tego modelu $b = 0$, stąd $r < 0$).

Jeśli populacja musi egzystować w określonym środowisku, to niemożliwy jest jej nieograniczony wzrost ze względu na ograniczone zasoby tego środowiska. Należy więc powtórnie przeanalizować założenia prowadzące do równania (5.21). Założenie, że liczba nowych urodzeń jest proporcjonalna do liczebności populacji, wydaje się być dość rozsądnym przybliżeniem. Zmodyfikujemy natomiast założenie odnośnie współczynnika zgonów, zakładając, że współczynnik ten nie jest stały, ale rośnie wraz z liczebnością populacji (efekt śmierci na skutek przegęszczenia środowiska). Zakładając, że $d = ax$, otrzymujemy równanie wzrostu populacji

$$\dot{x} = x(b - ax). \quad (5.22)$$

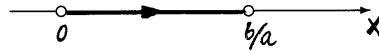
Równanie to nazywa się **równaniem logistycznym**. Opisuje ono dość wiernie wzrost pojedynczej populacji w środowisku o ograniczonych zasobach, o czym przekonano się, badając hodowle bakterii.

Równanie (5.22) jest równaniem o zmiennych rozdzielonych i można je łatwo scałkować. W dalszym ciągu przeprowadzimy jego analizę jakościową.

Po pierwsze zauważmy, że równanie (5.22) ma dwa punkty równowagi:

$$x = 0 \quad \text{i} \quad x = \frac{b}{a}.$$

Punkt $x = 0$ odpowiada wyginięciu populacji i jest on punktem równowagi niestabilnej (jeśli tylko $b > 0$). Punkt $x = \frac{b}{a}$ odpowiada asymptotycznie stabilnemu punktowi równowagi. Jest to stan, do którego dąży rozwijająca się populacja i nazywany jest **pojemnością środowiska**. Portret fazowy dla równania logistycznego pokazany jest na rys. 5.15. Składa się on z dwóch punktów krytycznych: niestabilnego $x = 0$ i stabilnego $x = \frac{b}{a}$ oraz łączącej te dwa punkty otwartej krzywej fazowej.



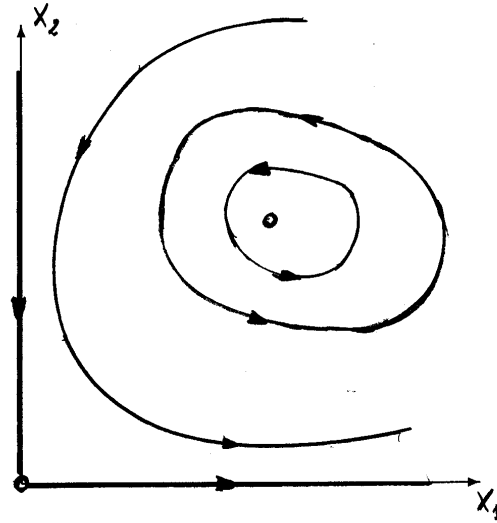
Rysunek 5.15: Portret fazowy dla równania logistycznego

Zajmiemy się teraz środowiskiem, w którym żyją dwie populacje. Wzrost obu populacji zależy wtedy nie tylko od własności środowiska, ale także od tego, jak oba gatunki odnoszą się do siebie. W ogólności może tu występować wiele modeli relacji. W dalszym ciągu zajmiemy się szczegółowo modelowaniem sytuacji, gdy jeden gatunek, zwany **drapieżnikiem**, żywi się osobnikami drugiego gatunku, zwanego **ofiara**. Niech $x_1(t)$ będzie liczebnością populacji ofiar, a $x_2(t)$ – populacji drapieżników. Dla populacji ofiar przyjmijmy prosty model wykładniczego wzrostu. Zmodyfikujemy go jedynie założeniem, że współczynnik zgonów jest proporcjonalny do liczebności populacji drapieżników $d = ax_2$ (ofiary giną pożerane przez drapieżniki). W przypadku drapieżników zakładamy, że wzrost ich populacji zależy tylko od ilości dostarczonego pożywienia, która jest proporcjonalna do liczebności ofiar (δx_1). Zauważmy przy tym, że pewna ilość pożywienia (σ) jest niezbędna do utrzymania przy życiu istniejącej populacji i nie prowadzi do jej wzrostu. W efekcie uzyskujemy układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (b - ax_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (\delta x_1 - \sigma)x_2. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Układ ten nazywa się **układem (modelem) Lotki-Volterry** i został zaproponowany przez Vito Volterrę na podstawie obserwacji populacji ryb w Adriatyku.

Badanie układu (5.23) jest dosyć proste. Zauważmy, że ma on dwa punkty krytyczne $(0, 0)$ i $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$. Punkt $(0, 0)$ jest siodłem, a jego separatorysami są osie układu współrzędnych (ściągnięcie wzdłuż osi Ox_2 , rozciągnięcie wzdłuż osi Ox_1). W celu zbadania charakteru punktu $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$ należy zlinearyzować układ w otoczeniu tego punktu. Niestety, dla układu zlinearyzowanego punkt $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$ jest środkiem, nie



Rysunek 5.16: Portret fazowy dla układu Lotki-Volterra

daje to więc żadnej informacji o zachowaniu układu nieliniowego. Na szczęście, można łatwo znaleźć całkę pierwszą układu (5.23).

Rzeczywiście, po pomnożeniu pierwszego równania przez δ , a drugiego przez a i dodaniu stronami, otrzymujemy

$$\delta \dot{x}_1 + a \dot{x}_2 = b \delta x_1 - a \sigma x_2.$$

Analogicznie, po pomnożeniu pierwszego równania przez $\frac{\sigma}{x_1}$, a drugiego przez $\frac{b}{x_2}$ i dodaniu stronami, mamy

$$\frac{\sigma}{x_1} \dot{x}_1 + \frac{b}{x_2} \dot{x}_2 = b \delta x_1 - a \sigma x_2.$$

Z dwóch ostatnich równań otrzymujemy

$$\delta \dot{x}_1 + a \dot{x}_2 = \frac{\sigma}{x_1} \dot{x}_1 + \frac{b}{x_2} \dot{x}_2,$$

czyli

$$\delta x_1 + a x_2 = \sigma \ln x_1 + b \ln x_2 + c.$$

Stąd

$$x_1^\sigma x_2^b e^{-\delta x_1} e^{-a x_2} = c.$$

Tak więc funkcja

$$f(x_1, x_2) = x_1^\sigma e^{-\delta x_1} x_2^b e^{-a x_2} = g(x_1)h(x_2)$$

jest całką pierwszą układu (5.23). Zauważmy, że funkcja $f(x_1, x_2)$ osiąga maksimum w punkcie $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$. Z faktu tego oraz z kształtu wykresów funkcji $g(x_1)$ i $h(x_2)$ wynika, że punkt $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$ jest środkiem także dla układu nieliniowego. Portret fazowy układu (5.23) w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych składa się więc z zamkniętych krzywych (rozwiązań okresowych) otaczających punkt $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$ (rys. 5.16). Istnienie takich okresowych rozwiązań dla modelu drapieżnik-ofiara zostało potwierdzone badaniami eksperymentalnymi.