

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Andrzej Palczewski

Spis treści

1	Definicje i przykłady	5
1.1	Definicja równania różniczkowego	5
1.2	Zagadnienie początkowe	7
1.3	Interpretacja geometryczna	8
2	Proste równania skalarne	13
2.1	Równania o zmiennych rozdzielonych	13
2.2	Równania jednorodne	17
2.3	Równania w postaci różniczek zupełnych	20
2.4	Równania liniowe pierwszego rzędu	25
2.5	Równania sprowadzalne do równań liniowych	29
3	Podstawowe twierdzenia	33
3.1	Istnienie rozwiązań lokalnych	33
3.2	Przedłużalność rozwiązań	38
3.3	Zależność rozwiązania od danych początkowych i parametrów	40
3.4	Twierdzenie o prostowaniu	50
4	Układy równań liniowych	51
4.1	Ogólne układy pierwszego rzędu	51
4.2	Układy o stałych współczynnikach	56
4.3	Równania skalarne wyższego rzędu	68
5	Układy autonomiczne	77
5.1	Stabilność w sensie Lapunowa	77
5.2	Potoki i orbity	81
5.3	Klasyfikacja punktów krytycznych układów liniowych na płaszczyźnie	85
5.4	Punkty krytyczne układów nieliniowych	95
5.5	Całki pierwsze	98
5.6	Przykłady z dynamiki populacji	101
6	Dwa przykłady z mechaniki	105
6.1	Układy zachowawcze z jednym stopniem swobody	105
6.2	Ruch w centralnym polu sił	110

Rozdział 1

Definicje i przykłady

1.1 Definicja równania różniczkowego

1.1 DEFINICJA. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie*

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

*W równaniu tym t jest zmienną niezależną, a x zmienną zależną. Zmienną zależną $x(t)$ oraz funkcję F traktujemy jako funkcje wektorowe o wartościach w przestrzeni \mathbb{R}^m . **Rozwiązaniem równania (1.1)** nazywamy funkcję $\varphi(t)$ klasy C^n , która podstawiona do równania w miejsce x , odpowiednio φ' w miejsce \dot{x} , ..., $\varphi^{(n)}$ w miejsce $x^{(n)}$, zmienia to równanie w tożsamość.*

1.2 DEFINICJA. *Wykres funkcji $\varphi(t)$ w przestrzeni \mathbb{R}^{m+1} zmiennych (t, x) nazywamy **krzywą całkową** równania (1.1).*

Posługiwanie się równaniami różniczkowymi w postaci (1.1) jest dość niewygodne. Jeśli funkcja F spełnia lokalnie względem najwyższej pochodnej $x^{(n)}$ założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej, równanie (1.1) można rozwikłać względem najwyższej pochodnej

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}). \quad (1.2)$$

Równanie n -tego rzędu w postaci (1.2) można łatwo sprowadzić do **równania pierwszego rzędu**. Wystarczy wprowadzić nowe zmienne

$$x_0(t) = x(t), \quad x_1(t) = \dot{x}(t), \dots, \quad x_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t),$$

oraz wektor

$$y(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Wtedy równanie (1.2) zapisuje się jako równanie pierwszego rzędu

$$\dot{y} = g(t, y), \quad (1.4)$$

gdzie $g(t, y)$ jest wektorem

$$g(t, y) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Przedmiotem naszego zainteresowania będą równania pierwszego rzędu (dokładniej układy równań pierwszego rzędu)

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1.6)$$

Zbiór $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$ będziemy nazywać **rozszerzoną przestrzenią fazową** równania (1.6), jeśli G jest spójny i prawa strona równania (1.6) jest w nim dobrze określona. Niech D będzie rzutem G na przestrzeń \mathbb{R}^m zmiennych x , wtedy D będziemy nazywać **przestrzenią fazową** tego równania. W zbiorze G istnieje zwykle bardzo wiele krzywych całkowych równania (1.6). Krzywe te tworzą wieloparametrowe rodziny rozwiązań. Jeśli $\varphi(t; c_1, \dots, c_m) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest rodziną funkcji, sparametryzowaną m parametrami c_1, c_2, \dots, c_m , taką że dla każdego $(c_1, \dots, c_m) \in A \subset \mathbb{R}^m$, funkcja $\varphi(t; c_1, \dots, c_m)$ jest krzywą całkową równania (1.6) i dla każdego $(t_0, x_0) \in G$ istnieje parametryzacja $(c_1^0, \dots, c_m^0) \in A$, taka że $\varphi(t; c_1^0, \dots, c_m^0)$ jest krzywą całkową przechodzącą przez punkt (t_0, x_0) , to rodzinę $\varphi(t; c_1, \dots, c_m)$ nazywamy **rozwiązaniem ogólnym** równania (1.6). **Całką ogólną** nazywać będziemy uwikłane przedstawienie rozwiązania ogólnego

$$\Phi(t, x; c_1, \dots, c_m) = 0.$$

1.3 DEFINICJA. Równanie (1.6), w którym prawa strona nie zależy jawnie od zmiennej niezależnej, nazywa się **równaniem autonomicznym**. Równanie to ma formę

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.7)$$

Każde równanie postaci (1.6) można sprowadzić do równania autonomicznego. W tym celu należy wprowadzić nową zmienną niezależną s daną równaniem $s = t$, a zmienną t potraktować jako kolejną składową wektora x . Wtedy równanie (1.6) można zapisać w postaci

$$\dot{y} = g(y), \quad (1.8)$$

gdzie $y = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} f \\ 1 \end{pmatrix}$, a różniczkowanie oznacza różniczkowanie względem nowej zmiennej niezależnej s .

1.2 Zagadnienie początkowe

1.4 DEFINICJA. Załóżmy, że rozwiązanie równania (1.6) spełnia warunek

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.9)$$

Warunek ten nazywa się **warunkiem początkowym (warunkiem Cauchy'ego)**.

Równanie (1.6) uzupełnione warunkiem (1.9)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

nazywa się **zagadnieniem początkowym (zagadnieniem Cauchy'ego)**.

1.5 DEFINICJA. Rozwiązaniem zagadnienia początkowego (1.10) na przedziale $[t_0, t_0 + a)$ nazywamy funkcję $\varphi(t)$ klasy C^1 na tym przedziale, spełniającą równanie (1.6) na przedziale $(t_0, t_0 + a)$ oraz warunek początkowy (1.9).

Pokażemy teraz jak warunek początkowy formułuje się dla równania rzędu n . Jak pamiętamy, równanie rzędu n

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

sprowadziliśmy do równania pierwszego rzędu dla funkcji

$$y(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

gdzie $x_i(t) = x^{(i)}(t)$. Wobec tego, warunek początkowy dla funkcji y

$$y(t_0) = X,$$

gdzie X jest stałym wektorem, wyraża się układem równości

$$x(t_0) = X_0, \dot{x}(t_0) = X_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = X_{n-1},$$

przy czym X_i oznaczają składowe wektora X .

Prowadzi to do następującej definicji zagadnienia początkowego dla równania rzędu n .

1.6 DEFINICJA. Jeśli dane jest równanie różniczkowe rzędu n , postaci (1.2) w przestrzeni \mathbb{R}^m , to **zagadnienie początkowe (zagadnienie Cauchy'ego)** dla tego równania przyjmuje formę

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}), \\ x(t_0) &= x_0, \dot{x}(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

gdzie x_0, \dots, x_{n-1} są wektorami m -wymiarowymi.

1.7 Przykład. Ze zbiornika o dowolnym kształcie wypływa ciecz przez otwór w dnie. Należy znaleźć prawo opisujące wysokość poziomu cieczy w zbiorniku, jeśli znane jest pole otworu S oraz pole przekroju zbiornika w funkcji wysokości $F(h)$ (oczywiście zakładamy, że $F(h) \neq 0$ dla każdego h).

Aby rozwiązać do zadanie musimy skorzystać ze znanego faktu z fizyki, że słup cieczy o wysokości h wypływa przez otwór z szybkością

$$v = k\sqrt{2gh},$$

gdzie g jest stałą przyspieszenia ziemskiego, a k jest współczynnikiem proporcjonalności. Wtedy ilość cieczy jaka wypływa ze zbiornika w ciągu czasu Δt wynosi $k\sqrt{2gh}S\Delta t$. W tym czasie poziom cieczy obniży się o $-\Delta h$, więc

$$k\sqrt{2gh}S\Delta t = -F(h)\Delta h.$$

Po przejściu do granicy otrzymujemy równanie

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2gS}\frac{\sqrt{h}}{F(h)}.$$

Dla tego równania można sformułować kilka różnych zagadnień Cauchy'ego:

- a. w chwili początkowej wysokość cieczy wynosi H , wtedy warunek ma postać $h(0) = H$;
- b. po t_0 sekundach zbiornik opróżnił się, wtedy warunek ma postać $h(t_0) = 0$.

1.3 Interpretacja geometryczna

W celu zrozumienia geometrycznego sensu rozwiązać równania (1.6) rozpatrzmy to równanie w przypadku skalarnym ($m = 1$). Niech funkcja $x(t)$ będzie rozwiązaniem tego równania. Narysujmy wykres tej funkcji na płaszczyźnie (t, x) i rozważmy wektory styczne do tego wykresu. Jak wiadomo, wektor styczny do wykresu funkcji $x(t)$ ma postać $[1, \dot{x}(t)] = [1, f(t, x)]$. Zatem równanie (1.6) można odczytać następująco. Na płaszczyźnie (t, x) zadane jest pole kierunków $[1, f(t, x)]$. Należy znaleźć krzywe będące wykresami funkcji $x(t)$ i mające tę własność, że w każdym punkcie (t, x) leżącym na jednej z tych krzywych wektor styczny do niej jest równy $[1, f(t, x)]$. Oczywiście tę interpretację można przenieść na przypadek wektorowego równania (1.6), zastępując płaszczyznę (t, x) przestrzenią \mathbb{R}^{m+1} .

1.8 Przykład. Ten przykład pokazuje, że rozwiązując równanie nie zawsze możemy znaleźć wszystkie krzywe całkowite styczne do danego pola wektorowego. Rozważmy równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Łatwo można odgadnąć funkcję $y(x)$, która jest rozwiązaniem tego równania

$$y = \ln |x| + c,$$

gdzie c jest dowolną stałą. Różne wartości stałej c wyznaczają krzywe całkowe tego równania. Zapiszmy to równanie w postaci

$$\frac{dx}{dy} = x,$$

czyli jako równanie na funkcję $x(y)$. Rozwiązaniem jest teraz funkcja

$$\ln |x| = y + c, \quad \text{czyli } x = c_1 e^y.$$

Może się wydawać, że obie rodziny krzywych całkowych są identyczne. Nie jest to prawda – druga rodzina jest bogatsza o krzywą całkową $x \equiv 0$ odpowiadającą stałej $c_1 = 0$.

1.9 Przykład. Okazuje się, że poszukiwanie krzywych całkowych jako krzywych stycznych pola wektorowego może dać lepszy obraz rozwiązania równania różniczkowego, niż znaleziony analityczny wzór na rozwiązanie. Rozważmy równanie

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x}{y}$$

w obszarze $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \neq 0\}$ i znajdziemy jego krzywe całkowe.

Zacniemy od znalezienia izoklin, tj. krzywych stałego nachylenia krzywych całkowych, albo stałego nachylenia odpowiadającego im pola wektorowego. Linie te wyznaczyć można z równania $x + \frac{x}{y} = k$, co po przekształceniach daje równanie

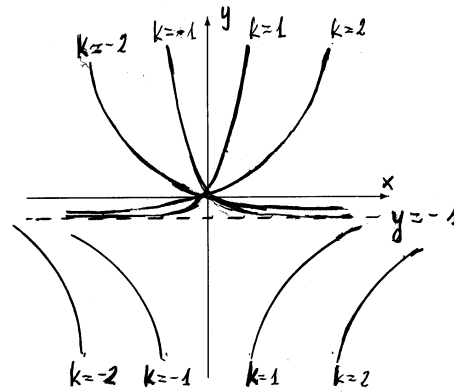
$$y + 1 = \frac{k}{k - x}.$$

Jest to równanie hiperbol (patrz rys. 1.1).

Następnie znajdziemy punkty ekstremalne krzywych całkowych. Jeśli poszukujemy punktów ekstremalnych krzywych całkowych jako funkcji $y(x)$, to są one rozwiązaniami równania $x + \frac{x}{y} = 0$. Rozwiązanie tego równania daje nam dwie proste, na których położone są punkty ekstremum $x = 0$ oraz $y = -1$. Jeśli poszukujemy punktów ekstremalnych krzywych całkowych jako funkcji $x(y)$, to są one rozwiązaniami równania $\frac{y}{xy+x} = 0$. Z rozwiązania tego równania otrzymujemy prostą $y = 0$, na której położone są punkty ekstremalne.

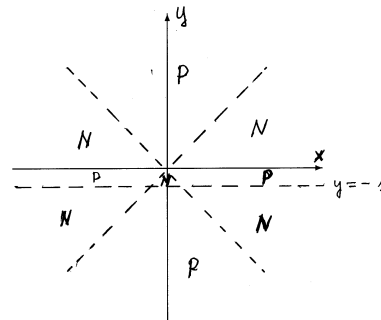
Zbadamy teraz obszary wypukłości oraz wklęsłości krzywych całkowych. W tym celu obliczymy drugą pochodną

$$\begin{aligned} y'' &= y^{-2} \left(\left(y + 1 + x \frac{xy+x}{y} \right) y - (xy+x)^2 y^{-1} \right) = \\ &= y^{-3} \left(y^3 + y^2 + xy(xy+x) - (xy+x)^2 \right) = \\ &= y^{-3} \left(y^2(y+1) + x^2 y(y+1) - x^2(y+1)^2 \right) = \\ &= y^{-3} (y+1)(y^2 - x^2) = y^{-3} (y+1)(y-x)(y+x). \end{aligned}$$



Rysunek 1.1: Izokliny dla równania z przykładu 1.9

Z postaci drugiej pochodnej łatwo można wyznaczyć obszary wypukłości i wklęsłości krzywych całkowych. Na rys. 1.2 zaznaczono te obszary odpowiednio literami P (dla obszarów wypukłości $y'' > 0$) oraz N (dla obszarów wklęsłości $y'' < 0$).



Rysunek 1.2: Obszary wypukłości i wklęsłości dla równania z przykładu 1.9

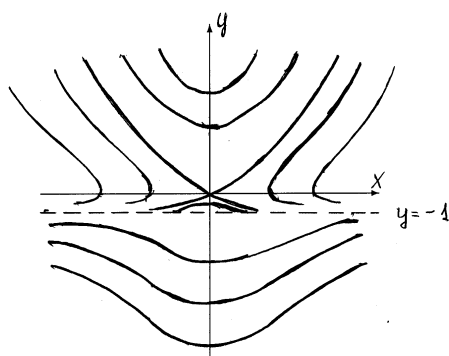
Łącząc informacje o izoklinach z informacją o położeniu punktów ekstremalnych oraz informacją o obszarach wypukłości i wklęsłości można już łatwo naszkicować przebieg krzywych całkowych (patrz rys. 1.3).

W następnym rozdziale zobaczymy, że nasze wyjściowe równanie

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x}{y}$$

jest równaniem, dla którego można znaleźć rozwiązanie analityczne. Rozwiązanie to dane jest wzorem

$$y - \ln |y + 1| = \frac{1}{2}x^2 + c$$



Rysunek 1.3: Krzywe całkowe dla równania z przykładu 1.9

dla dowolnej stałej c . Z postaci rozwiązania analitycznego nie jest bynajmniej łatwo odtworzyć skomplikowaną postać krzywych całkowych uwidoczniionych na rys. 1.3. Dodatkowo z rysunku widać, że krzywą całkową jest też prosta $y \equiv -1$, co nie wynika z postaci rozwiązania analitycznego (aby znaleźć to rozwiązanie należy rozpatrzyć równanie $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{xy+x}$ podobnie jak to było w przykładzie 1.8).

Rozdział 2

Proste równania skalarne

Znajdowanie rozwiązań równań różniczkowych w formie jawnych wzorów analitycznych jest sprawą trudną. Nie istnieje uniwersalna procedura znajdowania takich rozwiązań dla szerokiej klasy równań. Znane są jedynie procedury dla pewnych szczególnych klas równań – w zasadzie wyłącznie dla równań skalarnych. Przykłady takich procedur zostaną przedstawione w tym rozdziale.

2.1 Równania o zmiennych rozdzielonych

2.1 DEFINICJA. *Równanie*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

nazywamy **równaniem o zmiennych rozdzielonych**, jeśli funkcja dwóch zmiennych $f(t, x)$ jest iloczynem dwóch funkcji jednej zmiennej

$$f(t, x) = g_1(t)g_2(x).$$

Równanie o zmiennych rozdzielonych można prosto scałkować. Dowód poniższego twierdzenia jest jednocześnie konstruktywną metodą całkowania takich równań.

2.2 TWIERDZENIE. *Dane jest równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych*

$$\dot{x} = g_1(t)g_2(x). \quad (2.1)$$

Niech funkcje $g_1(t)$ i $g_2(x)$ będą ciągłe dla $t \in (a, b)$ i $x \in (c, d)$ oraz niech $g_2(x)$ nie ma zer w przedziale (c, d) . Wtedy przez każdy punkt (t_0, x_0) prostokąta $Q = \{(t, x): t \in (a, b), x \in (c, d)\}$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (2.1) dana wzorem

$$x(t) = G_2^{-1}(G_1(t) - G_1(t_0) + G_2(x_0)), \quad (2.2)$$

gdzie $G_1(t)$ jest funkcją pierwotną funkcji $g_1(t)$, a $G_2(x)$ – funkcją pierwotną funkcji $1/g_2(x)$.

Dowód. Równanie (2.1) dzielimy przez $g_2(x)$

$$\frac{1}{g_2(x)} \frac{dx}{dt} = g_1(t)$$

a następnie zapisujemy tę równość w postaci

$$\frac{d}{dt} G_2(x(t)) = g_1(t),$$

gdzie $G_2(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $1/g_2(x)$. Całkując ostatnie równanie w przedziale (t_0, t) otrzymujemy

$$G_2(x(t)) - G_2(x(t_0)) = G_1(t) - G_1(t_0),$$

gdzie $G_1(t)$ jest funkcją pierwotną funkcji $g_1(t)$. Funkcja G_2 jest monotoniczna, bo $G_2' = 1/g_2 \neq 0$, czyli pochodna G_2 ma stały znak. Istnieje więc funkcja odwrotna do G_2 . Stąd rozwiązanie ma postać

$$x(t) = G_2^{-1}(G_1(t) - G_1(t_0) + G_2(x_0)).$$

W ten sposób udowodniliśmy wzór (2.2). Jednocześnie otrzymane rozwiązanie jest jednoznaczne, co wynika z definicji całki oznaczonej. ■

2.3 Przykład. Powrócimy do równania

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x}{y}, \quad (2.3)$$

które było rozpatrywane w przykładzie 1.9. Zapisując to równanie w postaci

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{y+1}{y},$$

widzimy, że jest to równanie o zmiennych rozdzielonych.

Łatwo zauważyć, że funkcją pierwotną dla $\frac{y}{y+1}$ jest funkcja $y - \ln|y+1|$, a funkcją pierwotną dla x jest $\frac{1}{2}x^2 + c$. W efekcie rozwiązanie równania (2.3) ma postać podaną w przykładzie 1.9.

$$y - \ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + c.$$

2.4 Przykład. Z doświadczeń fizycznych wiadomo, że ciało zrzucone pionowo w dół z wysokiej wieży nie upada w punkcie wyznaczonym przez spuszczonej z tej wieży ciężarek na nitce (ciało rzucone upada na wschód od punktu wyznaczonego

przez ciężarek). Przyczyną tego zjawiska jest występowanie siły Coriolisa związanej z ruchem obrotowym Ziemi. Wiadomo, że na ciało o masie m poruszające się względem Ziemi z prędkością v działa siła Coriolisa

$$F = 2mv \times \omega,$$

gdzie ω jest wektorem prędkości kątowej Ziemi, a znak \times oznacza iloczyn wektorowy.

Aby zobaczyć jak duże przesunięcie daje uwzględnienie siły Coriolisa rozważmy kamień rzucony do szybu o głębokości h w miejscu, którego szerokość geograficzna wynosi φ . Niech $x(t)$ będzie trajektorią lotu kamienia. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona funkcja ta spełnia równanie

$$\ddot{x} = g + 2\dot{x} \times \omega, \quad (2.4)$$

w którym uwzględniliśmy siłę przyciągania ziemskiego oraz siłę Coriolisa.

Niech $z(t)$ będzie trajektorią spadającego kamienia na nieobracającej się Ziemi. Funkcja ta dana jest wzorem $z(t) = z(0) + \frac{1}{2}gt^2$, bo spełnia równanie $\ddot{z} = g$. Ponieważ prędkość kątowa Ziemi jest bardzo mała, to rozwiązania równania (2.4) będziemy poszukiwać w postaci przybliżenia liniowego względem ω . Wtedy funkcję $x(t)$ możemy w przybliżeniu przedstawić jako $x(t) = z(t) + |\omega|y + \mathcal{O}(\omega^2)$, gdzie $y(t)$ jest poszukiwaną poprawką.

Wstawiając to przybliżenie do równania (2.4) dostajemy równanie o rozdzielonych zmiennych

$$|\omega|\ddot{y} = 2tg \times \omega.$$

Prowadzi to do zagadnienia Cauchy'ego dla funkcji $y(t)$ (warunki początkowe wynikają w sposób oczywisty z charakteru funkcji $y(t)$)

$$\ddot{y} = 2tg \times \frac{\omega}{|\omega|}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Wykorzystując dwukrotnie wzór z tw. 2.2 znajdujemy rozwiązanie tego zagadnienia początkowego

$$y(t) = \frac{1}{3}t^3g \times \frac{\omega}{|\omega|},$$

(stałe całkowania znikają ze względu na postać warunku początkowego).

Wykorzystując fakt, że przy swobodnym spadaniu zachodzi związek $h = \frac{1}{2}gt^2$ rozwiązanie można zapisać w postaci

$$y(t) = \frac{2}{3}th \times \frac{\omega}{|\omega|}.$$

Zauważmy, że wektor h skierowany jest do środka Ziemi, więc w punkcie o szerokości geograficznej φ iloczyn wektorowy $h \times \frac{\omega}{|\omega|}$ ma wartość $|h| \cos \varphi$.

Ostatecznie

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}} h \cos \varphi,$$

gdzie wszystkie wielkości traktujemy już jak skalary (długości odpowiednich wektorów).

Aby wyrobić sobie wyobrażenie jak duże jest odchylenie wywołane siłą Coriolisa, rozważmy rzut kamieniem do szybu o głębokości 100 m w punkcie o szerokości geograficznej 60° . Ponieważ $\omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{sec}^{-1}$, to $\omega y = 1.10 \text{ cm}$.

2.5 Przykład. Wykorzystamy współrzędne biegunowe na płaszczyźnie (r, φ) aby znaleźć równanie krzywej o tej własności, że w każdym punkcie styczna do krzywej tworzy z promieniem wodzącym stały kąt α .

Punkt na płaszczyźnie leżący na poszukiwanej krzywej ma współrzędne biegunowe $(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)$. Wektor styczny do tej krzywej ma współrzędne

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi} \right) = (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi, \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi),$$

gdzie \dot{r} oznacza pochodną $\frac{dr}{d\varphi}$. Obliczmy iloczyn skalarny promienia wodzącego oraz wektora stycznego

$$\begin{aligned} (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \cdot (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi, \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi) = \\ \dot{r} r \cos^2 \varphi - r^2 \sin \varphi \cos \varphi + \dot{r} r \sin^2 \varphi + r^2 \sin \varphi \cos \varphi = \dot{r} r. \end{aligned}$$

Jak wiadomo dla iloczynu skalarnego wektorów u i v zachodzi zależność $u \cdot v = |u| |v| \cos \alpha$, gdzie α jest kątem między wektorami. Aby wykorzystać tę zależność musimy policzyć długości wektora promienia wodzącego, co jest łatwe, bo długość tego wektora wynosi r , oraz długość wektora stycznego. Obliczmy kwadrat długości wektora stycznego

$$\begin{aligned} (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi)^2 = \\ \dot{r}^2 \cos^2 \varphi - 2\dot{r}r \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + 2\dot{r}r \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \\ = \dot{r}^2 + r^2. \end{aligned}$$

Prowadzi to do następującego równania różniczkowego dla poszukiwanej krzywej

$$\frac{\dot{r}r}{r\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}} = \cos \alpha.$$

Po przekształceniach dostajemy równanie

$$\dot{r}^2 = cr^2,$$

gdzie $c = \text{ctg}^2 \alpha$.

Prowadzi to do dwóch równań o rozdzielonych zmiennych

$$\dot{r} = c_1 r, \quad \text{oraz} \quad \dot{r} = -c_1 r,$$

gdzie $c_1 = \text{ctg} \alpha$. Rozwiązania tych równań są postaci

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= r(\varphi_0) \exp(c_1(\varphi - \varphi_0)), \\ r(\varphi) &= r(\varphi_0) \exp(-c_1(\varphi - \varphi_0)), \end{aligned}$$

czyli jest to zwijająca się oraz rozwijająca się spirala logarytmiczna (o tym która się zwija decyduje znak stałej c_1 , czyli wartość kąta α).

2.2 Równania jednorodne

Metoda całkowania równań różniczkowych opisana w dowodzie tw. 2.2 jest jedną z nielicznych metod znajdowania rozwiązań analitycznych. Wiele innych metod polega w rzeczywistości na sprowadzeniu rozważanego problemu do równania o zmiennych rozdzielonych.

Obecnie zajmiemy się jednorodnymi równaniami różniczkowymi. Równania te przez odpowiednią zamianę zmiennych sprowadzają się właśnie do równań o zmiennych rozdzielonych.

Przypomnijmy, że funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ nazywa się funkcją jednorodną stopnia n , jeśli $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, dla $t > 0$.

Zanim zaczniemy rozpatrywać równania z funkcjami jednorodnymi, sformułujemy nieco ogólniej zapis równania. Zauważmy bowiem, że w przypadku pojedynczego równania decyzyja, która zmienna jest zmienną zależną, a która zmienną niezależną, jest dość arbitralna. Aby podkreślić tę dowolność wyboru, będziemy równanie

$$\dot{x} = f(t, x)$$

zapisywać w postaci zachowującej pełną symetrię zmiennych

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (2.5)$$

Równanie zapisane w postaci (2.5) będziemy nazywali **równaniem różniczkowym w postaci różniczek**.

2.6 DEFINICJA. *Równanie różniczkowe w postaci różniczek (2.5) nazywa się równaniem jednorodnym (stopnia n), jeśli funkcje $M(x, y)$ i $N(x, y)$ są funkcjami jednorodnymi stopnia n .*

2.7 TWIERDZENIE. *Dane jest równanie jednodne stopnia n*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (2.6)$$

Zakładamy, że $M(x, y)$ i $N(x, y)$ są funkcjami ciągłymi w zbiorze $Q = \{(x, y): a < \frac{y}{x} < b\}$ oraz

$$xM(x, y) + yN(x, y) \neq 0.$$

Wtedy przez każdy punkt $(x_0, y_0) \in Q$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (2.6).

Dowód. Równanie (2.6) można sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych przez dowolne z podstawień: $y = ux$ lub $x = vy$. Podstawmy $y = ux$ i

scałkujemy równania (2.6)

$$\begin{aligned} M(x, y)dx + N(x, y)dy &= \\ &= M(x, ux)dx + N(x, ux)(xdu + udx) = \\ &= x^n M(1, u)dx + x^n N(1, u)(xdu + udx) = \\ &= x^n (M(1, u) + uN(1, u))dx + x^{n+1} N(1, u)du = 0. \end{aligned}$$

Po przekształceniu otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dx}{x} = -\frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)} du. \quad (2.7)$$

Ponieważ $M(1, u) + uN(1, u) \neq 0$, więc prawa strona jest funkcją ciągłą, czyli ma funkcję pierwotną $G(u)$. Stąd po scałkowaniu

$$\ln|x| = G(u) - G\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \ln|x_0|.$$

Po przejściu do zmiennych (x, y) , mamy

$$\ln|x| = G\left(\frac{y}{x}\right) - G\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \ln|x_0|.$$

Zgodnie z tw. 2.2 całkowanie równania (2.7) jest możliwe tylko w takim obszarze Q , który nie zawiera punktów (x, y) o współrzędnej $x = 0$. Jeśli obszar Q zawiera takie punkty, a nie zawiera punktów o współrzędnej $y = 0$, to równanie (2.6) można rozwiązać, stosując podstawienie $x = vy$. ■

2.8 Przykład. Znajdziemy krzywe całkowe następującego równania zapisanego w postaci różniczek

$$(\sqrt{x^2 + y^2} + x)dy - ydx = 0. \quad (2.8)$$

Równanie (2.8) jest równaniem jednorodnym stopnia pierwszego i spełnione są założenia tw. 2.7. Po podstawieniu $x = vy$ otrzymujemy

$$y(\sqrt{1 + v^2} + v)dy - y(vdy + ydv) = 0.$$

Po uproszczeniach równanie to sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych

$$\sqrt{1 + v^2}dy - ydv = 0,$$

które po scałkowaniu daje równość

$$\ln y + c_1 = \ln(v + \sqrt{1 + v^2}).$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$v + \sqrt{1 + v^2} = c_2 y, \quad \text{gdzie } c_2 = \ln c_1.$$

Przechodzimy do zmiennych (x, y) i ostatnie równanie zapisujemy w postaci

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = c_1 y^2,$$

czyli

$$y^2 = \frac{2}{c_1} x + \frac{1}{c_1^2}.$$

Po podstawieniu $c = \frac{1}{c_1}$ otrzymujemy

$$y^2 = 2c \left(x + \frac{c}{2} \right).$$

Jest to równanie paraboli, której wierzchołek leży w punkcie $(-\frac{c}{2}, 0)$, a ognisko znajduje się w początku układu współrzędnych.

2.9 Przykład. Znajdziemy rodzinę krzywych całkowych, opisanych równaniem

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$$

Równanie to nie jest równaniem jednorodnym. Można jednak szukać takiego nowego układu zmiennych, aby wyeliminować w wyrażeniach $M(x, y)$ oraz $N(x, y)$ wyraz wolny.

Zdefiniujmy nowe zmienne

$$s = x - x_0, \quad t = y - y_0.$$

Podstawiając te zmienne do równania dostajemy

$$\begin{aligned} s + x_0 + t + y_0 - 2 &= s + t + x_0 + y_0 - 2, \\ s + x_0 - t - y_0 + 4 &= s - t + x_0 - y_0 + 4. \end{aligned}$$

Aby wyeliminować wyraz wolny należy wybrać x_0 i y_0 , tak aby spełniały one układ równań

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 - 2 &= 0, \\ x_0 - y_0 + 4 &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ponieważ wyznacznik tego układu liniowego jest różny od zera, znajdujemy rozwiązanie $x_0 = -1, y_0 = 3$. Po podstawieniu otrzymujemy równanie jednorodne

$$(s + t)ds + (s - t)dt = 0.$$

Dalsze postępowanie jest już proste. Podstawiamy $t = us$ i mamy równanie

$$(s + us)ds + (s - us)(sdu + uds) = 0.$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$(1 + 2u - u^2)ds + s(1 - u)du = 0.$$

Po scałkowaniu mamy

$$\ln |s| + \frac{1}{2} \ln |1 + 2u - u^2| = \ln c,$$

czyli

$$s^2(1 + 2u - u^2) = c^2.$$

Wracamy do wyjściowych zmiennych (x, y) i otrzymujemy równanie

$$(x + 1)^2 \left(1 + 2 \frac{y - 3}{x + 1} - \frac{(y - 3)^2}{(x + 1)^2} \right) = c^2,$$

czyli

$$(x + 1)^2 + 2(y - 3)(x + 1) - (y - 3)^2 = c^2.$$

Metody z przykładu 2.9 nie można zastosować, gdy wyznacznik układu (2.9) jest zerowy. Wtedy jednak oba wiersze macierzy układu są do siebie proporcjonalne i podstawienie $z = ax + by$ pozwala sprowadzić równanie do równania o zmiennych rozdzielonych.

2.3 Równania w postaci różniczek zupełnych

Może się zdarzyć, że równanie w postaci różniczek jest różniczką zupełną funkcji dwóch zmiennych. Analiza dostarcza nam narzędzi, które pozwalają łatwo ten fakt sprawdzić. Z drugiej strony, jeśli pewna różniczką dwóch zmiennych jest różniczką zupełną, to łatwo można znaleźć funkcję, której różniczką pokrywa się z rozważaną.

2.10 TWIERDZENIE. Załóżmy, że w zbiorze $Q = \{(x, y) : x \in (a, b), y \in (c, d)\}$ funkcje $M(x, y)$, $N(x, y)$, $M_y(x, y)$ i $N_x(x, y)$ są ciągłe oraz

$$M_y(x, y) = N_x(x, y). \quad (2.10)$$

Wtedy wyrażenie

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (2.11)$$

jest różniczką zupełną, czyli różniczką pewnej funkcji $F(x, y)$. Jeśli dodatkowo jedna z funkcji $M(x, y)$ lub $N(x, y)$ jest różna od zera w każdym punkcie zbioru Q , to przez każdy punkt $(x_0, y_0) \in Q$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (2.12)$$

Dowód. Jeśli spełniony jest warunek (2.10), to istnienie funkcji $F(x, y)$, której różniczką jest wyrażenie (2.11), wynika z odpowiedniego twierdzenia z analizy. Oznacza to, że (2.11) jest różniczką zupełną. Załóżmy, że $N(x, y) \neq 0$. Wtedy równanie (2.12) można przepisać w postaci

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.13)$$

Z faktu, że (2.11) jest różniczką zupełną wynikają równości

$$M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Wobec tego równanie (2.13) sprowadza się do równania

$$\frac{dF(x, y(x))}{dx} = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$F(x, y(x)) = c. \quad (2.14)$$

Przyjmując $c = F(x_0, y_0)$ uzyskujemy jednoznaczność rozwiązania oraz spełnienie warunku początkowego. Warunek $N \neq 0$ gwarantuje spełnienie założeń twierdzenia o funkcji uwikłanej, czyli równanie (2.14) można rozwikłać, znajdując funkcję $y(x)$ w jawnej postaci. ■

2.11 Przykład. Znajdziemy krzywą całkową równania

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0,$$

przechodzącą przez punkt (1,1).

Sprawdzamy, że jest to równanie w postaci różniczki zupełnej

$$\frac{\partial(2x + 3x^2y)}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial(x^3 - 3y^2)}{\partial x}.$$

Całkując to równanie, skorzystamy z faktu, że całka krzywoliniowa różniczki zupełnej nie zależy od drogi całkowania. Całkę łączącą punkt (1, 1) z punktem (x, y) obliczymy po łamanej łączącej punkty (1, 1), $(x, 1)$ i (x, y) .

$$\begin{aligned} & \int_{(1,1)}^{(x,y)} (2t + 3t^2s)dt + (t^3 - 3s^2)ds = \\ & \int_{(1,1)}^{(x,1)} (2t + 3t^2)dt + \int_{(x,1)}^{(x,y)} (x^3 - 3s^2)ds = \\ & x^2 + x^3 - 2 + x^3y - y^3 - x^3 + 1 = x^2 + x^3y - y^3 - 1. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $F(x, y) = x^2 + x^3y - y^3 - 1$. W celu znalezienia rozwiązania naszego równania należy rozwickać równanie

$$F(x, y) = 0.$$

Równanie to można rozwickać względem każdej zmiennej bo $F_y(1, 1) = -2$ a $F_x(1, 1) = 5$. Jednak ze względu na postać funkcji $F(x, y)$ znalezienie rozwiązania w postaci rozwikłanej nie jest proste.

Równania w postaci różniczek zupełnych nie występują zbyt często. Wiele równań można jednak sprowadzić do postaci różniczki zupełnej po pomnożeniu przez pewną funkcję. Funkcja taka nazywa się **czynnikiem całkującym**. Jeśli wyrażenie

$$Mdx + Ndy \tag{2.15}$$

pomnożymy przez czynnik całkujący $\mu(x, y)$

$$\mu Mdx + \mu Ndy$$

i zażądamy, aby nowe wyrażenie było różniczką zupełną

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x},$$

to otrzymamy skomplikowane równanie o pochodnych cząstkowych

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \tag{2.16}$$

Oczywiście rozwiązanie równania (2.16) nie jest wcale łatwiejsze od rozwiązania wyjściowego równania zwyczajnego. Często jednak jest bliskie różniczce zupełnej. Wtedy czynnik $N_x - M_y$, występujący po prawej stronie równania (2.16), może być stały albo może być funkcją tylko jednej zmiennej. Sugeruje to poszukiwanie czynnika całkującego w postaci $\mu(x)$ lub $\mu(y)$ albo $\mu = \mu(z)$, gdzie z jest znaną funkcją zmiennych x i y .

Można tu sformułować kilka prostych obserwacji pomocnych w znajdowaniu takich czynników całkujących:

1. Jeśli

$$-\frac{1}{N}(N_x - M_y) = f(x)$$

to czynnik całkujący jest funkcją jedynie zmiennej x : $\mu(x) = \exp \int f(x)$.

2. Jeśli

$$\frac{1}{M}(N_x - M_y) = f(y)$$

to czynnik całkujący jest funkcją jedynie zmiennej y : $\mu(y) = \exp \int f(y)$.

3. Czynniki całkujący jest postaci $\mu(x, y) = \varphi(z(x, y))$, gdzie z jest nową zmienną, jeśli

$$\frac{N_x - M_y}{Nz_x - Mz_y} = f(z).$$

Poniższe przykłady ilustrują kilka takich przypadków.

2.12 Przykład. Znajdziemy całkę ogólną równania

$$(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0. \quad (2.17)$$

Równanie nie jest w postaci różniczki zupełnej, bo

$$N_x - M_y = -\cos y.$$

Zauważmy jednak, że wyrażenie

$$\frac{1}{N}(N_x - M_y) = -1$$

można traktować jako funkcją zmiennej x , co prowadzi do czynnika całkującego $\mu(x) = e^x$. Mnożymy równanie (2.17) przez ten czynnik całkujący i otrzymujemy

$$e^x(x + \sin x + \sin y)dx + e^x \cos y dy = 0.$$

Równanie to całkujemy po łamanej złożonej z odcinków równoległych do osi współrzędnych (jak w przykładzie 2.11), łączącej punkt (p_1, p_2) z punktem (x, y)

$$\begin{aligned} & \int_{(p_1, p_2)}^{(x, y)} e^t(t + \sin t + \sin s)dt + e^t \cos s ds = \\ & \int_{(p_1, p_2)}^{(x, p_2)} e^t(t + \sin t + \sin p_2)dt + \int_{(x, p_2)}^{(x, y)} e^x \cos s ds = \\ & xe^x - e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + e^x \sin p_2 + e^x \sin y \\ & - p_1 e^{p_1} + e^{p_1} - \frac{1}{2}(\sin p_1 - \cos p_1)e^{p_1} - e^x \sin p_2 = \\ & xe^x - e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + e^x \sin y \\ & - p_1 e^{p_1} + e^{p_1} - \frac{1}{2}(\sin p_1 - \cos p_1)e^{p_1}. \end{aligned}$$

Całka ogólna ma więc postać

$$xe^x - e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + e^x \sin y = c.$$

2.13 Przykład. Znajdziemy całkę ogólną równania

$$(xy^2 + y)dx - (x + y^2)dy = 0. \quad (2.18)$$

Równanie nie jest w postaci różniczki zupełnej bo

$$N_x - M_y = -2xy - 2.$$

Zauważmy jednak, że wyrażenie

$$\frac{1}{M}(N_x - M_y) = -\frac{2}{y},$$

jest funkcją zmiennej y , co prowadzi do czynnika całkującego $\mu(x) = y^{-2}$. Mnożymy równanie (2.18) przez ten czynnik całkujący i otrzymujemy

$$(x + y^{-1})dx - (xy^{-2} + 1)dy = 0.$$

Równanie to całkujemy po łamanej złożonej z odcinków równoległych do osi współrzędnych (jak w przykładzie 2.11), łączącej punkt (p_1, p_2) z punktem (x, y)

$$\begin{aligned} \int_{(p_1, p_2)}^{(x, y)} (t + s^{-1})dt - (ts^{-2} + 1)ds = \\ \frac{1}{2}x^2 + xy^{-1} - y - \frac{1}{2}p_1^2 + p_1p_2^{-1} - p_2. \end{aligned}$$

Całka ogólna ma więc postać

$$\frac{1}{2}x^2 + xy^{-1} - y = c.$$

2.14 Przykład. Znajdziemy całkę ogólną równania

$$xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0. \quad (2.19)$$

Ponieważ

$$N_x - M_y = -1,$$

równanie nie jest w postaci różniczki zupełnej. Postać funkcji $M(x, y)$ i $N(x, y)$ wskazuje także, że nie ma czynnika całkującego, który byłby tylko funkcją zmiennej x lub y . Można jednak zauważyć, że poszukując czynnika całkującego w postaci $\mu = \mu(z)$ dostaniemy z równania (2.16) wyrażenie

$$\frac{1}{xy^2z_y - (x^2y - x)z_x}.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli przyjąć $z(x, y) = xy$, to wyrażenie powyższe stanie się funkcją wyłącznie zmiennej z

$$\frac{1}{xy^2z_y - (x^2y - x)z_x} = \frac{1}{x^2y^2 - (x^2y^2 - xy)} = \frac{1}{xy}.$$

Poszukujemy więc czynnika całkującego w formie $\mu = \mu(xy)$. Aby znaleźć ten czynnik wracamy do równania (2.16) i po podstawieniu $z = xy$ otrzymujemy równanie

$$z^2\mu' - (z^2 - z)\mu' = -\mu.$$

Po uporządkowaniu mamy

$$z\mu' = -\mu,$$

czyli $\mu = (xy)^{-1}$. Po pomnożeniu równania (2.19) przez czynnik całkujący otrzymujemy

$$ydx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Całkujemy to równanie, jak w poprzednim przykładzie, po łamanej łączącej punkty (p_1, p_2) i (x, y)

$$\begin{aligned} \int_{(p_1, p_2)}^{(x, y)} sdt + \left(t - \frac{1}{s}\right)ds &= p_2x - p_1p_2 + xy - p_2x - \ln|y| + \ln|p_2| \\ &= xy - \ln|y| - p_1p_2 + \ln|p_2|. \end{aligned}$$

Stąd mamy całkę ogólną

$$xy - \ln|y| = c.$$

2.4 Równania liniowe pierwszego rzędu

Obecnie zajmiemy się przypadkiem równań liniowych pierwszego rzędu.

2.15 DEFINICJA. *Równanie postaci*

$$\dot{x} + p(t)x = q(t), \tag{2.20}$$

gdzie $p(t)$ i $q(t)$ są funkcjami zmiennej $t \in (a, b)$, nazywa się **równaniem liniowym**. Jeśli $q(t) \equiv 0$, to jest to **równanie liniowe jednorodne**.

Dla równania (2.20) bardzo łatwo można otrzymać twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności.

2.16 TWIERDZENIE. *Jeśli funkcje $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe dla $t \in (a, b)$, to przez każdy punkt zbioru $Q = (a, b) \times \mathbb{R}$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (2.20). Maksymalnym przedziałem istnienia każdego takiego rozwiązania jest przedział (a, b) .*

Dowód. Dowód przeprowadzimy konstruktywnie, podając rozwiązanie w postaci wzoru analitycznego. Rozważmy najpierw równanie jednorodne

$$\dot{x} = -p(t)x.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Jego rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = c \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s) ds\right). \quad (2.21)$$

Aby znaleźć rozwiązanie równania niejednorodnego, stosujemy metodę **uzmienniania stałej**: w miejsce stałej c wstawiamy nieznaną funkcję $z(t)$ i poszukujemy rozwiązania w postaci

$$x(t) = z(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s) ds\right). \quad (2.22)$$

Po podstawieniu (2.22) do równania (2.20) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s) ds\right) - z(t)p(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s) ds\right) + \\ + p(t)z(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s) ds\right) = q(t). \end{aligned}$$

Daje to następujące równanie dla funkcji $z(t)$

$$\dot{z} = q(t) \exp\left(\int_{t_0}^t p(s) ds\right),$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t q(\tau) \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} p(s) ds\right) d\tau. \quad (2.23)$$

Podstawiamy (2.23) do (2.21) oraz wykorzystujemy fakt, że $z(t_0) = x(t_0)$ i dostajemy rozwiązanie równania (2.20)

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s) ds\right) + \int_{t_0}^t q(\tau) \exp\left(-\int_{\tau}^t p(s) ds\right) d\tau. \quad (2.24)$$

Należy jeszcze pokazać, że otrzymane rozwiązanie lokalne przedłuża się na cały odcinek (a, b) . Wystarczy w tym celu udowodnić, że rozwiązanie jest ograniczone w każdym punkcie wewnętrznym przedziału (a, b) . Niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem przechodzącym przez punkt (t_0, x_0) . Pokażemy, że jeśli $t_1 \in (a, b)$, to $x(t_1)$ jest ograniczone. Wykorzystując postać rozwiązania (2.24) dostajemy oszacowanie

$$|x(t_1)| \leq \left| x_0 + \int_{t_0}^{t_1} q(\tau) d\tau \right| e^{K(t_1-t_0)},$$

gdzie $K = \sup_{t \in [t_0, t_1]} |p(t)|$. Ponieważ odcinek $[t_0, t_1]$ jest zwarty, więc funkcja $q(t)$ jest ograniczona dla $t \in [t_0, t_1]$ i

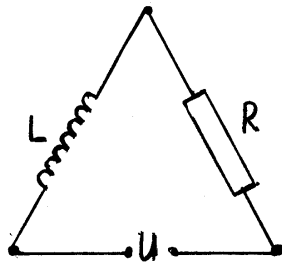
$$\left| x_0 + \int_{t_0}^{t_1} q(\tau) d\tau \right| = c < +\infty.$$

Stąd

$$|x(t_1)| \leq ce^{K(t_1-t_0)}.$$

Oznacza to, że rozwiązanie $x(t)$ jest ograniczone w każdym punkcie $t_1 \in (a, b)$. ■

2.17 Przykład. Niech będzie dany prosty obwód elektryczny, zawierający oporność R i indukcyjność L (rys. 2.1). Niech I oznacza natężenie prądu w obwodzie a U – przyłożone napięcie. Z teorii obwodów elektrycznych znane są prawa rządzące



Rysunek 2.1: Schemat obwodu elektrycznego

przeływem prądu w takim obwodzie

$$L \frac{dI}{dt} = U \quad (\text{prawo Faradaya}),$$

$$RI = U \quad (\text{prawo Ohma}).$$

Sumując spadki napięcia na oporności R i indukcyjności L dostajemy równanie na natężenie prądu w obwodzie

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U. \quad (2.25)$$

Równanie (2.25) jest równaniem liniowym. Jeśli dane jest natężenie prądu w chwili początkowej $I_0 = I(0)$, to rozwiązanie równania (2.25) dane jest wzorem

$$I(t) = e^{-\int_0^t \frac{R}{L} ds} \left(I_0 + \int_0^t \frac{U}{L} e^{\int_0^\tau \frac{R}{L} ds} d\tau \right). \quad (2.26)$$

Jeśli R , L i U są stałe, to rozwiązanie redukuje się do prostszej postaci

$$I(t) = \frac{U}{R} + e^{-\frac{R}{L}t} \left(I_0 - \frac{U}{R} \right).$$

Przeanalizujmy asymptotyczne zachowanie się natężenia prądu w obwodzie, gdy obwód zostaje podłączony do źródła napięcia ($I_0 = 0$). Wtedy

$$I(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{U}{R}.$$

Zachowanie asymptotyczne przy wyłączeniu napięcia ($U = 0$) ma postać

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0.$$

2.18 Przykład. W dalszym ciągu zajmować się będziemy obwodem elektrycznym opisanym w poprzednim przykładzie. Pozostawiając założenie, że R i L są stałe, przyjmijmy oscylujący przebieg napięcia $U = B \sin \omega t$ (obwód zasilany prądem zmiennym). Rozwiązanie (2.26) nadal pozostaje prawdziwe. Jeśli $\frac{R}{L} \neq \omega$, to rozwiązanie przyjmie postać

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(I_0 + \frac{B}{L} \frac{\omega}{(R/L)^2 + \omega^2} \right) + \frac{B}{L} \left(\frac{R/L}{(R/L)^2 + \omega^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{(R/L)^2 + \omega^2} \cos \omega t \right) \quad (2.27)$$

Jeśli $\frac{R}{L} = \omega$, rozwiązanie przyjmie prostszą postać

$$I(t) = e^{-\omega t} \left(I_0 + \frac{B}{2L\omega} \right) + \frac{B}{2L\omega} (\sin \omega t - \cos \omega t),$$

którą można otrzymać przez formalne podstawienie $\frac{R}{L} = \omega$ do wzoru (2.27).

Jeśli we wzorze (2.27) wprowadzimy przesunięcie fazowe δ , takie że $\operatorname{tg} \delta = \frac{\omega}{R/L}$, to wzór ten uprości się do następującego

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(I_0 + \frac{B}{L} \frac{\omega}{(R/L)^2 + \omega^2} \right) + \frac{B}{L \sqrt{(R/L)^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \delta).$$

Z ostatniego wzoru łatwo widać, że dla dużych t natężenie prądu oscyluje z tą samą częstością co napięcia jedynie z pewnym przesunięciem fazowym w stosunku do oscylacji napięcia.

2.5 Równania sprowadzalne do równań liniowych

Podamy teraz przykłady równań nieliniowych, które przez odpowiednią zamianę zmiennych można sprowadzić do równań liniowych, a tym samym efektywnie scałkować. Jako pierwszy przykład rozważmy równanie nieliniowe

$$\dot{x} + p(t)x + q(t)x^n = 0. \quad (2.28)$$

Równanie tej postaci nazywa się **równaniem Bernoulliego**. Liczbę n nazywa się **wykładnikiem Bernoulliego**. Dla $n = 0$ lub $n = 1$ równanie (2.28) jest równaniem liniowym. Dla innych wartości wykładnika Bernoulliego równanie (2.28) można sprowadzić do równania liniowego przez podstawienie

$$z = x^{1-n}. \quad (2.29)$$

Po podzieleniu równania (2.28) przez x^n otrzymujemy

$$\dot{x}x^{-n} + p(t)x^{1-n} + q(t) = 0. \quad (2.30)$$

Po uproszczeniach dostajemy równanie

$$\frac{1}{1-n} \dot{z} + p(t)z + q(t) = 0,$$

czyli równanie liniowe.

2.19 Przykład. Znajdziemy rozwiązanie ogólne równania

$$\dot{x} - 2tx = 2t^3x^2. \quad (2.31)$$

Jest to równanie Bernoulliego z wykładnikiem 2. Dzielimy równanie (2.31) przez x^2 i podstawiamy $z = x^{-1}$, skąd otrzymujemy

$$\frac{\dot{x}}{x^2} - 2tx^{-1} = 2t^3,$$

a po uporządkowaniu wyrazów

$$\dot{z} + 2tz = -2t^3.$$

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$\dot{z} + 2tz = 0.$$

Jego rozwiązanie ogólne ma postać

$$z(t) = Ce^{-t^2}.$$

Następnie dokonujemy uzmienniania stałej

$$z = u(t)e^{-t^2}.$$

Po wstawieniu do równania niejednorodnego mamy

$$(\dot{u} - 2tu)e^{-t^2} + 2tue^{-t^2} = -2t^3.$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy

$$\dot{u}e^{-t^2} = -2t^3,$$

a po scałkowaniu

$$u = -2 \int e^{t^2} t^3 dt = - \int e^y y dy = -ye^y + e^y + c = (1 - t^2)e^{t^2} + c.$$

Korzystając z tego rozwiązania, obliczamy $z(t)$, a następnie $x(t)$

$$z(t) = 1 - t^2 + ce^{-t^2}, \quad x(t) = \left(1 - t^2 + ce^{-t^2}\right)^{-1}.$$

Innym typem równania, które w pewnych przypadkach daje się sprowadzić do równania liniowego, jest równanie

$$\dot{x} + p(t)x + q(t)x^2 + r(t) = 0. \quad (2.32)$$

Równanie to nazywa się **równaniem Riccatiego**. W ogólności nie istnieje sposób jego analitycznego całkowania. Jeśli jednak znamy jedno rozwiązanie szczególne $x_1(t)$ równania (2.32), to przez podstawienie

$$u = x - x_1 \quad (2.33)$$

można to równanie sprowadzić do równania Bernoulliego. Ponieważ $\dot{x} = \dot{u} + \dot{x}_1$, więc podstawiając tę równość do lewej strony równania (2.32) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \dot{u} + p(t)(x_1 + u) + q(t)(x_1 + u)^2 + r(t) &= \\ = [\dot{x}_1 + p(t)x_1 + q(t)x_1^2 + r(t)] + \dot{u} + p(t)u + 2q(t)x_1u + q(t)u^2 &= \\ = \dot{u} + p(t)u + 2q(t)x_1u + q(t)u^2. \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że x_1 jest rozwiązaniem, więc część wyrażenia wzięta w nawias kwadratowy znika. Wynika stąd, że $u(t)$ spełnia równanie

$$\dot{u} + p(t)u + 2q(t)x_1(t)u + q(t)u^2 = 0.$$

Jest to równanie Bernoulliego z wykładnikiem 2 i jako takie można je rozwiązać analitycznie. Oczywiście powstaje pytanie, jak można znaleźć szczególne rozwiązanie $x_1(t)$. Niestety nie ma tu ogólnych metod. W zasadzie rozwiązanie $x_1(t)$ należy zgadnąć. Kiedy jednak uda się nam odgadnąć jedno rozwiązanie, wtedy przedstawiona metoda postępowania pozwala znaleźć rozwiązanie ogólne tego równania.

2.20 Przykład. Rozwiążemy równanie

$$\dot{x} + x^2 = 1 + t^2.$$

Z postaci równania łatwo można zgadnąć jego rozwiązanie szczególne $x_1(t) = t$. Poszukujemy teraz rozwiązania ogólnego

$$x(t) = t + u(t).$$

Prowadzi to do równania dla funkcji $u(t)$

$$\dot{u} + 2tu + u^2 = 0.$$

Jest to równanie Bernoulliego z wykładnikiem 2. Podstawiając $z = u^{-1}$ otrzymujemy

$$\dot{z} - 2tz - 1 = 0.$$

Z równania tego znajdujemy

$$z = e^{t^2} \left(c + \int e^{-t^2} dt \right).$$

Rozwiązanie ogólne wyjściowego równania ma więc postać

$$x(t) = t + e^{-t^2} \left(c + \int e^{-t^2} dt \right)^{-1}.$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że rozwiązanie to wyraża się przez funkcję $\int e^{-t^2} dt$, która nie jest funkcją elementarną.

Przypadek szczęśliwego zgadnięcia rozwiązania szczególnego równania Riccatiego jest oczywiście dość rzadki. Co prawda nie znane są procedury znajdowania takich rozwiązań dla równań Riccatiego w postaci ogólnej, ale w literaturze jest opisanych wiele przypadków szczególnych, kiedy znana jest metoda znalezienia rozwiązania szczególnego. Nie jest naszym celem przedstawienia wielu przypadków szczególnych, opiszemy tylko jeden, przydatny dla znacznej klasy równań.

Jeśli równanie Riccatiego jest postaci

$$\dot{x} = ax^2 + b\frac{x}{t} + c\frac{1}{t^2}, \quad (2.34)$$

gdzie a , b i c są stałe, to rozwiązania szczególnego należy poszukiwać w postaci

$$x_1(t) = \frac{A}{t}.$$

Poniższy przykład ilustruje postępowanie dla takich równań.

2.21 Przykład. Rozwiążemy równanie

$$\dot{x} + x^2 = 2t^{-2}. \quad (2.35)$$

Jest to równanie Riccatiego typu (2.34). Będziemy poszukiwali rozwiązania szczególnego w postaci

$$x(t) = \frac{a}{t}.$$

Po wstawieniu do równania (2.35) otrzymujemy

$$\frac{-a}{t^2} + \frac{a^2}{t^2} = \frac{2}{t^2},$$

czyli

$$a^2 - a - 2 = 0.$$

Stąd $a = 2$ lub $a = -1$. Mamy więc rozwiązanie szczególne

$$x_1(t) = \frac{2}{t}.$$

Poszukujemy teraz rozwiązania ogólnego

$$x(t) = x_1(t) + u(t).$$

Prowadzi to do równania dla funkcji $u(t)$

$$\dot{u} + 4t^{-1}u + u^2 = 0.$$

Jest to równanie Bernoulliego z wykładnikiem 2. Podstawiamy $z = u^{-1}$ i otrzymujemy

$$\dot{z} - 4t^{-1}z - 1 = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania liniowego jest funkcja

$$z = -\frac{1}{3}t + ct^4.$$

Stąd rozwiązanie ogólne równania (2.35) ma postać

$$x(t) = \left(-\frac{1}{3}t + ct^4\right)^{-1} + \frac{2}{t}.$$

Rozdział 3

Podstawowe twierdzenia

3.1 Istnienie rozwiązań lokalnych

Rozpocznijmy od odpowiedzi na ogólne pytanie: jakie warunki musi spełniać równanie różniczkowe zwyczajne, aby istniało jego rozwiązanie i kiedy rozwiązanie to jest jednoznaczne?

Rozpatrywać będziemy równanie

$$\dot{x} = f(t, x)$$

w przestrzeni wektorowej. Przypomnijmy, że $x = x(t) \in \mathbb{R}^m$, a f jest funkcją działającą z podzbioru \mathbb{R}^{m+1} do \mathbb{R}^m .

3.1 TWIERDZENIE. (Picarda-Lindelöfa) *Niech funkcja $f(t, x): \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie ciągła w zbiorze $Q = \{(t, x): |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$. Zakładamy ponadto, że $\sup_{(t,x) \in Q} |f(t, x)| = M$ oraz f spełnia w zbiorze Q warunek Lipschitza względem zmiennej x*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

dla pewnej stałej L . Wtedy zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie na przedziale $|t - t_0| \leq \alpha$, $\alpha < \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L})$.

Dowód. Rozważmy podzbiór przestrzeni metrycznej funkcji ciągłych

$$E = \{x(t): x(t_0) = x_0, |x(t) - x_0| \leq b, |t - t_0| \leq \alpha\}.$$

E jako domknięty podzbiór przestrzeni funkcji ciągłych jest przestrzenią metryczną zupełną. W przestrzeni E rozważamy odwzorowanie

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Jeśli istnieje punkt stały tego odwzorowania

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (3.2)$$

to spełnia on równanie (3.1). Z ciągłości funkcji f i własności całki wynika bowiem, że funkcja $x(t)$ dana równaniem (3.2) jest funkcją klasy C^1 . Po zróżniczkowaniu (3.2) otrzymujemy równanie (3.1) (spełnienie warunku początkowego wynika z definicji całki). Wystarczy więc wykazać, że odwzorowanie F ma punkt stały w przestrzeni E . W tym celu pokażemy najpierw, że F odwzorowuje przestrzeń E w siebie.

Ponieważ

$$\begin{aligned} \sup_{|t-t_0| \leq \alpha} |F(x)(t) - x_0| &= \sup_{|t-t_0| \leq \alpha} \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \sup_{|t-t_0| \leq \alpha} \int_{t_0}^t \sup_{s \in [t_0, t]} |f(s, x(s))| ds \leq M\alpha \leq b, \end{aligned}$$

więc

$$|F(x)(t) - x_0| \leq b,$$

czyli F odwzorowuje przestrzeń E w siebie.

Pokażemy teraz, że F jest odwzorowaniem zwężającym. W wyniku prostego rachunku dostajemy

$$\begin{aligned} \sup_{|t-t_0| \leq \alpha} |F(x_1)(t) - F(x_2)(t)| &\leq \sup_{|t-t_0| \leq \alpha} \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds \leq \\ &\leq \sup_{|t-t_0| \leq \alpha} \int_{t_0}^t L|x_1(s) - x_2(s)| ds \leq \\ &\leq \sup_{|t-t_0| \leq \alpha} L \int_{t_0}^t \sup_{|s-t_0| \leq \alpha} |x_1(s) - x_2(s)| ds \leq \\ &\leq L\alpha \sup_{|t-t_0| \leq \alpha} |x_1(t) - x_2(t)|, \end{aligned}$$

czyli dla $\alpha L < 1$ odwzorowanie F jest zwężające. Z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika, że F ma punkt stały będący granicą ciągu $x^{n+1}(t) = F(x^n)(t)$, gdzie $x^0(t) = x_0$ i jest to jedyny punkt stały odwzorowania F w E . Dowodzi to istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (3.1). ■

Istnienie rozwiązań można udowodnić przy nieco słabszych założeniach. Traci się jednak wtedy własność jednoznaczności rozwiązania.

3.2 TWIERDZENIE. (Peano) Niech funkcja $f(t, x) : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie ciągła w zbiorze $Q = \{(t, x) : t \in [t_0, t_0 + a], |x - x_0| \leq b\}$. Zakładamy także, że $\sup_{(t,x) \in Q} |f(t, x)| = M$. Wtedy zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

ma rozwiązanie na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$, gdzie $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$.

Dowód. W dowodzie wykorzystamy **metodę łamanych Eulera**. W tym celu przedział $[t_0, t_0 + \alpha]$ dzielimy na n_1 mniejszych przedziałów o końcach $t_i^{(1)}$

$$t_0 = t_0^{(1)} < t_1^{(1)} < \dots < t_{n_1}^{(1)} = t_0 + \alpha$$

oraz konstruujemy funkcję kawałkami liniową przybliżającą rozwiązanie równania (3.3) (łamaną Eulera)

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0) &= x_0, \\ \varphi_1(t) &= \varphi_1(t_i^{(1)}) + f(t_i^{(1)}, \varphi_1(t_i^{(1)}))(t - t_i^{(1)}), \quad \text{dla } t \in (t_i^{(1)}, t_{i+1}^{(1)}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Jak łatwo zauważyć, funkcja ta powstaje przez połączenie odcinkami punktów $(t_i^{(1)}, \varphi_1(t_i^{(1)}))$. Funkcja $\varphi_1(t)$ jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania zagadnienia (3.3). Funkcję φ_k będącą k -tym przybliżeniem, otrzymujemy dzieląc przedział $[t_0, t_0 + \alpha]$ na n_k części $t_0 = t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < \dots < t_{n_k}^{(k)} = t_0 + \alpha$ i definiując φ_k analogicznie do φ_1 , jako funkcję kawałkami liniową przechodzącą przez punkty $(t_i^{(k)}, \varphi_k(t_i^{(k)}))$.

Funkcje φ_k mają następujące własności:

- 1) są ciągłe na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$ i różniczkowalne wszędzie poza punktami $t_i^{(k)}$. Wynika to z faktu, że φ_k są funkcjami kawałkami liniowymi.
- 2) są wspólnie ograniczone na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$, mamy bowiem oszacowanie

$$|\varphi_k(t)| \leq |x_0| + M\alpha,$$

które wynika z definicji funkcji φ_k .

- 3) są jednakowo ciągłe, bo jeśli $t', t'' \in (t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$, to z definicji funkcji $\varphi_k(t)$ dostajemy oszacowanie

$$|\varphi_k(t'') - \varphi_k(t')| \leq M|t'' - t'|.$$

Oszacowanie to jest niezależne od k . Jak łatwo zauważyć, można je rozszerzyć z zachowaniem tej samej stałej M na przypadek, gdy $t' \in (t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$ a $t'' \in (t_j^{(k)}, t_{j+1}^{(k)})$.

Z własności tych wynika, że ciąg φ_k spełnia założenia twierdzenia Arzeli-Ascoliiego. Istnieje zatem podciąg $\varphi_{k_j}(t)$ jednostajnie zbieżny do funkcji $\varphi(t)$ na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Wystarczy teraz udowodnić, że $\varphi(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.3). Ponieważ wszystkie funkcje $\varphi_k(t)$ spełniały warunek $\varphi_k(t_0) = x_0$, więc także $\varphi(t)$ spełnia warunek początkowy. Należy pokazać, że funkcja $\varphi(t)$ spełnia także równanie różniczkowe, czyli

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = f(t, \varphi(t)) \quad \text{dla } t \in (t_0, t_0 + \alpha). \quad (3.5)$$

Aby udowodnić to przejście graniczne, dokonajmy następującego oszacowania (wybieramy h mniejsze od pewnego h_0 , tak aby odpowiednie funkcje były dobrze określone)

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} - f(t, \varphi(t)) \right| = \\
& \left| \left(f(t, \varphi_{k_j}(t)) - f(t, \varphi(t)) \right) + \frac{\varphi(t+h) - \varphi_{k_j}(t+h)}{h} - \frac{\varphi(t) - \varphi_{k_j}(t)}{h} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\varphi_{k_j}(t+h) - \varphi_{k_j}(t)}{h} - f(t, \varphi_{k_j}(t)) \right| \leq \\
& \left| f(t, \varphi_{k_j}(t)) - f(t, \varphi(t)) \right| + \left| \frac{\varphi(t+h) - \varphi_{k_j}(t+h)}{h} \right| + \left| \frac{\varphi(t) - \varphi_{k_j}(t)}{h} \right| + \\
& \quad \left| \frac{\varphi_{k_j}(t+h) - \varphi_{k_j}(t)}{h} - f(t, \varphi_{k_j}(t)) \right|.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Drugi i trzeci wyraz po prawej stronie nierówności (3.6) szacujemy z jednostajnej zbieżności ciągu φ_{k_j} . Jeśli weźmiemy k_j dostatecznie duże, to

$$\sup_t |\varphi_{k_j}(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon h}{4}. \tag{3.7}$$

Z oszacowania (3.7) oraz jednostajnej ciągłości funkcji $f(t, x)$ w domkniętym otoczeniu punktu $(t, \varphi_{k_j}(t))$ wynika oszacowanie pierwszego wyrazu nierówności (3.6)

$$|f(t, \varphi_{k_j}(t)) - f(t, \varphi(t))| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Aby oszacować ostatni składnik nierówności (3.6), załóżmy, że $t \in (t_i^{(k_j)}, t_{i+1}^{(k_j)})]$ oraz $t+h \in (t_n^{(k_j)}, t_{n+1}^{(k_j)})]$. Wtedy

$$\begin{aligned}
& \varphi_{k_j}(t+h) - \varphi_{k_j}(t) - hf(t, \varphi_{k_j}(t)) = f(t_i^{(k_j)}, \varphi_{k_j}(t_i^{(k_j)}))(t_{i+1}^{(k_j)} - t) + \dots \\
& \quad + f(t_n^{(k_j)}, \varphi_{k_j}(t_n^{(k_j)}))(t+h - t_n^{(k_j)}) - hf(t, \varphi_{k_j}(t)) = \\
& = \left(f(t_i^{(k_j)}, \varphi_{k_j}(t_i^{(k_j)})) - f(t, \varphi_{k_j}(t)) \right) (t_{i+1}^{(k_j)} - t) + \dots \\
& \quad + \left(f(t_n^{(k_j)}, \varphi_{k_j}(t_n^{(k_j)})) - f(t, \varphi_{k_j}(t)) \right) (t+h - t_n^{(k_j)}).
\end{aligned}$$

Zauważmy ponadto, że jeśli h jest dostatecznie małe, to

$$|f(t+\theta h, \varphi_{k_j}(t+\theta h)) - f(t, \varphi_{k_j}(t))| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ dla } \theta \in [0, 1]. \tag{3.8}$$

Z oszacowania tego wynika, że

$$|\varphi_{k_j}(t+h) - \varphi_{k_j}(t) - hf(t, \varphi_{k_j}(t))| < \frac{\varepsilon h}{4},$$

czyli

$$\left| \frac{\varphi_{k_j}(t+h) - \varphi_{k_j}(t)}{h} - f(t, \varphi_{k_j}(t)) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3.9)$$

Łącząc te oszacowania widzimy, że dla każdego ε i każdego h mniejszego od pewnego h_0 następujące oszacowanie jest prawdziwe dla każdego $t \in (t_0, t_0 + \alpha)$

$$\left| \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} - f(t, \varphi(t)) \right| < \varepsilon. \quad (3.10)$$

Jest to dowód przejścia granicznego (3.5). ■

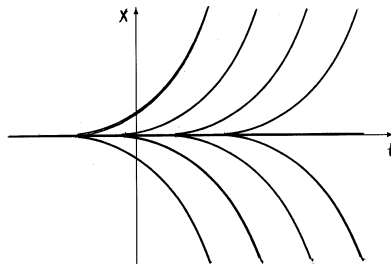
Jak pokazuje poniższy przykład, założenie warunku Lipschitza jest istotne dla uzyskania jednoznaczności rozwiązania. Bez tego założenia może istnieć wiele rozwiązań tego samego zagadnienia początkowego.

3.3 Przykład. Rozważmy równanie

$$\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}.$$

Równanie to spełnia warunki tw. 3.2, ale nie spełnia założeń tw. 3.1. Dokładniej: założenia tw. 3.1 są spełnione wszędzie poza prostą $x = 0$ i nie są spełnione na tej prostej. W efekcie przez każdy punkty $(t_0, 0)$ przechodzą trzy krzywe całkowite (patrz rys. 3.1):

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= 0, \\ \varphi_2(t) &= \left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^{3/2}, \\ \varphi_3(t) &= -\left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^{3/2}. \end{aligned}$$



Rysunek 3.1: Różne rozwiązania równania z przykładu 3.3

3.4 Przykład. Metoda łamanych Eulera może być także prostą metodą znajdowania przybliżonych rozwiązań równań różniczkowych. Jeśli przyjmiemy, że poszczególne chwile czasowe są jednakowo odległe, tzn.

$$t_0, t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_1 + \Delta t = t_0 + 2\Delta t, \dots, t_i = t_0 + i\Delta t,$$

to otrzymamy równanie różnicowe

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i)\Delta t, \quad (3.11)$$

które można służyć do obliczania przybliżonego rozwiązania.

Weźmy jako przykład równanie $\dot{x} = x$. Odpowiadające mu równanie różnicowe (3.11) można łatwo rozwiązać. Ma ono bowiem postać

$$x_{i+1} = x_i + x_i\Delta t = (1 + \Delta t)x_i. \quad (3.12)$$

Stąd

$$x_i = (1 + \Delta t)^i x_0. \quad (3.13)$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego $\dot{x} = x$ jest funkcja $x(t) = x_0 e^t$. Jeśli przyjmiemy $t = T$ oraz i takie, że $i\Delta t = T$, to zauważymy, że $(1 + \Delta t)^i = (1 + \frac{i\Delta t}{i})^i = (1 + \frac{T}{i})^i$, co jest dobrym przybliżeniem e^T dla dużych i .

3.2 Przedłużalność rozwiązań

Jeśli $\varphi(t)$ jest rozwiązaniem lokalnym na pewnym przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$, to przyjmując $t_1 = t_0 + \alpha$ i $\varphi(t_1)$ za nowy warunek początkowy, można rozwiązać rozważane równanie na przedziale $[t_1, t_1 + \alpha_1]$ itd. Analogicznie możemy konstruować przedłużenia w lewo, tj. na przedział $[t_0 - \alpha, t_0]$ itd. Powstaje pytanie, jak daleko można to postępowanie kontynuować, czyli jaki może być maksymalny przedział istnienia rozwiązania.

3.5 DEFINICJA. Rozwiązanie $\varphi(t)$ określone na przedziale $J \subset \mathbb{R}$ nazywa się **rozwiązaniem wysyconym**, jeśli nie istnieje przedłużenie tego rozwiązania na przedział J_1 taki, że J jest jego podzbiorem właściwym. Przedział J nazywa się wtedy **maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania** $\varphi(t)$.

Zajmiemy się teraz zachowaniem rozwiązania wysyconego $\varphi(t)$ na brzegu maksymalnego przedziału istnienia rozwiązania. Rozpocznijmy od udowodnienia pomocniczego lematu.

3.6 LEMAT. Niech $\varphi(t)$ będzie rozwiązaniem równania

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (3.14)$$

w przedziale (a_-, a_+) , takim że $(t, \varphi(t)) \in Q$ dla każdego $t \in (a_-, a_+)$, gdzie Q jest zbiorem otwartym w \mathbb{R}^{m+1} . Jeśli funkcja $f(t, x)$ jest ciągła i ograniczona na Q , to istnieją granice $\varphi(a_- + 0)$ i $\varphi(a_+ - 0)$. Jeśli funkcja $f(t, x)$ jest ciągła w punkcie $(a_-, \varphi(a_- + 0))$ lub $(a_+, \varphi(a_+ - 0))$, to rozwiązanie $\varphi(t)$ może być przedłużone na przedział $[a_-, a_+)$ lub $(a_-, a_+]$.

Dowód. Funkcja $\varphi(t)$ spełnia całkową wersję równania (3.14)

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (3.15)$$

dla $a_- < t_0 \leq t < a_+$. Ponieważ $f(t, x)$ jest ograniczona na zbiorze Q , więc mamy oszacowanie

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M(t_2 - t_1), \quad t_1, t_2 \in (a_-, a_+), \quad t_1 \leq t_2,$$

gdzie $M = \sup_{(t,x) \in Q} |f(t, x)|$. Jeśli $t_1, t_2 \rightarrow a_- + 0$, to $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) \rightarrow 0$. Wynika stąd istnienie granicy $\varphi(a_- + 0)$ (dowód dla granicy $\varphi(a_+ - 0)$ jest podobny).

Jeśli funkcja $f(t, x)$ jest ciągła aż do punktu $(a_+, \varphi(a_+ - 0))$, to $\varphi(a_+)$ jest zdefiniowana wzorem (patrz (3.15))

$$\varphi(a_+) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{a_+} f(s, \varphi(s)) ds.$$

Analogicznie dowodzi się przedłużalności na przedział $[a_-, a_+)$. ■

3.7 TWIERDZENIE. Niech $f(t, x)$ będzie funkcją ciągłą w zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^{m+1}$ i niech $\varphi(t)$ będzie rozwiązaniem równania (3.14) w pewnym przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$, takim że $(t, \varphi(t)) \in Q$ dla każdego $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Jeśli $f(t, x)$ jest ciągła na Q , to funkcja $\varphi(t)$ może być przedłużona, jako rozwiązanie równania (3.14), do rozwiązania wysyconego z maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania (ω_-, ω_+) . Jeśli ciąg punktów $\{t_n\}$ jest zbieżny do jednego z krańców przedziału (ω_-, ω_+) , to ciąg $\{(t_n, \varphi(t_n))\}$ jest zbieżny do brzegu zbioru Q , jeśli zbiór Q jest ograniczony. Jeśli zbiór Q jest nieograniczony, to ciąg punktów $(t_n, \varphi(t_n))$ może być nieograniczony dla $t_n \rightarrow \omega_+$ lub $t_n \rightarrow \omega_-$.

Dowód. Niech $U \subset V \subset \bar{V} \subset Q$, gdzie U jest zbiorem zwartym a V jest zbiorem otwartym ograniczonym. Jeśli $(t_0, x_0) \in U$, to rozwiązanie $\varphi(t)$ zaczynające się w punkcie (t_0, x_0) można przedłużyć na przedział $[t_0, t_1]$, taki że $(t_1, \varphi(t_1)) \notin U$. Wynika to z tw. 3.2 z $a = b = \text{dist}(\bar{V}, \partial Q)$ i $M = \sup_{(t,x) \in V} |f(t, x)|$. Z twierdzenia tego wynika, że rozwiązanie $\varphi(t)$ istnieje na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$, gdzie α zależy tylko od a, b i M (czyli od zbioru V). Jeśli $(t_0 + \alpha, \varphi(t_0 + \alpha)) \in U$, to przyjmując ten punkt za nową wartość początkową, przedłużamy rozwiązanie na

przedział $[t_0, t_0 + 2\alpha]$ itd. Ponieważ zbiór U jest zwarty, więc po skończonej liczbie kroków otrzymamy przedłużenie na przedział $[t_0, t_1]$, gdzie $(t_1, \varphi(t_1)) \notin U$.

Zbudujmy teraz pokrycie zbioru Q ciągiem wstępującym zbiorów Q_n otwartych, ograniczonych oraz takich że $\overline{Q_n} \subset Q_{n+1}$. Z poprzedniej części dowodu wynika, że istnieje ciąg $\{t_i\}$ i ciąg wskaźników $\{n_i\}$, takie że $(t_i, \varphi(t_i)) \in Q_{n_i}$ i $(t_i, \varphi(t_i)) \notin Q_{n_i-1}$. Ciąg $\{t_i\}$ jest monotoniczny, ma więc granicę. Jeśli granicą tą jest $+\infty$, to kończy to dowód. Załóżmy więc, że ciąg t_i jest ograniczony z góry. Wtedy istnieje skończona granica

$$\omega_+ = \lim_{i \rightarrow \infty} t_i.$$

Jeśli ciąg $(t_i, \varphi(t_i))$ jest nieograniczony, to daje to część tezy twierdzenia.

Jeśli ciąg $(t_i, \varphi(t_i))$ jest ograniczony, to zawarty jest on w pewnym zbiorze zwartym U . Na zbiorze U funkcja f jest ograniczona i można zastosować lemat 3.6. Z lematu tego wynika, że funkcja $\varphi(t)$ ma granicę $\varphi(\omega_+ - 0)$. Punkt $(\omega_+, \varphi(\omega_+ - 0))$ jest punktem brzegowym zbioru Q . Gdyby był to punkt wewnętrzny, to na podstawie lematu 3.6 $(\omega_+, \varphi(\omega_+))$ byłoby punktem należącym do pewnego Q_k , $\overline{Q_k} \subset Q$. Można byłoby więc przedłużyć $\varphi(t)$ na przedział większy niż $[t_0, \omega_+)$, co przeczyłoby maksymalności ω_+ . Podobnie można postąpić z przedłużeniem w lewo do punktu ω_- . ■

3.3 Zależność rozwiązania od danych początkowych i parametrów

W tym podrozdziale zbadamy zależność rozwiązania od danych początkowych oraz dodatkowych parametrów. Zależność od parametrów oznacza, że prawa strona równania zależy od trzech zmiennych $f = f(t, x, \lambda)$, gdzie t jest zmienną niezależną, x zmienną zależną, a λ jest dodatkowym parametrem. Oznacza to rozważanie zagadnienia początkowego

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, \lambda), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.16), to chcąc badać zależność tego rozwiązania od warunków początkowych (t_0, x_0) i parametru λ , będziemy traktowali to rozwiązanie jako funkcję wszystkich tych zmiennych, tj. $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$.

Okazuje się, że tę ogólną sytuację można znacznie uprościć. Dokonując zamiast zmiennych

$$t \rightarrow t - t_0, \quad x \rightarrow x - x_0,$$

możemy zagadnienie początkowe (3.16) sprowadzić do postaci

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t - t_0, x - x_0, \lambda), \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

W tym zapisie t_0 i x_0 są dodatkowymi parametrami funkcji f . Oznacza to, że zależność od warunków początkowych można sprowadzić do zależności prawej strony równania od parametru. Możliwa jest także operacja odwrotna. Możemy potraktować λ jako zmienną zależną, uzupełniając zagadnienie (3.16) równaniem

$$\dot{\lambda} = 0,$$

z warunkiem początkowym

$$\lambda(t_0) = \lambda_0,$$

gdzie λ_0 jest ustaloną wartością parametru λ (wybraną dowolnie). Przyjmując

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},$$

otrzymujemy zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} \dot{y} &= g(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

sprowadzające zależność od parametru do zależności od warunku początkowego.

W dalszej części tego podrozdziału rozpatrując zależność od warunku początkowego będziemy zakładali, że t_0 jest ustalone a zmienia się tylko x_0 , czyli wartość rozwiązania w chwili początkowej. To ograniczenie służy jedynie uproszczeniu zapisu i nie jest istotne. Gładkość rozwiązania względem chwili początkowej t_0 jest bowiem taka sama jak gładkość rozwiązania względem t , co wynika natychmiast z zamiany zmiennych $t \rightarrow t - t_0$.

Rozważania o zależności rozwiązania od danych początkowych i parametrów poprzedzimy dwoma twierdzeniami dotyczącymi funkcji wielu zmiennych. Mimo że twierdzenia te należą do kursu analizy, przytaczamy je tutaj w sformułowaniu, które będzie wygodne do bezpośredniego zastosowania w dowodach tego podrozdziału. Dowody tych twierdzeń (lub twierdzeń podobnych) są podawane na wykładzie Analizy II.

3.8 TWIERDZENIE. (Twierdzenie o skończonych przyrostach) *Na zwartym odcinku $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dane są dwie funkcje $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Zakładamy, że funkcje f i g są różniczkowalne w każdym punkcie odcinka (a, b) oraz spełnione jest szacowanie*

$$\|\dot{f}(t)\| \leq \dot{g}(t), \quad \text{dla } t \in (a, b).$$

Wtedy

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

3.9 TWIERDZENIE. Niech $J \subset \mathbb{R}$ będzie odcinkiem na prostej (nie koniecznie ograniczonym) a $A \subset \mathbb{R}^n$ dowolnym podzbiorem w \mathbb{R}^n .

Jeśli funkcja $\psi: J \times A \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest ciągłą funkcją argumentu t , dla $t \in J$, przy ustalonym $x \in A$ oraz jest ciągła po x , dla $x \in A$, jednostajnie po $t \in J$, to ψ jest funkcją ciągłą argumentów $(t, x) \in J \times A$.

Jeśli funkcja $\psi: J \times A \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest funkcją ciągłą argumentów $(t, x) \in J \times A$ oraz odcinek J jest zwarty, to $\psi(t, x)$ jest funkcją ciągłą argumentu x jednostajnie po $t \in J$.

Po tej powtórcie z analizy przejdziemy do zasadniczego tematu, tj. zależności rozwiązań od warunków początkowych i parametrów. Zasadnicze twierdzenia poprzedzimy kilkoma lematami. Ich celem jest wydzielenie z dowodów pewnych faktów, które opisują ogólne własności rozwiązań równań różniczkowych.

3.10 TWIERDZENIE. (Lemat Gronwalla) Niech na przedziale $[0, T]$ dane będą funkcje rzeczywiste $a(t)$, $b(t)$, $u(t)$, ciągłe na przedziale $(0, T)$, oraz niech funkcja $u(t)$ spełnia nierówność całkową

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)u(s)ds, \quad \text{dla } t \in [0, T], \quad (3.18)$$

dla $b(t) \geq 0$. Wtedy zachodzi oszacowanie

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau)d\tau\right)ds. \quad (3.19)$$

Jeśli dodatkowo funkcja $a(t)$ jest niemalejąca ($a(s) \leq a(t)$ dla $s \leq t$), to otrzymujemy prostsze oszacowanie

$$u(t) \leq a(t) \exp\left(\int_0^t b(\tau)d\tau\right). \quad (3.20)$$

Dowód. Niech $\phi(t) = \exp(-\int_0^t b(s)ds)$. Z prostych rachunków i nierówności (3.18) mamy

$$\frac{d}{dt}\phi(t) \int_0^t b(s)u(s)ds = b(t)\phi(t)\left(u(t) - \int_0^t b(s)u(s)ds\right) \leq a(t)b(t)\phi(t).$$

Całkując tę nierówność w przedziale $[0, t]$ dostajemy

$$\phi(t) \int_0^t b(s)u(s)ds \leq \int_0^t a(s)b(s)\phi(s)ds. \quad (3.21)$$

Dzieląc tę nierówność przez $\phi(t)$ oraz dodając do obu stron $a(t)$ dostajemy nierówność (3.19).

Aby otrzymać nierówność (3.20) wykorzystamy monotoniczność funkcji $a(t)$ przy oszacowaniu prawej strony (3.21)

$$\begin{aligned} \int_0^t a(s)b(s)\frac{\phi(s)}{\phi(t)}ds &\leq a(t)\int_0^t b(s)\exp\left(\int_s^t b(\tau)d\tau\right)ds = \\ &= a(t)\int_0^t \frac{d}{ds}\exp\left(\int_s^t b(\tau)d\tau\right)ds = a(t)\left(\exp\left(\int_0^t b(s)ds\right) - 1\right). \end{aligned}$$

Nierówność (3.21) przyjmuje więc dla niemalejącej funkcji $a(t)$ postać

$$\int_0^t b(s)u(s)ds \leq a(t)\left(\exp\left(\int_0^t b(s)ds\right) - 1\right).$$

Po dodaniu $a(t)$ do obu stron tej nierówności dostajemy nierówność (3.20). ■

Prostym wnioskiem z powyższego twierdzenia jest nierówność, którą będziemy wielokrotnie wykorzystywać w dalszych dowodach.

3.11 WNIOSEK. Niech funkcja ciągła $u(t)$ spełnia nierówność całkową

$$u(t) \leq \alpha + \int_0^t (\beta u(s) + \gamma)ds, \quad \text{dla } t \in [0, T], \quad (3.22)$$

gdzie α, β i γ są liczbami rzeczywistymi przy czym $\beta \geq 0$. Wtedy

$$u(t) \leq \alpha e^{\beta t} + \frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta t} - 1). \quad (3.23)$$

Udowodnimy teraz lemat, który stanowi zasadniczy krok w dowodzie ciągłej zależności rozwiązania od warunków początkowych oraz prawej strony równania.

3.12 LEMAT. Rozważmy równanie

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3.24)$$

gdzie, podobnie jak w tw. 3.1, zakładamy, że funkcja $f(t, x) : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła w zbiorze $Q = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, ograniczona $\sup_{(t,x) \in Q} |f(t, x)| = M$ oraz spełnia w Q warunek Lipschitza względem zmiennej x ze stałą L .

Niech $\varphi_1(t)$ będzie rozwiązaniem równania (3.24) z warunkiem początkowym $\varphi_1(t_0) = x_1$, które istnieje na odcinku $J \subset [t_0 - a, t_0 + a]$, zawierającym w swoim wnętrzu punkt t_0 , oraz spełniające warunek $(t, \varphi(t)) \in Q$, dla $t \in J$.

Niech funkcja $\varphi_2(t)$ będzie funkcją klasy C^1 na odcinku J , spełnia warunki $\varphi_2(t_0) = x_2$, $(t, \varphi_2(t)) \in Q$ dla $t \in J$, oraz będzie bliska rozwiązaniu równania (3.24) w tym sensie, że zachodzi dla niej oszacowanie

$$\|\dot{\varphi}_2(t) - f(t, \varphi_2(t))\| \leq \varepsilon \quad (3.25)$$

dla pewnego $\varepsilon > 0$ oraz każdego $t \in J$.

Wtedy dla każdego $t \in J$ zachodzi oszacowanie

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{L(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1). \quad (3.26)$$

Dowód. Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy $t_0 = 0$ (nie zmniejsza to ogólności dowodu, bo warunek taki można otrzymać przez odpowiednią transformację zmiennej t). Korzystając z oszacowania (3.25) oraz faktu, że funkcja $\varphi_1(t)$ jest rozwiązaniem równania (3.24) możemy napisać

$$\|\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)\| \leq \varepsilon + \|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\|.$$

Ponieważ funkcja $f(t, x)$ spełnia warunek Lipschitza po zmiennej x , ostatnią nierówność można przepisać w postaci

$$\|\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)\| \leq \varepsilon + L\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$

Niech $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. Funkcja ta jest klasy C^1 na odcinku J , bo taka jest z założenia funkcja $\varphi_2(t)$, a dla funkcji $\varphi_1(t)$ wynika to z tw. 3.1. Z twierdzenia 3.8 dostajemy wtedy

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \int_0^t (\varepsilon + L\|\varphi(\tau)\|) d\tau.$$

Korzystając z prostego związku $\|\varphi(\tau)\| \leq \|\varphi(0)\| + \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|$ dostajemy oszacowanie

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq (\varepsilon + L\|\varphi(0)\|)t + L \int_0^t \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\| d\tau.$$

Jeśli w ostatnim oszacowaniu oznaczymy $u(t) = \|\varphi(t) - \varphi(0)\| \geq 0$ oraz $k = (\varepsilon + L\|\varphi(0)\|) > 0$, to oszacowanie to przyjmie postać

$$u(t) \leq kt + L \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Jest to nierówność z wniosku 3.11. Z tego wniosku wynika oszacowanie

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{L} + \|\varphi(0)\|\right) (e^{Lt} - 1).$$

Z tej ostatniej nierówności otrzymujemy

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\| + \|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \|\varphi(0)\| e^{Lt} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{Lt} - 1).$$

Korzystając z faktu, że $\varphi(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = x_1 - x_2$ dostajemy oszacowanie z tezy. ■

Przejdziemy teraz do dowodu twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązania od warunków początkowych i parametrów.

3.13 TWIERDZENIE. Niech $f(t, x, \lambda)$ będzie ograniczona i ciągła dla $(t, x) \in J \times A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ i $\lambda \in G \subset \mathbb{R}^k$, gdzie zbiory $J \times A$ i G są otwarte i ograniczone. Zakładamy, że $t_0 \in J$ oraz funkcja f spełnia po zmiennej $x \in A$ warunek Lipschitza ze stałą L niezależną od $t \in J$ oraz $\lambda \in G$. Wtedy rozwiązanie $\varphi(t, x_0, \lambda_0)$ równania (3.16) zależy w sposób ciągły od punktu (x_0, λ_0) .

Dowód. Na podstawie uwag uczynionych na początku tego podrozdziału zajmemy się wyłącznie zależnością rozwiązania od danych początkowych. Rozpatrywać więc będziemy równania w postaci (3.24).

Niech $\varphi(t, u_1)$ będzie rozwiązaniem równania (3.24) z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = u_1$, a $\varphi(t, u_2)$ rozwiązaniem z warunkiem $\varphi(t_0) = u_2$.

Z lematu 3.12 wynika oszacowanie

$$\|\varphi(t, u_1) - \varphi(t, u_2)\| \leq \|u_1 - u_2\| e^{L(t-t_0)}.$$

Niech $K = \sup_{t \in J} e^{L(t-t_0)}$ (założyliśmy ograniczoność przedziału J , co gwarantuje skończoność stałej K). Wtedy

$$\|\varphi(t, u_1) - \varphi(t, u_2)\| \leq K \|u_1 - u_2\|,$$

co oznacza, że rozwiązanie $\varphi(t, u)$ spełnia warunek Lipschitza po warunku początkowym u ze stałą niezależną od $t \in J$, czyli jest ciągłą funkcją warunku początkowego.

Pokażemy teraz, że $\varphi(t, u)$ jest funkcją ciągłą obu argumentów. Zauważmy, że funkcja ta jest ciągła jako funkcja t przy ustalonym u , co wynika z tw. 3.1. Jeśli teraz ustalimy t , to funkcja $\varphi(t, u)$ jest ciągłą funkcją u i ciągłość ta jest jednostajna po $t \in J$, co wynika ze spełniania warunku Lipschitza po u ze stałą niezależną od t . Ciągłość to parze argumentów (t, u) wynika teraz z tw. 3.9. ■

Powyższe twierdzenie można udowodnić przy nieco słabszych założeniach. Dowód takiego twierdzenia wymaga w zasadzie powtórzenia dowodu twierdzenia Peano dla różnicy funkcji $\varphi(t, u_1)$ i $\varphi(t, u_2)$, dlatego przytaczamy je tu bez dowodu.

3.14 TWIERDZENIE. Jeśli funkcja $f(t, x, \lambda)$ jest ograniczona i ciągła w pewnym zbiorze otwartym Q , a przez każdy punkt $(t_0, x_0, \lambda_0) \in Q$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa $\varphi(t, x_0, \lambda_0)$ równania (3.16), to φ zależy w sposób ciągły od punktu (x_0, λ_0) .

Przejdziemy teraz do dowodu gładkiej zależności rozwiązania od warunków początkowych i parametrów.

3.15 TWIERDZENIE. Niech $f(t, x, \lambda)$ będzie funkcją klasy C^1 swoich argumentów dla $(t, x) \in Q \subset \mathbb{R}^{m+1}$ i $\lambda \in G \subset \mathbb{R}^k$, gdzie zbiory Q i G są otwarte. Wtedy rozwiązanie $\varphi(t, x_0, \lambda)$ zagadnienia początkowego (3.16) jest klasy C^1 względem

zmiennych t, x_0, λ w otwartym zbiorze, na którym jest określone. Jeśli $y(t)$ jest macierzą Jacobiego $\frac{\partial \varphi(t, x_0, \lambda)}{\partial \lambda}$, to spełnia ona równanie

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial x} y + \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial \lambda} \quad (3.27)$$

z warunkiem początkowym

$$y(t_0) = \frac{\partial \varphi(t_0, x_0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0.$$

Natomiast macierz Jacobiego $z(t) = \frac{\partial \varphi(t, x_0, \lambda)}{\partial x_0}$ spełnia równanie

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial x} z \quad (3.28)$$

z warunkiem początkowym

$$z(t_0) = \frac{\partial \varphi(t_0, x_0, \lambda)}{\partial x_0} = I,$$

gdzie I jest macierzą identycznościową $m \times m$.

Dowód. Różniczkowalność w sposób ciągły względem t wynika z tw. 3.1 (\dot{x} jest funkcją ciągłą argumentów (t, x_0, λ) , bo jako rozwiązanie równania jest równe $f(t, \varphi(t, x_0), \lambda)$). Podobnie jak w tw. 3.13 ograniczymy się do rozpatrzenia zależności od danych początkowych i udowodnimy, że rozwiązanie jest klasy C^1 jako funkcja warunku początkowego.

Niech $\varphi(t, x_0)$ będzie rozwiązaniem równania (3.24) z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = x_0$, a $\varphi(t, u)$ będzie rozwiązaniem równania (3.24) z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = u$. Wprowadźmy pomocniczą funkcję

$$w(t) = \varphi(t, u) - \varphi(t, x_0) - z(t) \cdot (u - x_0), \quad (3.29)$$

gdzie $z(t)$ jest rozwiązaniem równania (3.28) z funkcją f niezależną od λ .

Niech $B(t, u) = \frac{\partial f(t, \varphi(t, u))}{\partial x}$. Wtedy równanie (3.28) można zapisać jako

$$\dot{z}(t) - B(t, u)z(t) = 0.$$

Korzystając z definicji funkcji $w(t)$ oraz równania (3.28) obliczmy lewą stronę powyższej równości dla funkcji w

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) - B(t, u)w(t) &= f(t, \varphi(t, u)) - f(t, \varphi(t, x_0)) \\ &\quad - \frac{\partial f(t, \varphi(t, x_0))}{\partial x} (\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Prawa strona równania (3.30) zeruje się dla $u = x_0$ a jej pochodna po u wynosi

$$\frac{\partial f(t, \varphi(t, u))}{\partial x} - \frac{\partial f(t, \varphi(t, x_0))}{\partial x}.$$

Z wielowymiarowego wzoru Taylora wynika więc oszacowanie

$$\begin{aligned} & \|f(t, \varphi(t, u)) - f(t, \varphi(t, x_0)) - \frac{\partial f(t, \varphi(t, x_0))}{\partial x} (\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0))\| \\ & \leq m \|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\|, \end{aligned}$$

gdzie

$$m = \sup_{\alpha \in [0,1]} \left\| \frac{\partial f(t, \alpha\varphi(t, u) - (1-\alpha)\varphi(t, x_0))}{\partial x} - \frac{\partial f(t, \varphi(t, x_0))}{\partial x} \right\|.$$

Wynika stąd oszacowanie

$$\|\dot{w}(t) - B(t, u)w(t)\| \leq m \|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\|.$$

Pokażemy teraz, że stała m może być dowolnie mała, jeśli $u \rightarrow x_0$. W tym celu zauważmy, że funkcja $\frac{\partial f(t, \alpha\varphi(t, u) - (1-\alpha)\varphi(t, x_0))}{\partial x}$ jest ciągłą funkcją argumentów (t, u, α) . Z tw. 3.2 wynika, że funkcja ta dąży do $\frac{\partial f(t, \varphi(t, x_0))}{\partial x}$, gdy $u \rightarrow x_0$, jednostajnie po $t \in J$ oraz $\alpha \in [0, 1]$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje więc stała η , taka że gdy $\|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\| \leq \eta$, to $m \leq \varepsilon$. Mamy więc oszacowanie

$$\|\dot{w}(t) - B(t, u)w(t)\| \leq \varepsilon \|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\|, \quad (3.31)$$

które jest prawdziwe dla $\|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\| \leq \eta$. Ponieważ z lematu 3.12 wynika, że przy założeniach twierdzenia rozwiązanie jest funkcją lipschitzowską warunku początkowego, to istnieje stała K , taka że

$$\|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)\| \leq K \|u - x_0\|.$$

Łącząc te oszacowania dostajemy

$$\|\dot{w}(t) - B(t, u)w(t)\| \leq \varepsilon K \|u - x_0\|. \quad (3.32)$$

Zajmiemy się teraz równaniem

$$\dot{v}(t) = B(t, u)v(t). \quad (3.33)$$

Prawa strona tego równania spełnia warunek Lipschitza ze stałą β

$$\beta = \sup_{t \in J, u \in A} \|B(t, u)\|,$$

gdzie J jest zwartym odcinkiem zawierającym w swoim wnętrzu t_0 a $A = \{u : \|u - x_0\| \leq \eta\}$ jest zwartym otoczeniem punktu x_0 . Rozwiązaniem równania (3.33) z warunkiem $v(t_0) = 0$ jest oczywiście funkcja $v(t) \equiv 0$. Z drugiej strony funkcja $w(t)$ spełnia warunek $w(t_0) = 0$, co wynika z jej definicji oraz obserwacji, że $\varphi(t_0, u) = u$, $\varphi(t_0, x_0) = x_0$ a $z(t_0) = I$. Z nierówności (3.32) wynika, że funkcja $w(t)$ jest bliska rozwiązaniu równania (3.33) w sensie opisanym w lemacie

3.12. Funkcja ta spełnia także założenia tego lematu. Rozwiązanie $v(t) \equiv 0$ spełnia także założenia tego lematu. Z nierówności (3.26) wynika więc oszacowanie

$$\|w(t)\| \leq \varepsilon K \|u - x_0\| \frac{e^{\beta(t-t_0)} - 1}{\beta}.$$

Ułamek po prawej stronie ostatniej nierówności jest jednostajnie ograniczony dla każdego $t \in J$. Pozwala to ostatnią nierówność zapisać w postaci

$$\|w(t)\| \leq \varepsilon K' \|u - x_0\|, \quad \text{dla } \|u - x_0\| \leq \eta,$$

czyli

$$\|\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0) - z(t) \cdot (u - x_0)\| \leq \varepsilon K' \|u - x_0\|.$$

Ponieważ oszacowanie to jest prawdziwe dla każdego $\varepsilon > 0$, wynika z niego istnienie pochodnej $\frac{\partial \varphi(t, u)}{\partial u}$ w punkcie $u = x_0$ oraz dowodzi, że jest ona równa $z(t)$.

Musimy jeszcze pokazać, że $\varphi(t, u)$ jest funkcja klasy C^1 względem pary argumentów (t, u) . Na początku dowodu zauważyliśmy, że pochodna $\frac{\partial \varphi(t, u)}{\partial t}$ jest funkcją ciągłą argumentów (t, u) , bo jako rozwiązanie równania jest równa $f(t, \varphi(t, u))$ a f jest z założenia ciągłą funkcją. W przypadku pochodnej $\frac{\partial \varphi(t, u)}{\partial u}$ wykazaliśmy, że w punkcie $u = x_0$ jest ona równa rozwiązaniu $z(t)$ równania (3.28). W otoczeniu punktu x_0 prawa strona tego równania spełnia warunek Lipschitza. Z tw. 3.13 wynika więc, że jest ona ciągłą funkcją (t, u) . Wykazaliśmy w ten sposób, że obie pochodne cząstkowe funkcji $\varphi(t, u)$ są ciągłymi funkcjami pary zmiennych (t, u) , czyli funkcja $\varphi(t, u)$ jest klasy C^1 jako funkcja pary argumentów. ■

3.16 WNIOSEK. *Jeśli w założeniach tw. 3.15 funkcja $f(t, x, \lambda)$ jest klasy C^r , gdzie $r \geq 1$, to rozwiązanie $\varphi(t, x_0, \lambda)$ jest też klasy C^r .*

Dowód. Rozumowanie jest identyczne dla każdej zmiennej, od której zależy rozwiązanie. Indukcyjny dowód przeprowadzimy tylko dla zależności rozwiązania od parametru. Załóżmy, że wniosek jest prawdziwy dla $r = s$. Pokażemy, że jeśli $f(t, x, \lambda)$ jest klasy C^{s+1} , to rozwiązanie jest też tej klasy. Różniczkujemy równanie (3.16) s razy po λ i otrzymujemy równanie, dla którego spełnione są założenia tw. 3.15, czyli jego rozwiązanie jest klasy C^1 . Skoro s -ta pochodna jest klasy C^1 , to rozwiązanie równania (3.16), podobnie jak funkcja $f(t, x, \lambda)$, jest różniczkowalne w sposób ciągły $s + 1$ razy. ■

3.17 Przykład. Dane jest zagadnienie Cauchy'ego

$$\dot{x} = \mu x^2 + 2t, \quad x(0) = \mu - 1.$$

Należy znaleźć pochodną rozwiązania względem parametru $\frac{\partial x}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$.

Sprowadzamy problem do równania, w którym zależna od parametru jest tylko prawa strona równania. W tym celu wprowadzamy nową zmienną zależną $y = x - \mu + 1$. Rozpatrywane zagadnienie Cauchy'ego redukuje się teraz do następującego

$$\dot{y} = \mu y^2 + 2\mu^2 y + 2t + \mu^3 - 2\mu^2 + \mu, \quad y(0) = 0. \quad (3.34)$$

Zgodnie z tw. 3.15 dostajemy równanie

$$\dot{z} = (2\mu y + 2\mu^2)z + (y^2 + 4\mu y + 3\mu^2 - 4\mu + 1).$$

Równanie to rozwiązujemy standardową metodą dla równań liniowych. Najpierw znajdujemy rozwiązanie równania jednorodnego

$$z(t) = c \exp\left(\int_0^t (2\mu y + 2\mu^2) ds\right),$$

a następnie uzmienniamy stałą otrzymując (korzystamy z warunku początkowego $z(0) = 0$)

$$c(t) = \int_0^t \exp\left(-\int_0^s (2\mu y + 2\mu^2) d\tau\right) (y^2 + 4\mu y + 3\mu^2 - 4\mu + 1) ds.$$

Stąd

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp\left(\int_0^t (2\mu y + 2\mu^2) ds\right) \times \\ &\int_0^t \exp\left(-\int_0^s (2\mu y + 2\mu^2) d\tau\right) (y^2 + 4\mu y + 3\mu^2 - 4\mu + 1) ds = \\ &\int_0^t \exp\left(\int_s^t (2\mu y + 2\mu^2) d\tau\right) (y^2 + 4\mu y + 3\mu^2 - 4\mu + 1) ds. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $\mu = 0$ równanie (3.34) ma rozwiązanie $y = t^2$. Wykorzystując to rozwiązanie dostajemy po przejściu granicznym

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} z(t) = \int_0^t (s^4 + 1) ds = \frac{1}{5} t^5 + t.$$

Ponieważ $z = \frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{\partial x}{\partial \mu} - 1$, więc

$$\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = \frac{1}{5} t^5 + t + 1.$$

3.4 Twierdzenie o prostowaniu

Twierdzenie, które poniżej przedstawiamy, jest właściwie prostym wnioskiem z tw. 3.15. Jest ono jednak ważne, ponieważ daje geometryczny opis lokalnego zachowania krzywych całkowych. Z twierdzenia tego wynika, że krzywe całkowe równania różniczkowego są lokalnie równoległe względem siebie, tzn. przez odpowiedni dyfeomorfizm można je zamienić na rodzinę prostych równoległych. Ta własność sprawia, że twierdzenie to nazywa się **twierdzeniem o lokalnym prostowaniu** krzywych całkowych pola wektorowego.

3.18 TWIERDZENIE. W zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^{m+1}$ dane jest równanie

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (3.35)$$

z funkcją f klasy C^r , $r \geq 1$. Niech $(t_0, x_0) \in Q$. Istnieje wtedy V , $(t_0, x_0) \in V \subset Q$ oraz dyfeomorfizm klasy C^r $g: V \rightarrow W$, gdzie W jest obszarem w \mathbb{R}^{m+1} , o tej własności, że jeśli (s, u_1, \dots, u_m) jest lokalnym układem współrzędnych w W , to g przeprowadza równanie (3.35) w równanie

$$\frac{du}{ds} = 0.$$

Dowód. Niech $\varphi(t, t_0, p)$ będzie rozwiązaniem równania (3.35) z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0 = p$. Naszym celem jest zadanie przekształcenia, które krzywą całkową $\varphi(t, t_0, p)$ przekształci na prostą $u(s) = p$. Odwzorowanie to łatwiej jest zapisać w formie funkcji odwrotnej (utożsamienie zmiennych t i s wynika z faktu, że s opisuje zmianę t wzdłuż krzywej całkowej $\varphi(t, t_0, p)$)

$$g^{-1}(t, p) = (t, \varphi(t, t_0, p)). \quad (3.36)$$

Z wniosku 3.16 wynika, że g jest odwzorowaniem klasy C^r . Jakobian odwzorowania (3.36) w punkcie (t_0, p) jest różny od zera, czyli g jest dyfeomorfizmem klasy C^r . Pokażemy teraz, że odwzorowanie g przeprowadza pole wektorowe $[1, f(t, x)]$ na pole $[1, 0]$. Wynika to z faktu, że jeśli g przeprowadza krzywe $\varphi(t, t_0, p)$ na proste $u(s) = p$, to wektory styczne do jednej rodziny krzywych są przeprowadzane na wektory styczne do drugiej rodziny. Możemy więc powiedzieć, że dyfeomorfizm g przeprowadza równanie (3.35), któremu odpowiada pole $[1, f(t, x)]$, w równanie $\frac{du}{ds} = 0$, któremu odpowiada pole wektorowe $[1, 0]$. ■

Rozdział 4

Układy równań liniowych

4.1 Ogólne układy pierwszego rzędu

W rozdziale tym będziemy się zajmować układami równań liniowych. Główną uwagę poświęcimy zagadnieniom początkowym dla układów pierwszego rzędu

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (4.1)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (4.2)$$

W równaniu (4.1) $x(t)$ jest funkcją o wartościach wektorowych w przestrzeni \mathbb{R}^m

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}.$$

Także funkcja $f(t)$ jest funkcją wektorową o wartościach w \mathbb{R}^m . Natomiast $A(t)$ jest macierzą $m \times m$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^m$.

4.1 TWIERDZENIE. *Jeśli funkcje $A(t)$ i $f(t)$ są ciągłe dla $t \in (a, b)$, to przez każdy punkt zbioru $Q = (a, b) \times \mathbb{R}^m$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (4.1). Maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania jest przedział (a, b) .*

Dowód. Istnienie i jednoznaczność lokalnego rozwiązania wynika z tw. 3.1, bo $A(t)x + f(t)$ spełnia lokalnie warunek Lipschitza. Należy pokazać, że otrzymane rozwiązanie przedłuża się na cały odcinek (a, b) . Niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem przechodzącym przez punkt (t_0, x_0) . Pokażemy, że jeśli $t_1 \in (a, b)$, to $x(t_1)$ jest ograniczone. Z całkowej postaci równania (4.1)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^t f(s)ds$$

wynika oszacowanie

$$\|x(t_1)\| \leq \|x_0\| + K \int_{t_0}^{t_1} \|x(s)\| ds + \int_{t_0}^{t_1} \|f(s)\| ds,$$

gdzie $K = \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|A(t)\|$. Ponieważ odcinek $[t_0, t_1]$ jest zwarty, więc funkcja $f(t)$ jest ograniczona dla $t \in [t_0, t_1]$ i

$$\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_1} \|f(s)\| ds = c < +\infty.$$

Stąd

$$\|x(t_1)\| \leq c + K \int_{t_0}^{t_1} \|x(s)\| ds.$$

Na podstawie tw. 3.10 otrzymujemy

$$\|x(t_1)\| \leq ce^{K(t_1-t_0)}.$$

Oznacza to, że rozwiązanie $x(t)$ jest ograniczone w każdym punkcie $t_1 \in (a, b)$. ■

Podobnie jak w przypadku skalarnym ważną częścią analizy jest badanie równania jednorodnego

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (4.3)$$

Z tw. 4.1 wynika następujący wniosek.

4.2 WNIOSEK. *Jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (4.3) i $x(t_0) = 0$ dla pewnego $t_0 \in (a, b)$, to $x(t)$ jest tożsamościowo równe zero.*

Dowód. Funkcja $x(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem równania (4.3) przy warunku początkowym $x(t_0) = 0$. Z jednoznaczności rozwiązań wynika, że jest to jedyne rozwiązanie tego zagadnienia początkowego. ■

4.3 TWIERDZENIE. *Rozwiązania równania jednorodnego (4.3) tworzą m -wymiarową przestrzeń liniową E .*

Dowód. Niech E będzie zbiorem wszystkich rozwiązań równania (4.3). Niech $x_1(t), x_2(t) \in E$. Wtedy

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \in E,$$

bo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= c_1 \dot{x}_1(t) + c_2 \dot{x}_2(t) = c_1 A(t)x_1(t) + c_2 A(t)x_2(t) = \\ &= A(t)(c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)). \end{aligned}$$

Wobec tego E jest przestrzenią liniową. Udowodnimy teraz, że $\dim E = m$. Niech $t_0 \in (a, b)$ i zdefiniujmy odwzorowanie

$$L: x(t) \mapsto x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^m.$$

Odwzorowanie to jest liniowe

$$L(c_1x_1(t) + c_2x_2(t)) = c_1L(x_1(t)) + c_2L(x_2(t))$$

i odwzorowuje E w \mathbb{R}^m . Odwzorowanie to jest izomorfizmem. W tym celu zauważmy, że jeśli ustalimy $x_0 \in \mathbb{R}^m$, to istnieje rozwiązanie równania (4.3) z warunkiem $x(t_0) = x_0$. Wynika to z tw. 4.1. Odwzorowanie L jest więc „na”. Odwzorowanie L jest też wzajemnie jednoznaczne. W tym celu wystarczy zauważyć, że jeśli $x(t_0) = 0$, to $x(t)$ jest funkcją tożsamościowo równą zeru, co wynika z wniosku 4.2. ■

4.4 WNIOSEK. *Jeśli $x_c(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego (4.1), a wektory $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, są bazą przestrzeni E rozwiązań równania jednorodnego, to rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego ma postać*

$$x(t) = x_c(t) + c_1x_1(t) + \dots + c_mx_m(t),$$

gdzie $c_i \in \mathbb{R}$.

Dowód. Jeśli $x_c(t)$ i $x(t)$ są dwoma różnymi rozwiązaniami równania (4.1), to ich różnica $x_c(t) - x(t)$ jest, jak łatwo zauważyć, rozwiązaniem równania (4.3). ■

Rozważmy bazę przestrzeni rozwiązań równania (4.3). Baza ta składa się z m funkcji: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$. Z funkcji $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, tworzymy macierz $X(t)$, tak aby kolejne wektory $x_i(t)$ tworzyły kolumny macierzy $X(t)$.

Macierz $X(t)$ spełnia równanie

$$\dot{X} = A(t)X. \quad (4.4)$$

Równanie (4.4) jest zapisaniem w postaci macierzowej równań (4.3) dla wektorów $x_i(t)$.

4.5 TWIERDZENIE. *Niech $X(t)$ będzie rozwiązaniem równania (4.4) w przedziale (a, b) . Zdefiniujmy*

$$\Delta(t) = \det X(t) = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & x_2^m & \dots & x_m^m \end{vmatrix}.$$

Dla dowolnych $t, t_0 \in (a, b)$ mamy równość

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds, \quad (4.5)$$

gdzie $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^m a_{ii}$ oznacza ślad macierzy A .

Dowód. Niech $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^m$ oraz $X(t) = (x_i^j(t))_{i,j=1}^m$, gdzie $x_i^j(t)$ jest j -tą składową wektora x_i .

Z prawa różniczkowania wyznacznika mamy

$$\frac{d}{dt} \Delta(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_1^1 & \dot{x}_2^1 & \dots & \dot{x}_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & x_2^m & \dots & x_m^m \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_1^m & \dot{x}_2^m & \dots & \dot{x}_m^m \end{vmatrix}.$$

Dla pojedynczej składowej wektora $x_i(t)$ równanie (4.3) ma postać

$$\dot{x}_i^j = \sum_{k=1}^m a_{jk} x_i^k.$$

Wykorzystując tę postać równania (4.3) dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta(t) &= \begin{vmatrix} a_{11}x_1^1 & a_{11}x_2^1 & \dots & a_{11}x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & x_2^m & \dots & x_m^m \end{vmatrix} + \dots \\ &+ \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mm}x_1^m & a_{mm}x_2^m & \dots & a_{mm}x_m^m \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Korzystając z własności wyznacznika ostatnią równość można zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt} \Delta(t) = \Delta(t) \sum_{i=1}^m a_{ii}(t),$$

co po scałkowaniu daje tezę. ■

4.6 WNIOSEK. Jeśli $\Delta(t_0) \neq 0$ w pewnym punkcie $t_0 \in (a, b)$, to $\Delta(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$.

4.7 DEFINICJA. Macierz kwadratowa $X(t)$ o wymiarze $m \times m$ spełniająca równanie (4.4), dla której $\Delta(t) \neq 0$, nazywa się **macierzą fundamentalną** układu (4.3). Wektory $x_1(t), \dots, x_m(t)$ będące kolumnami macierzy fundamentalnej, nazywają się **fundamentalnym układem rozwiązań** równania (4.3). Wyznacznik $\Delta(t)$ nazywa się wtedy **wyznacznikiem Wrońskiego (wrońskianem)** układu funkcji $x_1(t), \dots, x_m(t)$.

Jeśli wyznacznik Wrońskiego układu funkcji $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ jest różny od zera w pewnym punkcie t_0 , to wektory $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_m(t_0)$ są liniowo niezależne. Twierdzenie 4.5 mówi, że jeśli pewien układ rozwiązań równania (4.3) jest liniowo niezależny w jednym punkcie $t_0 \in (a, b)$, to jest liniowo niezależny dla każdego $t \in (a, b)$. Wynika stąd łatwy sposób konstruowania układu fundamentalnego.

4.8 TWIERDZENIE. Każde liniowe równanie jednorodne ma układ fundamentalny.

Dowód. Wybieramy m liniowo niezależnych wektorów w \mathbb{R}^m : x_1, x_2, \dots, x_m i rozwiązujemy równanie

$$\dot{x} = A(t)x$$

z warunkami

$$x(t_0) = x_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

gdzie $t_0 \in (a, b)$.

Otrzymane rozwiązania $x_i(t)$ tworzą układ fundamentalny, bo $\Delta(t_0) \neq 0$ (z liniowej niezależności x_i) i $\Delta(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$ z tw. 4.5. ■

Udowodnimy teraz wielowymiarowy wariant metody uzmienniania stałej.

4.9 TWIERDZENIE. Niech będzie dane zagadnienie początkowe dla równania niejednorodnego (4.1)–(4.2). Rozwiązaniem tego zagadnienia jest funkcja

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds,$$

gdzie $X(t)$ jest macierzą fundamentalną układu (4.3).

Dowód. Niech $x_1(t), \dots, x_m(t)$ będą układem fundamentalnym rozwiązań równania (4.3). Każde rozwiązanie tego równania można zapisać jako kombinację liniową

$$x(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_mx_m(t).$$

Rozwiązania równania (4.1) będziemy poszukiwać uzmienniając stałe c_1, \dots, c_m

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \dots + c_m(t)x_m(t). \quad (4.6)$$

Niech $X(t)$ będzie macierzą fundamentalną, której kolumnami są wektory $x_i(t)$, oraz

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_m(t) \end{pmatrix}.$$

Pozwala to zapisać macierzową postać równania (4.6)

$$x(t) = X(t)C(t).$$

Po podstawieniu do równania (4.1) otrzymujemy

$$\dot{X}(t)C(t) + X(t)\dot{C}(t) = AX(t)C(t) + f(t).$$

Ponieważ $X(t)$ jest rozwiązaniem równania (4.4), to powyższe równanie upraszcza się do następującego

$$X(t)\dot{C}(t) = f(t).$$

$X(t)$ jest macierzą nieosobliwą, istnieje więc $X^{-1}(t)$ i ostatnie równanie można zapisać jako

$$\dot{C}(t) = X^{-1}(t)f(t).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Jeśli ma być spełniony warunek początkowy, to

$$X(t_0)C(t_0) = x_0,$$

co daje

$$C(t_0) = X^{-1}(t_0)x_0.$$

Ostatecznie $C(t)$ dana jest wzorem

$$C(t) = X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Wstawiając to wyrażenie do macierzowej wersji równania (4.6) otrzymujemy tezę. ■

4.2 Układy o stałych współczynnikach

Ponieważ brak jest ogólnych metod całkowania układów o zmiennych współczynnikach, zajmiemy się układami pierwszego rzędu o stałych współczynnikach. Dla układów takich istnieją skuteczne metody znajdowania rozwiązań.

Twierdzenie 4.9 daje nam analityczny wzór na rozwiązanie równania niejednorodnego, kiedy znany jest układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego. Wystarczy więc ograniczyć się do analizy układów jednorodnych

$$\dot{x} = Rx, \quad (4.7)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (4.8)$$

gdzie R jest stałą macierzą o wymiarze $m \times m$.

Gdyby równanie (4.7) było równaniem skalarnym, to rozwiązaniem zagadnienia początkowego (4.7)–(4.8) byłaby funkcja $x(t) = x_0 e^{R(t-t_0)}$. Pokażemy, że w przypadku wektorowym prawdziwy jest analogiczny wzór, jeśli tylko zdefiniujemy funkcję e^R dla macierzy.

4.10 DEFINICJA. Jeśli A jest macierzą kwadratową $m \times m$, to e^A definiujemy jako sumę szeregu

$$e^A \equiv I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots, \quad (4.9)$$

gdzie A^n oznacza n -krotne mnożenie macierzy A przez siebie.

Szereg (4.9) jest zbieżny jako szereg majoryzowany przez szereg

$$1 + K + \frac{1}{2!}K^2 + \cdots + \frac{1}{n!}K^n + \cdots = e^K,$$

gdzie $K = \|A\|$.

4.11 Przykład. Obliczmy e^A dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aby nie liczyć sumy nieskończonego szeregu, rozłożymy macierz A na sumę dwóch macierzy

$$A_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ iloczyn $A_D B$ jest przemienny, tzn. $A_D B = B A_D$, więc ze wzoru (4.9) wynika, że

$$e^A = e^{A_D+B} = e^{A_D} e^B.$$

Łatwo zauważyć, że

$$e^{A_D} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Macierz B jest macierzą nilpotentną i jej kwadrat jest macierzą zerową

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

więc

$$e^B = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ostatecznie

$$e^A = e^{A_D} e^B = \begin{pmatrix} e & e & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

4.12 Przykład. Pokażemy, że przemienność iloczynu macierzy A_D i B w poprzednim przykładzie jest istotna.

Rozważmy dwie macierze A i B

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obliczmy A^n i B^n

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \quad \text{i} \quad A^n = A,$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \quad \text{i} \quad B^n = B.$$

Wobec tego

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^t - 1 & e^t \end{pmatrix}, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & e^t - 1 \\ e^t - 1 & e^t \end{pmatrix},$$

a stąd

$$e^{At} e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & e^t - 1 \\ e^t - 1 & 2e^{2t} - 2e^t + 1 \end{pmatrix}.$$

Tymczasem

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

skąd

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

i $\exp((A+B)t)$ musi mieć jako składową w lewym górnym rogu szereg postaci $1 + \frac{1}{2}t^2 + \dots$. Jest jasne, że suma tego szeregu nie może być równa 1, czyli składowej

w lewym górnym rogu macierzy $e^{At}e^{Bt}$. W rzeczywistości $\exp((A+B)t)$ jest bardzo skomplikowanym wyrażeniem, którego wszystkie cztery składowe są dużo bardziej złożone niż dla macierzy $e^{At}e^{Bt}$.

W przykładzie tym uciekliśmy się do rozpatrywania macierzy e^{At} , aby łatwiej było zauważyć, że wielomian w lewym górnym rogu macierzy $e^{(A+B)t}$ nie daje się zredukować do stałej. Prawdą jest także, że $e^A e^B \neq e^{(A+B)}$, ale trudno to udowodnić bez skomplikowanych rachunków.

4.13 TWIERDZENIE. *Macierzą fundamentalną równania (4.7) jest $\exp(Rt)$.*

Dowód. Liczymy pochodną macierzy $\exp(Rt)$ korzystając z definicji eksponenty macierzy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{Rt} &= \frac{d}{dt} \left(I + Rt + \frac{1}{2!}R^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}R^nt^n + \dots \right) = \\ &= R + R^2t + \frac{1}{2!}R^3t^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}R^nt^{n-1} + \dots = \\ &= R \left(I + Rt + \frac{1}{2!}R^2t^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}R^{n-1}t^{n-1} + \dots \right) = Re^{Rt}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $X(t) = \exp(Rt)$ spełnia równanie

$$\dot{X} = RX,$$

czyli jest macierzą fundamentalną. ■

W przypadku macierzy o zmiennych współczynnikach wzór na macierz fundamentalną powinien mieć postać $\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)$. Niestety, w ogólności wzór taki nie jest prawdziwy! Macierze $A(s)$ nie muszą być przemienne dla różnych s , więc nie można poprawnie zdefiniować funkcji wykładniczej od całki z macierzy. Ten fakt tłumaczy brak analitycznych wzorów na rozwiązanie układów równań liniowych o zmiennych współczynnikach, mimo że wzór taki istnieje dla jednego równania pierwszego rzędu (macierze 1×1 są zawsze przemienne!).

Zajmiemy się teraz problemem obliczania macierzy $\exp(Rt)$. Po pierwsze, mimo że macierz R jest rzeczywista, będziemy ją traktować jako przekształcenie liniowe $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$. Na mocy twierdzenia Jordana istnieje nieosobliwe przekształcenie liniowe Q , takie że $Q^{-1}RQ = J$, gdzie J jest macierzą w **kanonicznej postaci klatkowej Jordana**

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_j \end{pmatrix}.$$

Każda z klatek J_i jest klatką diagonalną albo klatką postaci

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Przestrzeń \mathbb{C}^m rozpada się na sumę prostą przestrzeni H_i , które są przestrzeniami niezmienniczymi dla J , a macierz J ma w H_i wektor własny x_i , odpowiadający wartości własnej λ_i .

Wynika z tego, że

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_j t} \end{pmatrix}$$

i wystarczy skonstruować

$$e^{J_i t}.$$

Jeśli macierz J_i jest diagonalna, to ze wzoru (4.9) wynika, że

$$e^{Rt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_m t} \end{pmatrix}.$$

Jeśli J_i ma postać (4.10), to rozkładamy J_i na sumę

$$J_i = \lambda_i I_k + K_k,$$

gdzie k oznacza wymiar przestrzeni niezmienniczej H_i . Ponieważ macierze I_k i K_k są przemienne, to

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} I_k e^{K_k t}.$$

Wystarczy więc znaleźć $e^{K_k t}$. Pokażemy, że K_k jest macierzą nilpotentną. Ponieważ K_k ma postać

$$K_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

czyli K_k zawiera jedynki na pierwszej podprzekątnej, to jasne jest, że kolejne potęgi K_k zawierają jedynki na kolejnych podprzekątnych. W szczególności $(K_k)^k = 0$.

Stąd

$$e^{K_k t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \dots & \dots & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Korzystając z postaci $e^{K_k t}$ możemy zbudować $\exp(J_i t)$, a następnie $\exp(Jt)$. Aby przejść do $\exp(Rt)$ zauważmy, że

$$R^n = QJ^nQ^{-1},$$

gdzie przekształcenie Q sprowadza R do postaci Jordana. Korzystając z tej równości, otrzymujemy

$$\exp(Rt) = Q \exp(Jt) Q^{-1}.$$

Obliczanie macierzy $\exp(Rt)$ opisaną wyżej metodą wymaga znalezienia transformacji Q , co w ogólności nie jest prostym zadaniem. Dlatego też przedstawimy sposób konstrukcji macierzy fundamentalnej, oparty na fakcie, że spełnia ona równanie (4.7).

Istotą pomysłu jest poszukiwanie rozwiązań układu (4.7) jako funkcji $x(t) = e^{\lambda t} v$, gdzie v jest stałym wektorem. Podstawiając tę postać rozwiązania do równania (4.7) otrzymujemy

$$Rv = \lambda v,$$

czyli równanie problemu własnego dla macierzy R . Rozwiązanie tego problemu polega na znalezieniu wartości własnych (i wektorów własnych) macierzy R . Wartości własne są to pierwiastki wielomianu charakterystycznego

$$p(\lambda) = \det(R - \lambda I), \quad (4.11)$$

przy czym każdy pierwiastek wielomianu (4.11) jest wartością własną macierzy R i odpowiada mu pewien wektor własny. Nie ma jednak jednoznacznej odpowiedniości, bo pierwiastki mogą być wielokrotne, a odpowiadające im wartości własne mogą mieć mniejszą krotność, czyli mniejszą liczbę odpowiadających im wektorów własnych.

Przy rozwiązywaniu tego problemu możemy rozróżnić 3 przypadki.

A) Pierwiastki wielomianu charakterystycznego są jednokrotne i rzeczywiste. Mamy wtedy m pierwiastków: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ i m odpowiadających im wektorów własnych: v_1, v_2, \dots, v_m . Ponieważ wektory v_1, v_2, \dots, v_m są liniowo niezależne, więc funkcje

$$e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \dots, e^{\lambda_m t} v_m \quad (4.12)$$

tworzą bazę przestrzeni rozwiązań równania (4.7) i wyznaczają macierz fundamentalną $X(t)$.

B) Pierwiastki wielomianu charakterystycznego są jednokrotne, ale zawierają pierwiastki zespolone. Jeśli λ jest zespoloną wartością własną macierzy R a v odpowiadającym jej wektorem własnym, to funkcja

$$x(t) = e^{\lambda t} v$$

jest rozwiązaniem zespolonym równania (4.7). Ponieważ wielomian charakterystyczny ma współczynniki rzeczywiste, więc pierwiastki zespolone występują parami jako sprzężone liczby zespolone. Niech $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ będą taką parą wartości własnych. Niech $v_1 = u + iw$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_1 , gdzie u i w są wektorami rzeczywistymi. Wtedy wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_2 jest wektor $v_2 = u - iw$. Jeśli więc

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2,$$

to

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) = e^{\alpha t}(u \cos \beta t - w \sin \beta t), \\ z_2(t) &= \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t)) = e^{\alpha t}(w \cos \beta t + u \sin \beta t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami rzeczywistymi równania (4.7).

C) Pierwiastki wielomianu charakterystycznego są wielokrotne (ograniczmy się do pierwiastków rzeczywistych, wielokrotne pierwiastki zespolone rozwiązuje się podobnie wykorzystując fakty znane dla pojedynczych pierwiastków zespolonych). Niech więc λ_k będzie pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego o krotności n_k . λ_k jest wartością własną macierzy R . Załóżmy, że λ_k ma tylko ν_k niezależnych liniowo wektorów własnych ($\nu_k < n_k$). Z algebry liniowej wiadomo, że jeśli równanie

$$(R - \lambda_k I)v = 0$$

ma ν_k liniowo niezależnych rozwiązań, to równanie

$$(R - \lambda_k I)^2 v = 0$$

ma co najmniej $\nu_k + 1$ liniowo niezależnych rozwiązań, a równanie

$$(R - \lambda_k I)^{n_k - \nu_k + 1} v = 0$$

ma co najmniej n_k liniowo niezależnych rozwiązań.

W celu efektywnego znalezienia tych wektorów zauważmy, że dla dowolnego wektora v funkcja $\exp(Rt)v$ jest rozwiązaniem równania (4.7). Korzystając z definicji funkcji wykładniczej, otrzymujemy rozwinięcie

$$\exp(Rt)v = e^{\lambda t} \left(v + t(R - \lambda I)v + \frac{t^2}{2!}(R - \lambda I)^2 v + \dots \right). \quad (4.14)$$

Jeśli λ jest wartością własną macierzy R , a v odpowiadającym jej wektorem własnym, to

$$(R - \lambda I)v = 0$$

i z rozwinięcia (4.14) pozostaje tylko $e^{\lambda t}v$, która to funkcja, jak już wiemy, jest rozwiązaniem równania (4.7). Jeśli λ jest wielokrotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, ale ma niewystarczającą liczbę wektorów własnych, to możemy poszukiwać takich wektorów v , że

$$(R - \lambda I)v \neq 0,$$

ale

$$(R - \lambda I)^2 v = 0.$$

Wtedy w rozwinięciu (4.14) pozostają tylko dwa pierwsze wyrazy i funkcja

$$x(t) = e^{\lambda t}(I + t(R - \lambda I))v$$

będzie rozwiązaniem równania (4.7).

Można udowodnić, że wektory spełniające warunki

$$(R - \lambda I)v \neq 0, \quad (R - \lambda I)^2 v = 0$$

są liniowo niezależne od wektorów, które spełniają warunek

$$(R - \lambda I)v = 0.$$

Własność ta przenosi się indukcyjnie na wyższe potęgi $(R - \lambda I)$, co gwarantuje nam możliwość znalezienia wystarczającej liczby liniowo niezależnych rozwiązań równania (4.7).

Na koniec zauważamy, że aby z macierzy $X(t)$ otrzymać $\exp(Rt)$ należy przyjąć

$$\exp(Rt) = X(t)X^{-1}(0),$$

ponieważ macierz $\exp(Rt)$ w zerze jest macierzą identycznościową.

Poniższe przykłady ilustrują wszystkie 3 omawiane przypadki pierwiastków wielomianu charakterystycznego.

4.14 Przykład. Znajdziemy macierz fundamentalną układu

$$\dot{x} = Rx, \tag{4.15}$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Wartościami własnymi są: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Znajdziemy teraz wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym.

1) $\lambda_1 = 1$. Szukamy wektora, takiego że

$$(R - I)v_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Stąd

$$v_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i rozwiązaniem równania (4.15) jest funkcja (przyjmujemy $c = 1$)

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 2$. Szukamy wektora, takiego że

$$(R - 2I)v_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} v_2 = 0.$$

Stąd

$$v_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

i otrzymujemy rozwiązanie równania (4.15)

$$x_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Z rozwiązań $x_1(t)$ i $x_2(t)$ wyznaczamy macierz fundamentalną

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -e^t & -3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

4.15 Przykład. Znajdziemy macierz fundamentalną układu

$$\dot{x} = Rx,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i).$$

Wartościami własnymi są: $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$.

Poszukujemy wektora własnego dla λ_1

$$(R - (2 + i)I)v_1 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Wektor ten ma postać (pomijamy stałą)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ze wzorów (4.13) otrzymujemy wtedy

$$z_1(t) = e^{2t} \left(\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$$z_2(t) = e^{2t} \left(-\cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Z $z_1(t)$ i $z_2(t)$ otrzymujemy macierz fundamentalną

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t & e^{2t} \sin t \\ e^{2t} \sin t & -e^{2t} \cos t \end{pmatrix}.$$

4.16 Przykład. Znajdziemy macierz fundamentalną układu

$$\dot{x} = Rx,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 6 & -1 & -6 \\ -8 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny ma postać

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

1) $\lambda_1 = 2$. Jest to pierwiastek jednokrotny. Odpowiada mu wektor własny

$$(R - 2I)v_1 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & -6 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix} v_1 = 0, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że rozwiązanie równania (4.7) ma postać

$$x_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 1$. Jest to pierwiastek dwukrotny. Najpierw znajdujemy wektory własne

$$(R - I)v_2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & 3 & 8 \end{pmatrix} v_2 = 0.$$

Stąd otrzymujemy dwa związki na współrzędne wektora v_2 , czyli istnieje tylko jeden liniowo niezależny wektor własny

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że funkcja

$$x_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jest rozwiązaniem równania (4.7). Trzeciego liniowo niezależnego rozwiązania będziemy poszukiwać w postaci wektora v_3 , takiego że

$$(R - I)v_3 = v_2, \tag{4.16}$$

czyli

$$(R - I)v_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & 3 & 8 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Z rozwiązania tego równania otrzymujemy

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że rozwiązanie równania (4.16) gwarantuje nam, że $(R - I)v_3 \neq 0$ i $(R - I)^2 v_3 = 0$.

Po wstawieniu v_3 do (4.14) otrzymujemy

$$x_3(t) = e^t(v_3 + t(R - I)v_3) = e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}.$$

Macierz fundamentalna ma więc postać

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t & (t+1)e^t \\ -2e^{2t} & 0 & 3e^t \\ e^{2t} & e^t & te^t \end{pmatrix}.$$

4.17 Przykład. Znajdziemy macierz fundamentalną układu

$$\dot{x} = Rx,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny ma postać $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^3$. Mamy jeden pierwiastek potrójny $\lambda = 2$. Znajdujemy wektor własny, odpowiadający $\lambda = 2$

$$(R - 2I)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Stąd mamy dwa niezależne równania na współrzędne wektora v_1 . Czyli istnieje tylko jeden wektor własny

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Otrzymujemy zatem jedno rozwiązanie równania

$$x_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

W celu znalezienia dalszych rozwiązań liniowo niezależnych poszukujemy wektora v_2 , takiego że

$$(R - 2I)v_2 = v_1,$$

czyli

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie tej równości wyznacza jeden wektor liniowo niezależny od v_1

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i rozwiązanie równania różniczkowego

$$x_2(t) = e^{2t}(v_2 + t(R - 2I)v_2) = e^{2t}(v_2 + tv_1) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aby znaleźć trzecie rozwiązanie, poszukujemy wektora v_3 , takiego że

$$(R - 2I)v_3 = v_2,$$

czyli

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązaniem tego równania, liniowo niezależnym od v_1 i v_2 , jest

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} x_3(t) &= e^{2t} \left(v_3 + t(R - 2I)v_3 + \frac{t^2}{2}(R - 2I)^2 v_3 \right) = \\ &= e^{2t} \left(v_3 + tv_2 + \frac{t^2}{2}v_1 \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t + 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wobec tego otrzymujemy macierz fundamentalną

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & (t + 3)e^{2t} \\ 0 & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

4.3 Równania skalarne wyższego rzędu

Zajmiemy się teraz skalarnym równaniem liniowym rzędu m

$$x^{(m)} + p_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \dots + p_1(t)\dot{x} + p_0(t)x = q(t). \quad (4.17)$$

Zagadnienie początkowe dla tego równania polega na zadaniu w chwili t_0 wartości funkcji x oraz jej pochodnych do rzędu $m - 1$

$$x(t_0) = x_0^0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1^0, \quad \dots, \quad x^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1}^0. \quad (4.18)$$

Równanie (4.17) z warunkami (4.18) można sprowadzić do zagadnienia początkowego dla układu pierwszego rzędu definiując nowe zmienne

$$x_k = x^{(k)}.$$

Równanie (4.17) zamienia się wtedy w układ

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_1, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{m-2} &= x_{m-1}, \\ \dot{x}_{m-1} &= -p_{m-1}(t)x_{m-1} - \dots - p_0(t)x_0 + q(t), \end{aligned} \quad (4.19)$$

a warunki (4.18) stają się warunkami dla układu

$$x_k(t_0) = x_k^0. \quad (4.20)$$

Otrzymuje się wtedy zagadnienie początkowe dla układu równań liniowych rozpatrywane w pierwszym podrozdziale tego rozdziału.

Okazuje się, że przy rozpatrywaniu równań o stałych współczynnikach można postępowanie znane dla ogólnych układów pierwszego rzędu znacznie uprościć. Niech będzie dane równanie jednorodne rzędu m o stałych współczynnikach

$$x^{(m)} + a_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = 0. \quad (4.21)$$

Równanie to sprowadza się do układu pierwszego rzędu

$$\dot{X} = RX,$$

gdzie

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(m-1)} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy R ma postać

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - R) = \lambda^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i \lambda^i. \quad (4.22)$$

4.18 TWIERDZENIE. *Jeśli λ_0 jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego (4.22), $1 \leq k \leq m$, to funkcje $e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (4.21).*

Dowód. Jeśli λ_0 jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu $p(\lambda)$, to

$$p(\lambda_0) = \frac{dp}{d\lambda}(\lambda_0) = \dots = \frac{d^{k-1}p}{d\lambda^{k-1}}(\lambda_0) = 0.$$

Niech

$$L(x) \equiv x^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^{(i)}.$$

Operator ten ma następującą własność

$$L(e^{\lambda t}) = p(\lambda)e^{\lambda t}.$$

Aby udowodnić powyższą równość zadziałajmy operatorem L na funkcje $t^i e^{\lambda t}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$,

$$L(t^i e^{\lambda t}) = L\left(\frac{\partial^i e^{\lambda t}}{\partial \lambda^i}\right) = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} L(e^{\lambda t}) = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} (p(\lambda)e^{\lambda t}). \quad (4.23)$$

Stosując wzór Leibniza do ostatniego wyrażenia w (4.23), otrzymujemy sumę wyrazów postaci

$$-t^{i-j} \frac{\partial^j p}{\partial \lambda^j}(\lambda) e^{\lambda t}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, i.$$

Ponieważ dla $j \leq k-1$

$$\frac{\partial^j p}{\partial \lambda^j}(\lambda_0) = 0,$$

więc

$$L(t^i e^{\lambda_0 t}) = 0.$$

Funkcje $t^i e^{\lambda_0 t}$ są zatem rozwiązaniami równania (4.21). Liniowa niezależność tych funkcji wynika z liniowej niezależności wielomianów różnych stopni. ■

4.19 Przykład. Znajdziemy rozwiązanie ogólne równania

$$x^{(3)} - 5\ddot{x} + 6\dot{x} = 0.$$

Obliczamy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Ponieważ pierwiastkami tego wielomianu są liczby $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 3$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}.$$

4.20 Przykład. **Wahadłem matematycznym** nazywamy punkt materialny o masie m , zawieszony na długiej, cienkiej i nierozciągliwej nici. Wykonuje on wahania wokół najniższej położonego punktu O , zwanego środkiem wahań.

Założmy, że wahadło wykonuje tylko małe wahania i oznaczmy przez z odchylenie od środka wahań. Aby znaleźć przyspieszenie a wahadła, zauważmy, że

siła działająca na punkt materialny o masie m jest dana przez składową siły ciężenia, styczną do toru wahań (składowa prostopadła do niej jest równoważona przez sprężystość nici, na której wisi wahadło). Wtedy

$$ma = -mg \sin x,$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, x – kątem odchylenia wahadła od pionu, a znak minus przed prawą stroną równania występuje na skutek przeciwnych kierunków wychylenia i działającej siły. Jeśli przyspieszenie wahadła wyrazimy przez drugą pochodną odchylenia z , to otrzymamy

$$m\ddot{z} = -mg \sin x.$$

Zauważmy, że jeśli z mierzymy wzdłuż łuku, po którym porusza się punkt materialny, to

$$z = xl,$$

gdzie l jest długością wahadła. Ostatecznie otrzymamy równanie wahadła

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin x.$$

Jeśli interesujemy się tylko małymi drganiami wahadła, to z dobrym przybliżeniem można przyjąć

$$\sin x \approx x.$$

Małe drgania wahadła dają się więc opisać równaniem

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.24)$$

gdzie $\omega_0^2 = g/l$.

W przybliżeniu małych odchyłeń ruch wahadła jest dobrym modelem dla **oscylatora harmonicznego** z jednym stopniem swobody. Równanie (4.24) jest równaniem takiego oscylatora. Opisuje ono układ mechaniczny, w którym ruch masy na prostej (w naszym przypadku masy jednostkowej) odbywa się pod wpływem siły, która jest proporcjonalna do wychylenia od położenia równowagi (tym położeniem jest punkt $x = 0$).

Ponieważ wielomian charakterystyczny dla równania (4.24) ma pierwiastki $\lambda_1 = i$ i $\lambda_2 = -i$, więc z tw. 4.18 wynika rozwiązanie ogólne

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

Przekształćmy to rozwiązanie do innej postaci, korzystając z nowych stałych dowolnych

$$c_1 = A \cos \delta, \quad c_2 = A \sin \delta.$$

Wtedy

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \delta). \quad (4.25)$$

Wzór (4.25) opisuje swobodne drgania o amplitudzie A z częstotliwością ω_0 i przesunięciem fazowym δ .

Podając warunki początkowe dla równania (4.24)

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1,$$

ustalamy wartość amplitudy A oraz przesunięcia fazowego δ .

4.21 Przykład. W poprzednim przykładzie rozpatrywaliśmy **drgania swobodne oscylatora harmonicznego**. Przeanalizujemy teraz przypadek, gdy ruch masy na prostej napotyka pewien opór, np. opór tarcia. Zakładamy, że siła oporu jest proporcjonalna do prędkości ruchu (taką własność ma siła tarcia). Takie drgania nazywają się **drganiami tłumionymi** (wyjaśnienie tej nazwy pojawi się na końcu przykładu). Wtedy równanie (4.24) zamienia się w równanie

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.26)$$

gdzie $2k$ jest współczynnikiem proporcjonalności.

Analizę równania (4.26) rozpoczniemy od znalezienia pierwiastków wielomianu charakterystycznego

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Wyrażają się one wzorami

$$\lambda_1 = -k + \sqrt{k^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -k - \sqrt{k^2 - \omega_0^2}.$$

Charakter rozwiązania zależy od znaku wyrażenia $k^2 - \omega_0^2$.

a) $k^2 - \omega_0^2 > 0$. Oba pierwiastki są rzeczywiste i ujemne. Rozwiązanie

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

jest zbieżne monotonicznie do zera.

b) $k^2 - \omega_0^2 = 0$. Mamy wówczas podwójny pierwiastek rzeczywisty. Rozwiązanie ma postać

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-kt}.$$

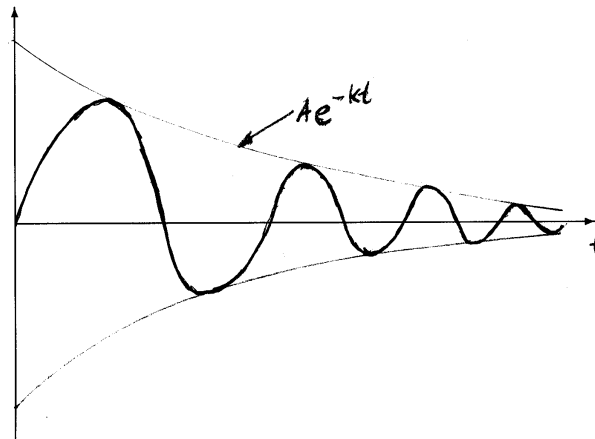
Rozwiązanie to osiąga ekstremum w punkcie

$$t = \frac{c_2 - kc_1}{kc_2},$$

a następnie monotonicznie dąży do zera.

c) $k^2 - \omega_0^2 < 0$. Pierwiastki wielomianu charakterystycznego są zespolone i rozwiązanie jest dane wzorem

$$x(t) = e^{-kt} (c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t),$$



Rysunek 4.1: Zanikające drgania tłumione

gdzie $\mu = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$.

Podobnie jak w przypadku drgań swobodnych, wprowadzamy nowe stałe dowolne

$$c_1 = A \cos \delta, \quad c_2 = A \sin \delta.$$

Możemy wtedy rozwiązanie zapisać w formie

$$x(t) = Ae^{-kt} \cos(\mu t - \delta).$$

Otrzymujemy więc rozwiązanie, które opisuje drgania z częstotliwością μ i przesunięciem fazowym δ , o monotonicznie malejącej amplitudzie Ae^{-kt} (rys. 4.1).

Widzimy więc, że jeśli ruch jest poddany dodatkowej sile oporu, to rozwiązanie wykładniczo maleje z czasem, przy czym wykładnik jest proporcjonalny do siły oporu. Oznacza to, że siła oporu tłumí swobodne drgania oscylatora harmonicznego na prostej. Jeśli tłumienie to jest duże ($k \geq \omega_0$), to wychylenie maleje (w zasadzie monotonicznie) do zera. Jeśli tłumienie jest małe ($k < \omega_0$), to otrzymujemy drgania o amplitudzie malejącej wykładniczo.

4.22 Przykład. Aby uzyskać niezanikające drgania oscylatora harmonicznego z tłumieniem, należy wprowadzić do równania wymuszenie zewnętrzne. Przeanalizujemy najciekawszy przypadek, tj. wymuszenia okresowego

$$B \cos \omega t.$$

Ponieważ znamy już rozwiązanie równania jednorodnego (4.26), więc wystarczy znaleźć szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega t. \quad (4.27)$$

Rozwiązania takiego poszukujemy w postaci

$$z(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Wstawiając $z(t)$ do równania (4.27) i porównując współczynniki przy $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ otrzymujemy

$$c_1 = -\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)B}{4k^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}, \quad c_2 = \frac{2k\omega B}{4k^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}.$$

Stąd

$$z(t) = \frac{B}{4k^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} ((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2k\omega \sin \omega t).$$

Wprowadzamy przesunięcie fazowe δ , takie że $\operatorname{tg} \delta = \frac{2k\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$. Wtedy

$$z(t) = \frac{B}{\sqrt{4k^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \cos(\omega t - \delta). \quad (4.28)$$

Rozwiązanie równania (4.27) ma więc postać

$$x(t) = x_0(t) + \frac{B}{\sqrt{4k^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \cos(\omega t - \delta),$$

gdzie $x_0(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego znalezionym w przykładzie 4.21 i jego postać zależy od relacji między k i ω_0 . Zauważmy, że we wszystkich przypadkach $x_0(t)$ dąży szybko do zera. Dla dużych wartości t rozwiązanie jest prawie dokładnie równe $z(t)$, co odpowiada drganiom z częstotliwością wymuszającą. Amplituda tych drgań jest przy tym największa, gdy $\omega_0^2 > 2k^2$, a częstotliwość wymuszająca jest równa

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2k^2}.$$

Warto zauważyć, że gdy $k \rightarrow 0$, amplituda drgań dąży do nieskończoności. Rozpatrzmy ten przypadek szczegółowo. Gdy znika mianownik we wzorze definiującym $z(t)$, odpowiada to sytuacji braku tłumienia ($k = 0$) i wymuszeniu o częstotliwości pokrywającej się z częstotliwością drgań własnych oscylatora nie-tłumionego ($\omega = \omega_0$). Równanie (4.27) przyjmuje wówczas postać

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega_0 t. \quad (4.29)$$

Rozwiązania szczególnego tego równania będziemy poszukiwać w postaci

$$z(t) = c_1 t \cos \omega_0 t + c_2 t \sin \omega_0 t.$$

Po wstawieniu tego wyrażenia do równania (4.29) znajdujemy

$$z(t) = \frac{Bt}{2\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Oznacza to, że rozwiązanie ogólne równania (4.29) jest dane wzorem

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{Bt}{2\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Składa się więc ono z dwóch drgań o tej samej częstotliwości ω_0 : jednego o stałej amplitudzie A i przesunięciu fazowym δ , drugiego o zerowym przesunięciu fazowym i amplitudzie rosnącej liniowo z czasem do nieskończoności. Zjawisko takie nazywa się **rezonansem**.

Przypadek braku tłumienia ($k = 0$), ale częstotliwości wymuszającej różnej od częstotliwości drgań własnych, jest szczególnym przypadkiem drgań z tłumieniem, a rozwiązanie takiego problemu składa się z sumy dwóch funkcji periodycznych o różnych częstotliwościach. Rezonans jest efektem dążenia różnicy tych częstotliwości do zera.

Rozdział 5

Układy autonomiczne

5.1 Stabilność w sensie Lapunowa

Przedmiotem analizy w tym rozdziale będą układy równań autonomicznych

$$\dot{x} = f(x), \quad (5.1)$$

z funkcją $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie Q jest otwartym zbiorem w \mathbb{R}^m , a f jest funkcją klasy C^1 .

Ograniczenie analizy do układów autonomicznych nie jest istotne, ponieważ w roz. 1 pokazaliśmy jak dowolne równanie nieautonomiczne

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (5.2)$$

można sprowadzić do postaci autonomicznej.

Analizę układu (5.1) rozpoczniemy od badania stabilności jego rozwiązań pod wpływem małych zmian warunków początkowych. Częściowej informacji dostarczą twierdzenia o ciągłej i gładkiej zależności rozwiązania od danych początkowych. Jednak uzyskane wyniki mają charakter lokalny, tzn. rozwiązanie zależy w sposób regularny w tym sensie, że jeśli dokonamy małego zaburzenia w chwili początkowej, to rozwiązanie zmieni się też mało dla czasu bliskiego chwili zaburzenia. Ta informacja nic nie mówi o zachowaniu się rozwiązania dla długiego czasu, jeśli dokonamy małego zaburzenia.

Zajmiemy się teraz odpowiedzią na pytanie, jakie warunki muszą być spełnione, aby małe zaburzenie danych początkowych powodowało małą zmianę rozwiązania nawet na długim odcinku czasu. Rozpoczniemy od definicji stabilności rozwiązania w sensie Lapunowa. Ponieważ definicja ta jest niemal identyczna dla układów autonomicznych i nieautonomicznych sformułujemy ją jednocześnie dla obu układów.

5.1 DEFINICJA. Niech dany będzie układ równań (5.1) z funkcją $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie Q jest otwartym zbiorem w \mathbb{R}^m , a f jest funkcją klasy C^1 (lub układ (5.2) z funkcją $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie Q jest otwartym zbiorem w \mathbb{R}^{m+1} , a f jest funkcją

klasy C^1). Niech $\bar{x}(t)$ będzie rozwiązaniem jednego z tych układów w przedziale $[0, +\infty)$. Mówimy, że rozwiązanie $\bar{x}(t)$ jest **stabilne w sensie Lapunowa** dla $t \rightarrow +\infty$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $t_0 \geq 0$ oraz $\eta > 0$, że każde rozwiązanie $x(t)$ równania (5.1) (odpowiednio równania (5.2)), takie że

$$|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| < \eta,$$

spełnia dla $t > t_0$ warunek

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon.$$

Jeśli dodatkowo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \bar{x}(t)| = 0,$$

to mówimy, że rozwiązanie $\bar{x}(t)$ równania (5.1) (równania (5.2)) jest **asymptotycznie stabilne**.

5.2 Przykład. Rozważmy układ liniowy w \mathbb{R}^2

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Funkcja stała $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest rozwiązaniem tego równania. Zbadajmy stabilność tego rozwiązania. Z rozdziału 4 wiemy, że rozwiązania równania (5.3) mają postać

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\alpha t}(c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t), \\ x_2(t) &= e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t - c_2 \sin \beta t). \end{aligned}$$

Jeśli $\alpha < 0$, to $|x_1(t)|$ i $|x_2(t)|$ są dowolnie bliskie zeru dla dostatecznie dużych t . Wynika stąd, że $\bar{x}(t)$ jest asymptotycznie stabilnym położeniem równowagi dla $\alpha < 0$. Jeśli $\alpha > 0$, to $|x_1(t)|$ i $|x_2(t)|$ oscylują z amplitudą rosnącą jak $e^{\alpha t}$, więc $\bar{x}(t)$ nie jest rozwiązaniem stabilnym.

W przykładzie 5.2 pokazaliśmy sposób badania stabilności skuteczny tylko wtedy, gdy potrafimy znaleźć rozwiązanie równania. Obecnie podamy sposób badania stabilności rozwiązania bez konieczności jego znajdowania. Najpierw zajmijmy się przypadkiem równań autonomicznych.

Rozważmy równanie (5.1) z funkcją f określoną na zbiorze Q , zawierającym początek układu współrzędnych oraz spełniającą warunek $f(0) = 0$.

5.3 DEFINICJA. *Funkcją Lapunowa dla równania (5.1) nazywamy funkcję $V(x)$ klasy C^1 w Q ($V: Q \rightarrow \mathbb{R}$), spełniającą warunki:*

- 1) $V(x) \geq 0$,
- 2) $V(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,

3) jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (5.1), to funkcja złożona $V(x(t))$ jest nierosnącą funkcją zmiennej t czyli

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \text{grad } V \cdot f \leq 0.$$

5.4 TWIERDZENIE. Niech f będzie odwzorowaniem określonym na zbiorze otwartym Q , zawierającym początek układu współrzędnych. Zakładamy, że f jest klasy C^1 oraz spełnia warunek $f(0) = 0$. Jeśli dla równania (5.1) z odwzorowaniem f istnieje funkcja Lapunowa, to rozwiązanie $\bar{x}(t) \equiv 0$ równania (5.1) jest stabilne. Jeśli dodatkowo

$$\text{grad } V \cdot f < 0 \quad (5.4)$$

dla $x \in Q \setminus \{0\}$, to rozwiązanie $\bar{x}(t) \equiv 0$ jest asymptotycznie stabilne.

Dowód. Udowodnimy najpierw stabilność rozwiązania $\bar{x}(t) \equiv 0$. Rozważmy kule $B(\varepsilon)$ o środkach w zerze i promieniach $\varepsilon < \varepsilon_0$ oraz brzegi tych kul, czyli sfery $S(\varepsilon)$. Niech ε_0 będzie taki, że $B(\varepsilon_0) \subset Q$. Niech $\delta = \min_{x \in S(\varepsilon)} V(x)$. Z własności 2) definicji 5.3 wynika, że $\delta > 0$.

Niech $U = \{x \in B(\varepsilon) : V(x) < \delta\}$. Z własności 3) definicji 5.3 wynika, że rozwiązanie zaczynające się w punkcie $x_0 \in U$ nie osiągnie brzegu $S(\varepsilon)$. Ponieważ wzdłuż krzywej całkowitej funkcja Lapunowa nie rośnie, więc biorąc x_0 , takie że $V(x_0) < \delta$, otrzymamy dla $x(t)$ będącego rozwiązaniem z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$ oszacowanie $V(x(t)) < \delta$, dla każdego $t > 0$. Dowodzi to stabilności rozwiązania $\bar{x}(t) = 0$.

W celu udowodnienia asymptotycznej stabilności tego rozwiązania wystarczy wykazać, że przy wzmocnionych założeniach, jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem, to

$$V(x(t)) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } t \rightarrow +\infty. \quad (5.5)$$

Aby udowodnić prawdziwość (5.5) założmy, że istnieje rozwiązanie $y(t)$, dla którego $V(y(t))$ nie dąży do zera. Ponieważ funkcja $V(y(t))$ jest monotoniczna, więc oznacza to, że $V(y(t)) > \alpha > 0$ dla $t > t_0$. Tym samym rozwiązanie $|y(t)| \geq \varepsilon_1$ dla pewnego $\varepsilon_1 > 0$ oraz $t > t_0$. Z warunku (5.4) wynika istnienie $m > 0$, takiego że

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) \leq -m < 0$$

na zewnątrz kuli $B(\varepsilon_1)$, tj. dla $t > t_0$. Stąd

$$V(y(t)) - V(y(t_0)) \leq -m(t - t_0),$$

czyli

$$V(y(t)) \leq V(y(t_0)) - m(t - t_0) \rightarrow -\infty \quad \text{dla } t \rightarrow +\infty.$$

Jest to sprzeczne z definicją funkcji Lapunowa i dowodzi, że $V(x(t)) \rightarrow 0$ dla wszystkich rozwiązań równania (5.1).

Z warunku (5.5) wynika zbieżność $x(t) \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow +\infty$. Gdyby tak nie było, to istniałoby rozwiązanie $y_1(t)$, takie że dla pewnego $\varepsilon_1 > 0$ i ciągu $\{t_n\}$ prawdziwe byłoby oszacowanie $\varepsilon_1 \leq |y_1(t_n)| \leq \varepsilon_0$. Z ciągu $\{y_1(t_n)\}$ można wybrać zbieżny podciąg $y_1(t_{n_k}) \rightarrow y_0$, gdzie $|y_0| \geq \varepsilon_1$. Stąd $V(y_0) \geq m_0 > 0$. Z ciągłości funkcji $V(y)$ wynika, że $V(y_1(t_{n_k}))$ jest bliskie $V(y_0)$. Dla dostatecznie dużych n_k będzie więc $V(y_1(t_{n_k})) > \frac{m_0}{2}$. Z monotoniczności funkcji V na krzywej całkowej $y_1(t)$ wynika, że ostatnia nierówność jest prawdziwa dla wszystkich dostatecznie dużych t . To jest jednak sprzeczne z (5.5). ■

W przypadku równań nieautonomicznych (5.2) należy dokonać pewnych modyfikacji definicji funkcji Lapunowa, aby twierdzenie analogiczne do tw. 5.4 było prawdziwe.

5.5 DEFINICJA. Funkcja $V(t, x)$ klasy C^1 na $Q = \{(t, x) : t \geq t_0, |x| \leq b\}$ nazywa się **funkcją Lapunowa** dla równania (5.2), jeśli:

- 1) $V(t, 0) = 0$ dla $t \geq t_0$,
- 2) istnieje funkcja ciągła $W(x)$ określona dla $|x| \leq b$, taka że:
 - a) $W(x) \geq 0$,
 - b) $W(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
 - c) $V(t, x) \geq W(x)$ dla $t \geq t_0$,
- 3) jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (5.2), to

$$\frac{d}{dt}V(t, x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t} + \text{grad}_x V \cdot f(t, x) \leq 0.$$

5.6 TWIERDZENIE. Niech funkcja $f(t, x)$ w równaniu (5.2) będzie ciągła na zbiorze $Q = \{(t, x) : t \geq t_0, |x| \leq b\}$ i spełnia warunek

$$f(t, 0) = 0 \quad \text{dla } t \geq t_0.$$

Jeśli dla równania (5.2) istnieje funkcja Lapunowa spełniająca warunki definicji 5.5, to rozwiązanie $\bar{x}(t) = 0$ jest stabilne. Jeśli dodatkowo istnieje funkcja $W_1(x)$ ciągła dla $|x| \leq b$, która spełnia warunki a) i b) definicji 5.5 oraz

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{grad}_x V \cdot f(t, x) \leq -W_1(x) \quad \text{dla } t \geq t_0,$$

to rozwiązanie $\bar{x}(t) = 0$ jest asymptotycznie stabilne.

Dowód tego twierdzenia przebiega analogicznie do dowodu tw. 5.4.

5.7 Przykład. Dla równania z przykładu 5.2 znajdziemy funkcję Lapunowa. Niech $V(x) = x_1^2 + x_2^2$. Funkcja ta spełnia warunki 1) i 2) definicji 5.3, należy jedynie sprawdzić warunek 3). Niech więc $x(t)$ będzie rozwiązaniem. Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= 2x_1(t)\dot{x}_1 + 2x_2(t)\dot{x}_2 = \\ &= 2x_1(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2x_2(-\beta x_1 + \alpha x_2) = 2\alpha(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Dla $\alpha < 0$ jest spełniony warunek 3) i funkcja $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ jest funkcją Lapunowa dla równania (5.3). Oznacza to, że $x(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem stabilnym. Co więcej, $\frac{dV}{dt} < 0$ dla niezerowych rozwiązań, więc są spełnione także warunki asymptotycznej stabilności, tzn. rozwiązanie $x(t) = 0$ jest asymptotycznie stabilne.

5.8 Przykład. Zbadamy stabilność położenia równowagi dla wahadła z tarciem, którego równanie ma postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 \sin x_1 - 2kx_2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Punkt $(0, 0)$ jest położeniem równowagi dla tego układu. (Oczywiście, położeniami równowagi są wszystkie punkty o współrzędnych $(n\pi, 0)$, ich analiza przebiega analogicznie). Aby zbadać stabilność rozwiązania $(0, 0)$, tworzymy funkcję Lapunowa

$$V(x_1, x_2) = \omega_0^2(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Ponieważ $\omega_0^2 > 0$, więc $V(x_1, x_2) \geq 0$ i $V(x_1, x_2) = 0$ tylko jeśli $x_1 = x_2 = 0$.

Mamy dalej

$$\frac{d}{dt}V(x_1, x_2) = \omega_0^2 x_2 \sin x_1 + x_2(-\omega_0^2 \sin x_1 - 2kx_2) = -2kx_2^2 \leq 0.$$

Wynika stąd, że punkt $(0, 0)$ jest punktem równowagi stabilnej. Zbadanie stabilności asymptotycznej wymaga dodatkowej analizy, bo $2kx_2^2$ zeruje się we wszystkich punktach $(x_1, 0)$. Pokażemy jednak, że jeśli taki punkt leży na krzywej całkowej, to jest to punkt przegięcia dla funkcji Lapunowa $V(x_1(t), x_2(t))$ i funkcja ta jest ściśle malejąca, czyli punkt $(0, 0)$ jest asymptotycznie stabilny. Rzeczywiście, jeśli $(x_1(t_1), 0)$ leży na krzywej całkowej i $x_1(t_0) \neq 0$ (ale jest w bliskim otoczeniu zera), to z (5.6) otrzymujemy $\dot{x}_2(t_1) \neq 0$. Stąd, na krzywej całkowej przechodzącej przez punkt $(x_1, 0)$, po obu stronach tego punktu mamy $x_2(t) \neq 0$ i funkcja Lapunowa jest ściśle malejąca dla $t \neq t_1$, czyli punkt $(x_1(t_1), 0)$ jest jej punktem przegięcia.

5.2 Potoki i orbity

Zajmiemy się teraz klasyfikacją zbiorów rozwiązań równań autonomicznych. W tym celu rozwiązania traktujemy jako trajektorie w odpowiedniej przestrzeni topologicznej, czyli pewne podzbiory tej przestrzeni.

Rozważmy ponownie równanie autonomiczne

$$\dot{x} = f(x), \quad (5.7)$$

którego prawa strona jest funkcją klasy C^1 w pewnym zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^m$. Z założenia tego wynika, że równanie (5.7) uzupełnione warunkiem początkowym

$$x(0) = p, \quad p \in Q, \quad (5.8)$$

ma jednoznaczne rozwiązanie w pewnym przedziale $(-a, a)$.

Następujący wniosek wynika bezpośrednio z tw. 3.1.

5.9 WNIOSK. Niech funkcja $\varphi(t; p)$, jako funkcja argumentu t , będzie rozwiązaniem zagadnienia początkowego (5.7) – (5.8), określonym w zbiorze otwartym $\Omega \subset (-a, a) \times Q$. Funkcja ta spełnia warunki:

- 1) $\varphi(0; p) = p$,
- 2) $\varphi(t; p)$ jest ciągła na Ω ,
- 3) $\varphi(t + \tau; p) = \varphi(t; \varphi(\tau; p))$ na Ω .

Rozważmy teraz przestrzeń fazową M równania (5.7) i niech $f(x)$ będzie funkcją klasy C^1 na M . Wtedy dla każdego warunku początkowego $p \in M$ mamy rozwiązanie $\varphi(t; p) \subset M$. Załóżmy w dalszym ciągu, że rozwiązanie $\varphi(t; p)$ może być przedłużone na całą prostą $(-\infty, \infty)$ z zachowaniem warunku $\varphi(t; p) \subset M$.

Z założeń na temat funkcji $f(x)$ oraz z tw. 3.15 wynika, że istnieje rodzina dyfeomorfizmów parametryzowana zmienną t

$$g^t: M \rightarrow M,$$

wyznaczona równością $g^t(p) = \varphi(t; p)$.

5.10 DEFINICJA. *Potokiem* nazywamy parę (M, g^t) , gdzie M jest przestrzenią fazową, a $g^t, t \in (-\infty, \infty)$, jest rodziną dyfeomorfizmów M , spełniającą warunki:

- 1) $g^t: M \rightarrow M$,
- 2) g^t oraz $(g^t)^{-1} \equiv g^{-t}$ są różniczkowalnymi przekształceniami M w M ,
- 3) $g^{t+s} = g^t g^s$.

Zauważmy, że dla rozwiązania równania różniczkowego warunki definicji są spełnione na podstawie tw. 3.15 (gładka zależność od danych początkowych) i wniosku 5.9.

5.11 DEFINICJA. *Trajektorią albo orbitą punktu* p w potoku (M, g^t) nazywamy zbiór wartości odwzorowania $g^t(p)$, $t \in (-\infty, \infty)$.

5.12 DEFINICJA. Punkt p o tej własności, że $f(p) = 0$ nazywa się **punktem krytycznym** albo **punktem osobliwym** potoku wyznaczonego przez równanie (5.7).

Łatwo zauważyć, że jeśli punkt p jest krytyczny, to jego orbita jest stała ($g^t(p) = p$). Stąd punkty takie często nazywa się też **punktami stacjonarnymi** (**położeniami równowagi**).

5.13 Przykład. Rozważmy równanie $\dot{x} = x$, gdzie $x = x(t) \in \mathbb{R}$. Orbita punktu p ma postać $\{e^t p\}$, $t \in (-\infty, \infty)$. Jeśli $p > 0$, to orbita ta jest półprostą $(0, \infty)$, jeśli $p < 0$, to półprostą $(-\infty, 0)$, a dla $p = 0$ orbita jest stałym punktem $\{0\}$. Oznacza to, że punkt $p = 0$ jest punktem krytycznym.

5.14 Przykład. Rozważmy układ równań

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2).\end{aligned}$$

Przez wprowadzenie współrzędnych biegunowych

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

powyższy układ można sprowadzić do postaci

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1.$$

Dla pierwszego równania można łatwo znaleźć rozwiązania. Mają one postać

$$\left\{ \frac{pe^t}{\sqrt{p^2 e^{2t} - p^2 + 1}} \right\},$$

czyli orbitami są: punkt $r = 0$, odcinek $(0, 1)$, punkt $r = 1$ i półprosta $(1, \infty)$. Jeśli dołączymy do tego zależność od kąta θ , to jako orbity w układzie zmiennych (x_1, x_2) będziemy mieli: punkt krytyczny $(0, 0)$, orbitę okresową $x_1^2 + x_2^2 = 1$ oraz orbity otwarte, które spiralnie od wewnątrz i od zewnątrz nawijają się na orbitę okresową.

Powyższe przykłady pokazują istotne zalety badania równań w przestrzeni fazowej. Badanie wielkiej liczby oddzielnych rozwiązań można ograniczyć do badania znacznie mniejszej liczby orbit.

5.15 TWIERDZENIE. Przez każdy punkt przestrzeni fazowej M przechodzi dokładnie jedna orbita.

Dowód. Niech $\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow M$ i $\varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow M$ będą dwoma rozwiązaniami równania (5.7) z różnymi warunkami początkowymi. Załóżmy, że wyznaczone przez te rozwiązania orbity mają punkt wspólny. Oznacza to, że istnieją takie t_1 i t_2 ,

że $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$. Rozważmy funkcję φ_2 i funkcję $\varphi_3 = T^{t_1-t_2}\varphi_1$, gdzie $T^s\varphi(t) = \varphi(t+s)$. Zauważmy, że jeśli $\varphi(t)$ jest rozwiązaniem równania (5.7), to $T^s\varphi(t)$ jest też rozwiązaniem tego równania. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} T^s \varphi(t) \right|_{t=t_0} &= \left. \frac{d\varphi(t+s)}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{t=t_0+s} = \\ &= f(\varphi(t_0+s)) = f(\varphi(t+s)) \Big|_{t=t_0} = f(T^s \varphi(t)) \Big|_{t=t_0}. \end{aligned}$$

Wynika z tego, że φ_3 jest rozwiązaniem równania (5.7). Ponieważ $\varphi_2(t_2) = \varphi_3(t_2)$, więc są to rozwiązania z tym samym warunkiem początkowym. Z jednoznaczności wynika, że $\varphi_2 = \varphi_3$. Tak więc φ_1 i φ_2 opisują tę samą orbitę i różnią się tylko parametryzacją tej orbity zmienną niezależną t .

Udowodniliśmy w ten sposób, że jeśli dwie orbity mają chociaż jeden punkt wspólny, to są identyczne. Dowodzi to jednoznaczności wyznaczenia orbity przechodzącej przez dany punkt przestrzeni fazowej. Fakt, że przez każdy punkt przestrzeni fazowej p przechodzi orbita, wynika z istnienia rozwiązania równania (5.7) z warunkiem $x(0) = p$. ■

Przejdziemy obecnie do klasyfikowania orbit układów autonomicznych. Okazuje się, że z topologicznego punktu widzenia jest bardzo mało orbit istotnie różnych (wszystkie przypadki są zilustrowane w przykładzie 5.14).

5.16 TWIERDZENIE. Niech będzie dany potok (M, g^t) , $t \in (-\infty, \infty)$, generowany przez równanie autonomiczne (5.7) z funkcją $f \in C^1(M)$. Orbity tego potoku dzielą się na trzy kategorie:

- 1) orbity otwarte, dyfeomorficzne z prostą rzeczywistą,
- 2) orbity zamknięte, dyfeomorficzne z okręgiem,
- 3) punkty krytyczne.

Dowód. Niech $\varphi_0(t)$, $t \in (-a, a)$, będzie rozwiązaniem równania (5.7), które nie jest typu 1), tj. niech spełnia warunek $\varphi_0(t_1) = \varphi_0(t_2)$ dla pewnych t_1 i t_2 ($t_2 > t_1$). Wtedy rozwiązanie to przedłuża się na całą prostą jako rozwiązanie okresowe $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ z okresem $T = t_2 - t_1$. Jeśli zdefiniujemy funkcję

$$\varphi(t) = \varphi_0(t_1 + \tau) \quad \text{dla } t = nT + \tau,$$

to funkcja ta jest rozwiązaniem równania (5.7) jako przesunięcie rozwiązania φ_0 (patrz dowód tw. 5.15). Funkcja ta jest okresowa, bo jeśli t jest postaci $nT + \tau$, to $t+T = (n+1)T + \tau$ i $\varphi(t) = \varphi(t+T)$. Pokażemy obecnie, że funkcja $\varphi(t)$ jest ciągła. Funkcja ta jest oczywiście kawałkami ciągła, a jedyne punkty mogące budzić wątpliwości to punkty nT , w których jest ona prawostronnie ciągła. Pokażemy, że w tych punktach jest także ciągła lewostronnie. Niech ciąg t_α będzie zbieżny lewostronnie do nT . Wtedy $\varphi(t_\alpha) = \varphi_0(t_1 + \tau_\alpha)$, gdzie ciąg τ_α dąży lewostronnie do T . Z ciągłości funkcji φ_0 wynika, że $\varphi_0(t_1 + \tau_\alpha) \rightarrow \varphi_0(t_1 + T) = \varphi_0(t_2) = \varphi_0(t_1) = \varphi(nT)$, co dowodzi lewostronnej ciągłości funkcji $\varphi(t)$.

Jeśli teraz T_1, T_2 są dwoma okresami funkcji φ , to $T_1 \pm T_2$ jest też okresem, bo $\varphi(t + T_1 \pm T_2) = \varphi(t + T_1) = \varphi(t)$. Niech K oznacza zbiór wszystkich okresów funkcji $\varphi(t)$. Są dwie możliwości. Pierwsza, kiedy zbiór K zawiera element najmniejszy $T_0 > 0$. Wtedy $\varphi(t + T_0) = \varphi(t)$ oraz $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, dla $0 \leq t_1 < t_2 < T_0$. Odpowiada to orbicie zamkniętej o okresie T_0 .

Druga możliwość, to brak najmniejszego elementu większego od zera w zbiorze K , czyli w zbiorze tym są okresy dowolnie małe. Pokażemy obecnie, że zbiór okresów jest domknięty. Niech $\{T_i\}$ będzie zbieżnym ciągiem okresów. Niech $T = \lim_{i \rightarrow \infty} T_i$. Z ciągłości funkcji $\varphi(t)$ mamy dla każdego t równość

$$\varphi(t + T) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t + T_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi(t).$$

Wynika stąd, że w drugim przypadku najmniejszy okres jest równy zero, czyli $\varphi(t) = \varphi(0)$ dla każdego t . To oznacza, że w tym przypadku zbiór K pokrywa się z całą prostą rzeczywistą \mathbb{R} a rozwiązanie $\varphi(t)$ jest punktem krytycznym. ■

5.3 Klasyfikacja punktów krytycznych układów liniowych na płaszczyźnie

Klasyfikację punktów krytycznych układów autonomicznych ograniczymy do badania dwuwymiarowych układów liniowych o stałych współczynnikach

$$\dot{x} = Ax \tag{5.9}$$

z macierzą

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Jak łatwo zauważyć, punkt $x = 0$ jest punktem krytycznym równania (5.9). Jeśli macierz A jest nieosobliwa ($\det A \neq 0$), to układ (5.9) nazywa się **prostym**.

Analizę zachowania się rozwiązań układu (5.9) w otoczeniu punktu krytycznego rozpoczniemy od przypadku układów prostych. W celu znalezienia rozwiązań rozpatrzmy wielomian charakterystyczny macierzy A

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0,$$

gdzie $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$ jest śladem macierzy A . Znajdujemy pierwiastki wielomianu charakterystycznego

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A + \sqrt{\Delta}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - \sqrt{\Delta}),$$

gdzie $\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A$. Znajomość pierwiastków wielomianu charakterystycznego pozwala znaleźć postać kanoniczną macierzy A .

Przypadek $\Delta > 0$. Macierz A ma wówczas dwie różne, rzeczywiste wartości własne, a odpowiadające im wektory własne tworzą kanoniczną bazę przestrzeni \mathbb{R}^2 . W tej bazie macierz A ma postać

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Równanie (5.17) sprowadza się wtedy do układu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2, \end{aligned}$$

którego rozwiązania dane są wzorami

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

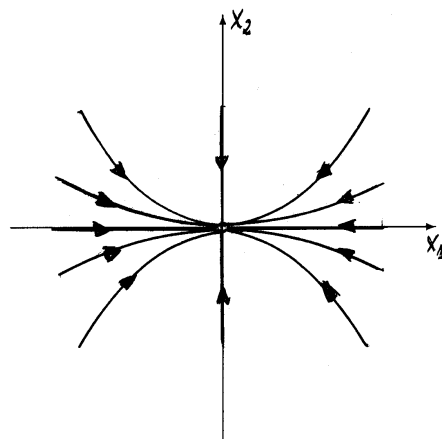
Przez proste przekształcenie otrzymujemy równanie orbit w przestrzeni fazowej \mathbb{R}^2

$$x_2 = c x_1^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

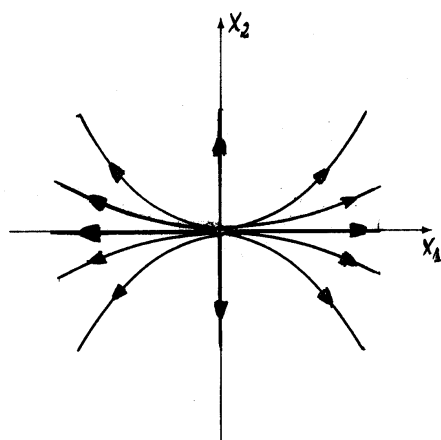
Obrazy orbit w otoczeniu punktu krytycznego $x = 0$ zależą istotnie od znaku pierwiastków λ_1 i λ_2 . Poniżej zilustrujemy wszystkie istotnie różne sytuacje.

Jeśli $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, to portret fazowy w otoczeniu punktu krytycznego jest przedstawiony na rys. 5.1. W takiej sytuacji punkt krytyczny $x = 0$ jest stabilny (rozwiązania dążą do niego, gdy $t \rightarrow \infty$). Punkt taki nazywa się **węzłem stabilnym** (przypadek $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ jest analogiczny).

Jeśli $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, to otrzymany portret fazowy ma analogiczny kształt orbit, a jedynie ewolucja na orbitach odbywa się w przeciwnym kierunku (rys. 5.2). Mamy wtedy do czynienia z **węzłem niestabilnym**.



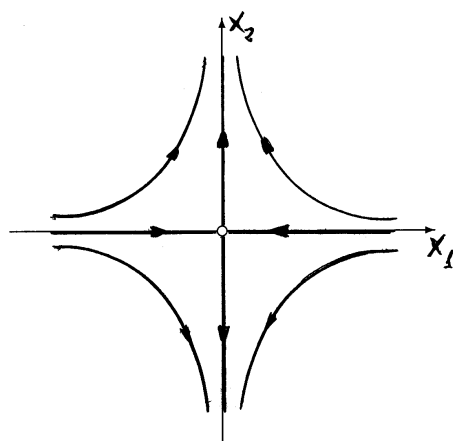
Rysunek 5.1: Węzeł stabilny



Rysunek 5.2: Węzeł niestabilny

Jeśli pierwiastki λ_1 i λ_2 mają przeciwne znaki, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, to otrzymujemy portret fazowy przedstawiony na rys. 5.3. Punkt krytyczny $x = 0$ nazywa się wtedy **siodłem**. Zwróćmy uwagę, że półosie współrzędnych także są orbitami, przy czym po osi Ox_1 ewolucja odbywa się do punktu krytycznego, a po osi Ox_2 od punktu krytycznego. Już z tej obserwacji wynika, że siodło nie jest punktem stabilnym.

Przypadek $\Delta=0$. Macierz A ma wówczas podwójny pierwiastek wielomianu charakterystycznego λ_0 . Jeśli wartości własnej λ_0 odpowiadają dwa liniowo niezależ-

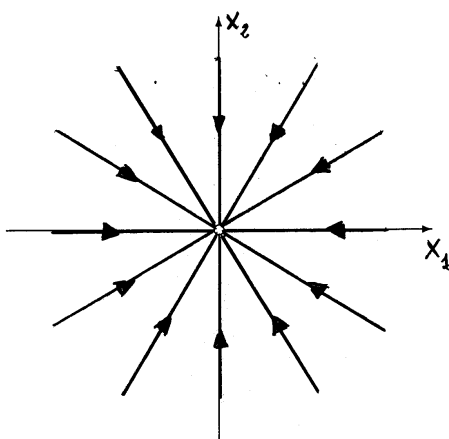


Rysunek 5.3: Siodło

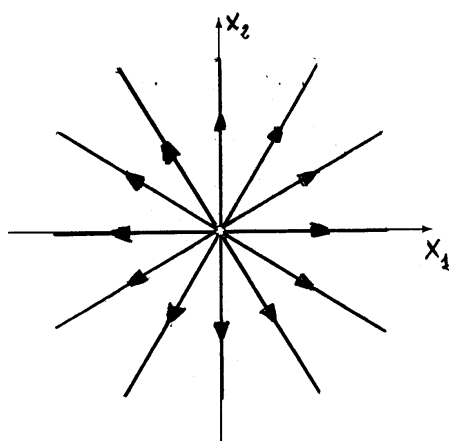
ne wektory własne, to macierz A ma postać kanoniczną

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Punkt $x = 0$ nazywa się wtedy **węzłem gwiaździstym**. Jeśli $\lambda_0 < 0$, to otrzymujemy węzeł gwiaździsty stabilny (rys. 5.4), jeśli $\lambda_0 > 0$, to mamy węzeł gwiaździsty niestabilny (rys. 5.5).



Rysunek 5.4: Węzeł gwiaździsty stabilny



Rysunek 5.5: Węzeł gwiaździsty niestabilny

Jeśli macierz A ma tylko jeden wektor własny odpowiadający wartości własnej λ_0 , to cała przestrzeń \mathbb{R}^2 jest przestrzenią niezmienniczą macierzy A , a jej postacią

kanoniczną jest klatka Jordana

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

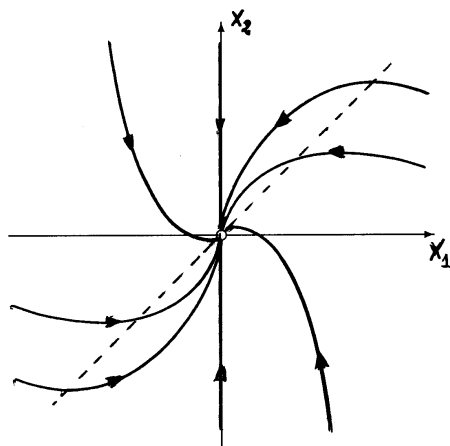
Równanie (5.9) ma wtedy postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_0 x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \lambda_0 x_2. \end{aligned}$$

Stąd

$$x_1 = c_1 e^{\lambda_0 t}, \quad x_2 = (c_2 + c_1 t) e^{\lambda_0 t}.$$

W takiej sytuacji punkt $x = 0$ nazywa się **węzłem zdegenerowanym**. Dla $\lambda_0 < 0$ jest to węzeł stabilny (rys. 5.6). Dla $\lambda_0 > 0$ otrzymujemy węzeł zdegenerowany niestabilny (rys. 5.7).



Rysunek 5.6: Węzeł zdegenerowany stabilny

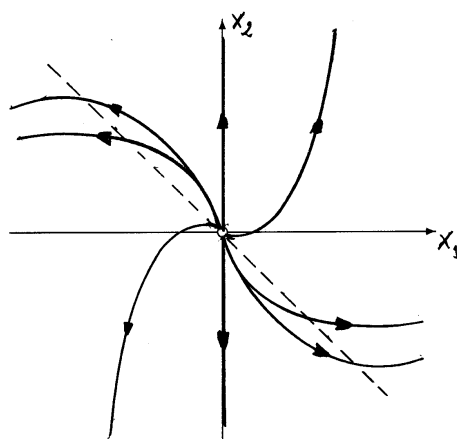
Aby mieć lepsze wyobrażenie o kształcie orbit w otoczeniu węzła zdegenerowanego, rozpatrzmy punkty, w których orbity osiągają wartość ekstremalną względem zmiennej x_2 . W takich punktach $\dot{x}_2 = 0$, czyli $x_1 = -\lambda_0 x_2$ (proste o tym równaniu zaznaczyliśmy linią przerywaną na odpowiednich rysunkach).

Przypadek $\Delta < 0$. Mamy wówczas dwa sprzężone pierwiastki zespolone λ_0 i $\bar{\lambda}_0$. W zmiennych rzeczywistych macierz A ma postać kanoniczną

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta > 0.$$

Równanie (5.9) sprowadza się do układu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - \beta x_2, \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 + \alpha x_2. \end{aligned}$$



Rysunek 5.7: Węzeł zdegenerowany niestabilny

Po przejściu do współrzędnych biegunowych

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = \alpha r \cos \theta - \beta r \sin \theta, \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = \beta r \cos \theta + \alpha r \sin \theta. \end{aligned}$$

Mnożymy te równania przez $\cos \theta$ i $\sin \theta$, a następnie dodajemy i odejmujemy je stronami, skąd otrzymujemy

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = \beta.$$

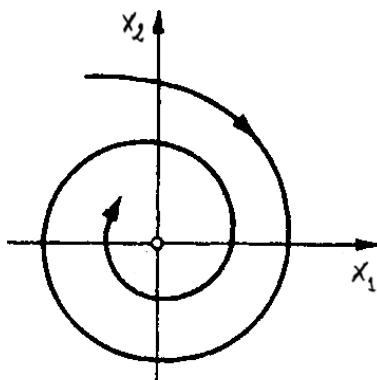
Rozwiązanie ma więc postać

$$r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta = \theta_0 + \beta t.$$

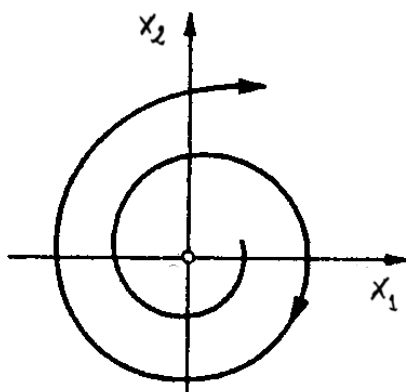
Jeśli $\alpha < 0$, to otrzymujemy portret fazowy, na którym orbity są spiralami zwijającymi się do punktu $x = 0$. Punkt ten nazywa się **ogniskiem stabilnym** (rys. 5.8). Jeśli $\alpha > 0$, to otrzymujemy **ognisko niestabilne**, dla którego spirale wychodzą z punktu $x = 0$ (rys. 5.9).

Dla $\alpha = 0$ orbity są koncentrycznymi okręgami (rys. 5.10). Punkt $x = 0$ nazywa się wtedy **środkiem**. Środek jest oczywiście punktem stabilnym, ale nie jest on asymptotycznie stabilny – w przeciwieństwie do wszystkich poprzednich przypadków, gdzie stabilność była jednocześnie asymptotyczną stabilnością.

Obecnie rozpatrzmy sytuację, kiedy układ (5.9) **nie jest układem prostym**. Wtedy $\det A = 0$ i przynajmniej jedna z wartości własnych macierzy A jest równa



Rysunek 5.8: Ognisko stabilne



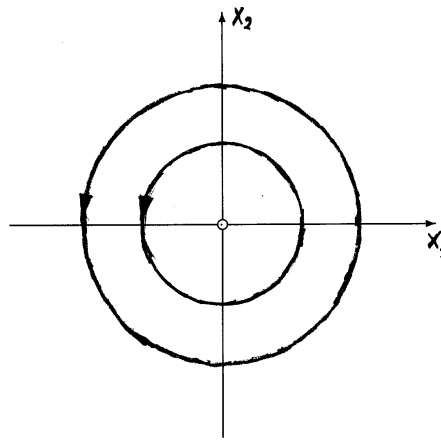
Rysunek 5.9: Ognisko niestabilne

zeru. Możliwe są wtedy dwa przypadki zależne od rzędu macierzy A : $\text{rz } A = 0$, czyli macierz jest zerowa i każdy punkt płaszczyzny jest krytyczny oraz $\text{rz } A = 1$. Pierwszy z tych przypadków jest nieciekawy. W drugim przypadku, tzn. kiedy $\text{rz } A = 1$, istnieje cała prosta (przechodząca przez punkt $x = 0$) złożona z punktów krytycznych.

Jeśli $\Delta > 0$, to macierz A ma dwie wartości własne $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2 = 0$ oraz postać kanoniczną

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dla $\lambda_1 < 0$ otrzymujemy portret fazowy, na którym wszystkie punkty osi Ox_2 są punktami krytycznymi i wszystkie są stabilne, ale nie asymptotycznie stabilne (rys. 5.11). Dla $\lambda_1 > 0$ portret fazowy jest analogiczny, tylko punkty krytyczne są



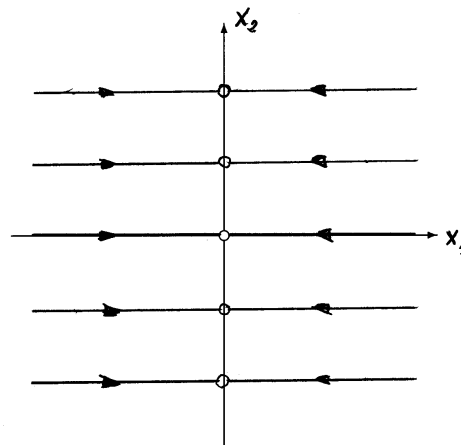
Rysunek 5.10: Środek

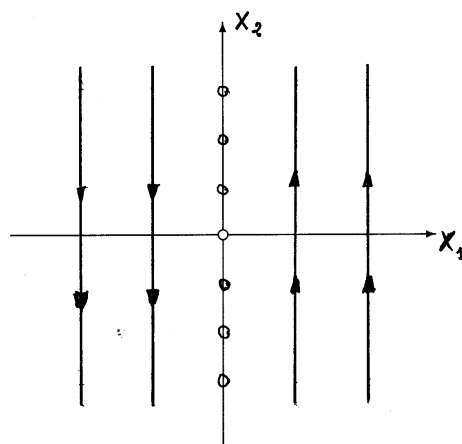
niestabilne.

Jeśli $\Delta = 0$, to zero jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego i macierz A ma formę kanoniczną

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Otrzymujemy wtedy portret fazowy, na którym cała oś Ox_2 jest złożona z punktów krytycznych (rys. 5.12).

Rysunek 5.11: Portret fazowy dla układu nieprostego, $\Delta > 0$

Rysunek 5.12: Portret fazowy dla układu nieprostego, $\Delta = 0$

Aby rozpatrywać portret fazowy w układzie współrzędnych, w którym zostało napisane równanie (5.9), musimy przypomnieć, że dla macierzy A istnieje przekształcenie nieosobliwe Q , takie że $Q^{-1}AQ$ jest macierzą w postaci kanonicznej. Przekształcenie Q przeprowadza przy tym bazę kanoniczną na bazę przestrzeni wyjściowej. Znaczący to, że jeśli jest dane równanie

$$\dot{x} = Ax,$$

które w bazie kanonicznej przyjmuje postać

$$\dot{y} = Jy,$$

gdzie J jest formą kanoniczną macierzy A , to

$$x = Qy.$$

Kolumny macierzy przekształcenia Q są zbudowane z wektorów bazy kanonicznej, wyrażonych we współrzędnych zmiennej x . Aby je znaleźć, należy skorzystać z metod opisanych w roz. 4.

5.17 Przykład. Znajdziemy portret fazowy układu

$$\dot{x} = Ax,$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

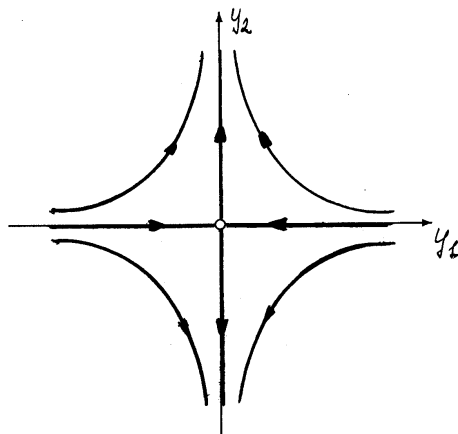
Wielomian charakterystyczny ma postać

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 25.$$

Pierwiastkami tego wielomianu są $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 5$. Odpowiadają im wektory własne

$$v_1 = [2, 1], \quad v_2 = [1, 3].$$

Ponieważ $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, więc punkt $x = 0$ jest siodłem. Portret fazowy w zmiennych kanonicznych $y_1 y_2$ jest pokazany na rys. 5.13.

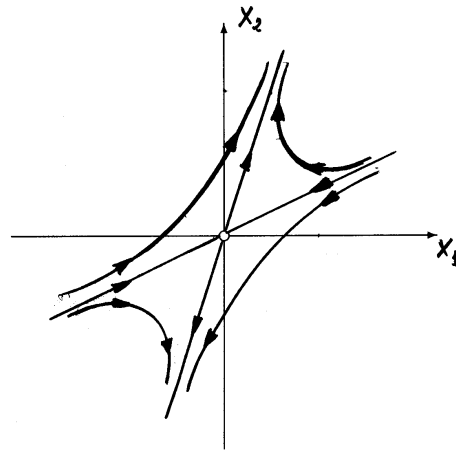


Rysunek 5.13: Portret fazowy w zmiennych kanonicznych dla układu z przykładu 5.17

W zmiennych wyjściowych oś Oy_1 przechodzi na oś o kierunku wektora v_1 , a oś Oy_2 na oś o kierunku wektora v_2 . W zmiennych x portret fazowy jest pokazany na rys. 5.14.

Obecnie podsumujemy nasze badania portretów fazowych układów liniowych w \mathbb{R}^2 . W analizie portretów fazowych na płaszczyźnie występują trzy istotnie różne sytuacje:

- 1) Pierwiastki są rzeczywiste i odpowiadają im dwa liniowo niezależne wektory własne. W tym przypadku układ równań (5.9) separuje się na dwa układy jednowymiarowe.
- 2) Pierwiastki są zespolone, sprzężone. Gdyby równanie (5.9) rozpatrywać w przestrzeni zespolonej, wówczas przypadek ten nie różniłby się od przypadku 1). Rozpatrując go w przestrzeni rzeczywistej, musimy przejść do współrzędnych biegunowych, w których układ (5.9) separuje się na dwa układy jednowymiarowe.
- 3) Pierwiastek jest podwójny, rzeczywisty, ale odpowiada mu tylko jeden wektor własny. W tym przypadku układ się nie separuje, a przestrzenią niezmienniczą jest całe \mathbb{R}^2 .



Rysunek 5.14: Portret fazowy w zmiennych wyjściowych dla układu z przykładu 5.17

Przedstawiona wyżej klasyfikacja została dokonana ze względu na postać kanoniczną macierzy A . Przypadek 1) odpowiada macierzy kanonicznej w postaci diagonalnej. Przypadek 2) odpowiada macierzy diagonalnej w przestrzeni zespolonej i macierzy postaci $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, w przestrzeni rzeczywistej. Wreszcie przypadek 3) odpowiada niediagonalnej klatce Jordana $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

5.4 Punkty krytyczne układów nieliniowych

Będziemy teraz starali się pokazać, w jakim stopniu prowadzone poprzednio badania portretów fazowych układów liniowych o stałych współczynnikach mogą być przydatne do badania portretów fazowych dowolnych układów autonomicznych.

5.18 DEFINICJA. Niech będą dane dwa potoki (M, g_1^t) i (M, g_2^t) z tą samą przestrzenią fazową. Mówimy, że potoki te są **topologicznie sprzężone**, jeśli istnieje taki homeomorfizm przestrzeni fazowej $h: M \rightarrow M$, że $h \circ g_1^t = g_2^t \circ h$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Aby nieco lepiej zrozumieć sens sprzężenia dwóch potoków, zatrzymajmy się jeszcze przy układach liniowych o stałych współczynnikach.

5.19 DEFINICJA. Niech w przestrzeni \mathbb{R}^m będzie dane równanie

$$\dot{x} = Ax$$

z macierzą A o stałych współczynnikach. Niech (\mathbb{R}^m, e^{tA}) będzie potokiem generowanym przez to równanie. Mówimy, że potok ten jest **hiperboliczny**, jeśli wszystkie wartości własne macierzy A mają niezerowe części rzeczywiste.

Przytoczymy obecnie bez dowodu twierdzenie o topologicznym sprzężeniu układów liniowych.

5.20 TWIERDZENIE. *Niech będą dane dwa potoki hiperboliczne (M, e^{tA_1}) oraz (M, e^{tA_2}) . Potoki te są topologicznie sprzężone, jeśli liczby wartości własnych z dodatnią i ujemną częścią rzeczywistą są takie same dla macierzy A_1 i A_2 .*

Z twierdzenia 5.20 wynika, że punkty krytyczne w \mathbb{R}^2 prostych układów liniowych o stałych współczynnikach rozpadają się na nierównoważne topologicznie klasy:

- 1) punkty krytyczne niestabilne (węzły i ogniska niestabilne),
- 2) siodła,
- 3) punkty krytyczne stabilne (węzły i ogniska stabilne),
- 4) punkty odpowiadające potokom niehiperbolicznym (środki).

Przejdziemy teraz do badania punktów krytycznych układów nieliniowych. Aby porównać portrety fazowe takich układów z portretami fazowymi układów liniowych, musimy przeprowadzić linearyzację.

5.21 DEFINICJA. *Niech będzie dany układ autonomiczny*

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.10}$$

*i niech $x = 0$ będzie jego punktem krytycznym. **Linearyzacją układu** (5.10) w otoczeniu punktu $x = 0$ nazywamy układ liniowy o stałych współczynnikach*

$$\dot{x} = Ax, \tag{5.11}$$

taki że układ (5.10) można zapisać w postaci

$$\dot{x} = Ax + g(x),$$

gdzie $g(x)$ jest funkcją ciągłą, która spełnia warunek

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = 0.$$

Może się zdarzyć, że punkt $x = 0$ nie jest punktem krytycznym układu (5.10), tzn. $f(0) \neq 0$, ale istnieje punkt x_0 , taki że $f(x_0) = 0$. Wtedy punktem krytycznym jest punkt x_0 i linearyzację należy przeprowadzić wokół tego punktu, tzn. przedstawić układ (5.10) w postaci

$$\dot{x} = A(x - x_0) + g(x),$$

gdzie $g(x)$ jest ciągła i spełnia warunek

$$\lim_{|x-x_0| \rightarrow 0} \frac{|g(x)|}{|x-x_0|} = 0.$$

Z twierdzenia 5.20 można się domyślić, że układy nieliniowe dają się porównywać z układami liniowymi tylko wtedy, gdy odpowiednie potoki liniowe są hiperboliczne.

5.22 DEFINICJA. Punkt krytyczny układu autonomicznego (5.10) nazywa się **prostym**, jeśli otrzymany po linearyzacji układ jest prosty ($\det A \neq 0$). Punkt krytyczny nazywa się **hiperbolicznym**, jeśli otrzymany po linearyzacji układ generuje potok hiperboliczny.

5.23 TWIERDZENIE. (Grobmana-Hartmana) Jeśli $x = 0$ jest punktem hiperbolicznym układu

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad (5.12)$$

gdzie $g(x)$ jest klasy C^1 w otoczeniu zera, $g(0) = 0$ oraz

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = 0,$$

to portret fazowy układu (5.12) jest w otoczeniu punktu $x = 0$ homeomorficzny z portretem fazowym układu zlinearyzowanego

$$\dot{x} = Ax.$$

Następujący przykład jest klasyczną ilustracją tego, co może się dzieć wokół punktu niehiperbolicznego.

5.24 Przykład. Zbadajmy portrety fazowe układów

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{aligned} \quad (5.13)$$

oraz

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Oba układy mają taką samą linearyzację wokół punktu $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1. \end{aligned}$$

Dla równania zlinearyzowanego początek układu współrzędnych jest środkiem, czyli punktem niehiperbolicznym. Natomiast po przejściu do współrzędnych biegunowych dla układu (5.13) otrzymujemy

$$\dot{r} = r^3, \quad \dot{\varphi} = 1,$$

czyli początek układu współrzędnych jest ogniskiem niestabilnym. Dla układu (5.14) mamy

$$\dot{r} = -r^3, \quad \dot{\varphi} = 1,$$

czyli początek układu współrzędnych jest ogniskiem stabilnym.

5.25 Przykład. W przykładzie tym pokażemy, że wzmocnienie tezy w tw. 5.23 nie jest możliwe. Rozważmy układ

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + \frac{x_2}{\ln(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + \frac{x_1}{\ln(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}.\end{aligned}$$

Należy sklasyfikować punkt krytyczny $x = (0, 0)$.

Linearyzacja prowadzi do układu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2.\end{aligned}$$

Punkt $(0, 0)$ dla układu zlinearyzowanego jest węzłem niestabilnym ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$). Oznacza to, że punkt ten jest punktem hiperbolicznym i także dla układu nieliniowego będzie punktem krytycznym niestabilnym. Przechodzimy do współrzędnych biegunowych i sprowadzamy układ nieliniowy do postaci

$$\dot{r} = r, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{\ln r}.$$

Rozwiązaniem tego układu są funkcje

$$r = ce^t, \quad \varphi = \varphi_0 + \ln|t + c|.$$

Stąd widać, że punkt $x = (0, 0)$ dla układu nieliniowego jest ogniskiem niestabilnym. Różny charakter punktu osobliwego dla układu nieliniowego i jego linearyzacji jest związany z faktem, że tw. 5.23 gwarantuje tylko ciągłość przekształcenia portretu fazowego równania nieliniowego oraz jego linearyzacji.

5.5 Całki pierwsze

5.26 DEFINICJA. Niech będzie dane równanie autonomiczne

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.15}$$

z prawą stroną ciągłą w pewnym zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^m$. Funkcję $U(x)$ określoną w otwartym zbiorze $Q_0 \subset Q$ nazywamy **całką pierwszą niezależną od czasu** równania (5.15), jeśli jest ona stała na każdej krzywej całkowej tego równania.

Jeśli funkcja $U(x)$ jest klasy C^1 w Q_0 , to warunek stałości na krzywych całkowych przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt}U(x(t)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial x_i} f_i(x) = 0. \tag{5.16}$$

Całka pierwsza niezależna od czasu ma tę własność, że jej poziomice zawierają krzywe całkowe równania (5.15). Jeśli więc znamy całkę pierwszą $U(x)$, to łatwo można znaleźć postać krzywych całkowych, rozwiązując równanie $U(x) = \text{const}$.

W przypadku równań nieautonomicznych należy wprowadzić nieco inną definicję całki pierwszej.

5.27 DEFINICJA. Niech będzie dane równanie

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (5.17)$$

z prawą stroną ciągłą w pewnym zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Funkcję $U(t, x)$ określoną w otwartym zbiorze $Q_0 \subset Q$ nazywamy **całką pierwszą** równania (5.17), jeśli jest ona stała na każdej krzywej całkowej tego równania.

Jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (5.17), takim że $(t, x(t)) \in Q_0$ dla t należącego do przedziału (α, β) , to funkcja $U(t, x(t))$ jest niezależna od t . Jeśli funkcja $U(t, x)$ jest klasy C^1 , to warunek stałości na krzywych całkowych przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt}U(t, x(t)) = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial x_i} f_i(t, x) = 0. \quad (5.18)$$

5.28 Przykład. W przypadku układów autonomicznych na płaszczyźnie znalezienie całek pierwszych sprowadza się do jednokrotnego scałkowania pewnego równania skalarnego. Jeśli dany jest układ w \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (5.19)$$

to możemy go zamienić na jedno równanie

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \quad (5.20)$$

Zapisujemy to równanie w postaci różniczek

$$f_1(x_1, x_2)dx_2 - f_2(x_1, x_2)dx_1 = 0.$$

Jeśli powyższa forma jest różniczką zupełną, to rozwiązanie jest postaci

$$U(x_1, x_2) = \text{const}.$$

Jeśli takie rozwiązanie znajdziemy, to funkcja $U(x_1, x_2)$ będzie całką pierwszą układu (5.19). Rzeczywiście, różniczkując U i traktując x_2 jako funkcję x_1 otrzymujemy

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} = 0.$$

Z równania (5.20) dostajemy

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial U}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = 0,$$

co zgadza się ze wzorem (5.16).

Z tego co zostało powiedziane wyżej, jest jasne, że całkowanie różniczek zupełnych prowadzi do całek pierwszych. Równie łatwo można znaleźć całkę pierwszą w przypadku, gdy równanie (5.20) jest równaniem o zmiennych rozdzielonych.

5.29 Przykład. Znajdziemy całki pierwsze dla układu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1 x_2.\end{aligned}$$

Równanie (5.20) dla danego układu ma postać

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 + x_1 x_2}{x_1 - x_1 x_2} = \frac{x_2(x_1 - 1)}{x_1(1 - x_2)}.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\left(\frac{1 - x_2}{x_2}\right) dx_2 = \left(\frac{x_1 - 1}{x_1}\right) dx_1.$$

Po scałkowaniu mamy

$$\ln x_2 - x_2 = x_1 - \ln x_1 + c.$$

Skąd po przekształceniu otrzymujemy

$$x_1 e^{-x_1} x_2 e^{-x_2} = c.$$

5.30 Przykład. Przykład ten pokazuje, że całki pierwsze mogą być takie same dla różnych układów równań. Rozważmy dwa układy:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(1 - x_2). \end{cases}$$

Poszukiwanie całek pierwszych ze wzoru (5.20) prowadzi do identycznego równania dla obu układów

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, którego całka ma postać

$$x_1 x_2 = c.$$

Mamy więc tę samą rodzinę całek pierwszych dla dwu różnych układów. Ponieważ są to układy autonomiczne, więc krzywe fazowe obu układów leżą na poziomicach tej samej funkcji $x_1 x_2 = c$.

Poza pokazanymi wyżej przykładami znajdowania całek pierwszych dla układów autonomicznych na płaszczyźnie trudno jest znaleźć nietrywialne (czyli różne od stałych) całki pierwsze. Pewnym wyjątkiem są problemy wynikające z mechaniki, gdzie istnienie całek pierwszych, nawet dla zagadnień wielowymiarowych, jest związane ze spełnieniem praw zachowania, takich jak prawo zachowania energii, prawo zachowania pędu itp.

5.6 Przykłady z dynamiki populacji

Zajmiemy się teraz analizą kilku nieliniowych modeli dynamiki populacji, które są opisywane układami równań autonomicznych.

Rozpocznijmy od analizy wzrostu populacji. Wzrost populacji jest zwykle charakteryzowany przez podanie dwóch liczb: **współczynnika urodzeń** b oraz **współczynnika zgonów** d . Na tej podstawie można napisać równanie wzrostu populacji

$$\dot{x} = rx, \quad (5.21)$$

gdzie $r = b - d$ jest **współczynnikiem wzrostu populacji**. Równanie (5.21) prowadzi do **wykładniczego prawa wzrostu**

$$x(t) = x_0 e^{rt},$$

po raz pierwszy sformułowanego przez Thomasa R. Malthusa w 1798 roku. Gdyby wzrostem populacji rządziło równanie (5.21) i współczynnik urodzeń był wyższy od współczynnika zgonów ($r > 0$), następowałby wykładniczy przyrost liczebności populacji. Taki model wzrostu populacji ma zastosowania w dynamice wzrostu populacji pewnych bakterii. Przede wszystkim jednak model (5.21) okazał się dobrym modelem rozpadu pierwiastków promieniotwórczych (dla tego modelu $b = 0$, stąd $r < 0$).

Jeśli populacja musi egzystować w określonym środowisku, to niemożliwy jest jej nieograniczony wzrost ze względu na ograniczone zasoby tego środowiska. Należy więc powtórnie przeanalizować założenia prowadzące do równania (5.21). Założenie, że liczba nowych urodzeń jest proporcjonalna do liczebności populacji, wydaje się być dość rozsądnym przybliżeniem. Zmodyfikujemy natomiast założenie odnośnie współczynnika zgonów, zakładając, że współczynnik ten nie jest stały, ale rośnie wraz z liczebnością populacji (efekt śmierci na skutek przegęszczenia środowiska). Zakładając, że $d = ax$, otrzymujemy równanie wzrostu populacji

$$\dot{x} = x(b - ax). \quad (5.22)$$

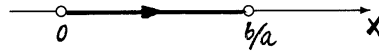
Równanie to nazywa się **równaniem logistycznym**. Opisuje ono dość wiernie wzrost pojedynczej populacji w środowisku o ograniczonych zasobach, o czym przekonano się, badając hodowle bakterii.

Równanie (5.22) jest równaniem o zmiennych rozdzielonych i można je łatwo scałkować. W dalszym ciągu przeprowadzimy jego analizę jakościową.

Po pierwsze zauważmy, że równanie (5.22) ma dwa punkty równowagi:

$$x = 0 \quad \text{i} \quad x = \frac{b}{a}.$$

Punkt $x = 0$ odpowiada wyginięciu populacji i jest on punktem równowagi niestabilnej (jeśli tylko $b > 0$). Punkt $x = \frac{b}{a}$ odpowiada asymptotycznie stabilnemu punktowi równowagi. Jest to stan, do którego dąży rozwijająca się populacja i nazywany jest **pojemnością środowiska**. Portret fazowy dla równania logistycznego pokazany jest na rys. 5.15. Składa się on z dwóch punktów krytycznych: niestabilnego $x = 0$ i stabilnego $x = \frac{b}{a}$ oraz łączącej te dwa punkty otwartej krzywej fazowej.



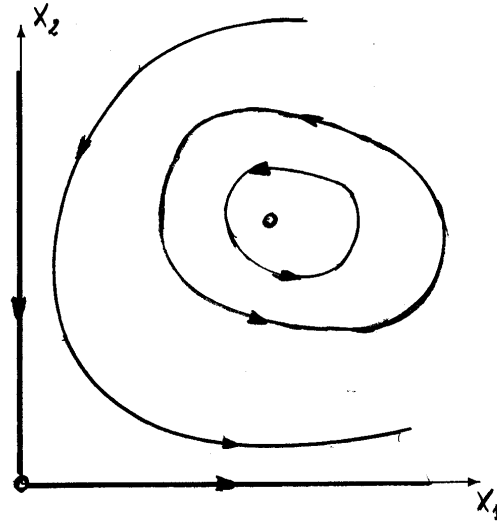
Rysunek 5.15: Portret fazowy dla równania logistycznego

Zajmiemy się teraz środowiskiem, w którym żyją dwie populacje. Wzrost obu populacji zależy wtedy nie tylko od własności środowiska, ale także od tego, jak oba gatunki odnoszą się do siebie. W ogólności może tu występować wiele modeli relacji. W dalszym ciągu zajmiemy się szczegółowo modelowaniem sytuacji, gdy jeden gatunek, zwany **drapieżnikiem**, żywi się osobnikami drugiego gatunku, zwanego **ofiara**. Niech $x_1(t)$ będzie liczebnością populacji ofiar, a $x_2(t)$ – populacji drapieżników. Dla populacji ofiar przyjmiemy prosty model wykładniczego wzrostu. Zmodyfikujemy go jedynie założeniem, że współczynnik zgonów jest proporcjonalny do liczebności populacji drapieżników $d = ax_2$ (ofiary giną pożerane przez drapieżniki). W przypadku drapieżników zakładamy, że wzrost ich populacji zależy tylko od ilości dostarczonego pożywienia, która jest proporcjonalna do liczebności ofiar (δx_1). Zauważmy przy tym, że pewna ilość pożywienia (σ) jest niezbędna do utrzymania przy życiu istniejącej populacji i nie prowadzi do jej wzrostu. W efekcie uzyskujemy układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (b - ax_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (\delta x_1 - \sigma)x_2. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Układ ten nazywa się **układem (modelem) Lotki-Volterry** i został zaproponowany przez Vito Volterrę na podstawie obserwacji populacji ryb w Adriatyku.

Badanie układu (5.23) jest dosyć proste. Zauważmy, że ma on dwa punkty krytyczne $(0, 0)$ i $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$. Punkt $(0, 0)$ jest siodłem, a jego separatorysami są osie układu współrzędnych (ściągnięcie wzdłuż osi Ox_2 , rozciągnięcie wzdłuż osi Ox_1). W celu zbadania charakteru punktu $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$ należy zlinearyzować układ w otoczeniu tego punktu. Niestety, dla układu zlinearyzowanego punkt $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$ jest środkiem, nie



Rysunek 5.16: Portret fazowy dla układu Lotki-Volterra

daje to więc żadnej informacji o zachowaniu układu nieliniowego. Na szczęście, można łatwo znaleźć całkę pierwszą układu (5.23).

Rzeczywiście, po pomnożeniu pierwszego równania przez δ , a drugiego przez a i dodaniu stronami, otrzymujemy

$$\delta \dot{x}_1 + a \dot{x}_2 = b \delta x_1 - a \sigma x_2.$$

Analogicznie, po pomnożeniu pierwszego równania przez $\frac{\sigma}{x_1}$, a drugiego przez $\frac{b}{x_2}$ i dodaniu stronami, mamy

$$\frac{\sigma}{x_1} \dot{x}_1 + \frac{b}{x_2} \dot{x}_2 = b \delta x_1 - a \sigma x_2.$$

Z dwóch ostatnich równań otrzymujemy

$$\delta \dot{x}_1 + a \dot{x}_2 = \frac{\sigma}{x_1} \dot{x}_1 + \frac{b}{x_2} \dot{x}_2,$$

czyli

$$\delta x_1 + a x_2 = \sigma \ln x_1 + b \ln x_2 + c.$$

Stąd

$$x_1^\sigma x_2^b e^{-\delta x_1} e^{-a x_2} = c.$$

Tak więc funkcja

$$f(x_1, x_2) = x_1^\sigma e^{-\delta x_1} x_2^b e^{-a x_2} = g(x_1)h(x_2)$$

jest całką pierwszą układu (5.23). Zauważmy, że funkcja $f(x_1, x_2)$ osiąga maksimum w punkcie $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$. Z faktu tego oraz z kształtu wykresów funkcji $g(x_1)$ i $h(x_2)$ wynika, że punkt $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$ jest środkiem także dla układu nieliniowego. Portret fazowy układu (5.23) w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych składa się więc z zamkniętych krzywych (rozwiązań okresowych) otaczających punkt $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{b}{a})$ (rys. 5.16). Istnienie takich okresowych rozwiązań dla modelu drapieżnik-ofiara zostało potwierdzone badaniami eksperymentalnymi.

Rozdział 6

Dwa przykłady z mechaniki

W rozdziale tym przedstawimy proste przykłady rozwiązań równań mechaniki Newtona. Mechanika Newtona zajmuje się badaniem ruchu układu punktów materialnych w przestrzeni euklidesowej. Opis tego ruchu dany jest przez układ równań Newtona

$$\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}), \quad (6.1)$$

gdzie $x(t)$ opisuje trajektorię ruchu, \dot{x} jest jego prędkością a \ddot{x} – przyspieszeniem. Postać funkcji F jest elementem definicji rozpatrywanego układu mechanicznego. Do definicji tej należy też podanie obszaru określoności funkcji F oraz przestrzeni fazowej równania (6.1). Rozważania ograniczymy do opisu ruchu jednego punktu materialnego o jednostkowej masie. Zakładamy także, że funkcja $F(t, x, \dot{x})$ jest gładką funkcją swoich argumentów (np. jest funkcją klasy C^1), co gwarantuje istnienie i jednoznaczność rozwiązań układu (6.1).

6.1 Układy zachowawcze z jednym stopniem swobody

Rozpocniemy od opisu ogólnego modelu m -wymiarowego, pokazując własności ruchu punktu materialnego w całej ogólności. Dopiero kiedy będzie to niezbędne dla dalszego prowadzenia wykładu ograniczymy się do przypadku jednowymiarowego ($m = 1$).

6.1 DEFINICJA. *Układem zachowawczym nazywamy ruch punktu materialnego opisywany równaniem różniczkowym*

$$\ddot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (6.2)$$

gdzie siła $F(x)$ jest funkcją klasy C^1 w otwartym zbiorze $D \subset \mathbb{R}^m$, dla której istnieje funkcja $U(x)$, taka że

$$F(x) = -\text{grad } U. \quad (6.3)$$

Siłę zdefiniowaną w ten sposób nazywa się **siłą potencjalną** (U nazywane jest **potencjałem**).

Dla układów zachowawczych można zdefiniować **energię całkowitą** układu $E = T(\dot{x}) + U(x)$, gdzie T jest energią kinetyczną daną wzorem

$$T = \frac{\|\dot{x}\|^2}{2}$$

a $U(x)$ **energię potencjalną** układu.

W przypadku jednowymiarowym potencjał $U(x)$ można otrzymać przez całkowanie siły

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(z) dz. \quad (6.4)$$

Całka w równaniu (6.4) zawsze istnieje (przy założeniu, że funkcja F jest klasy C^1). Oznacza to, że każdy układ z jednym stopniem swobody jest układem zachowawczym.

6.2 TWIERDZENIE. *Całkowita energia układu $E = T + U$ jest całką pierwszą równania (6.2).*

Dowód. Mamy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\|\dot{x}(t)\|^2}{2} + U(x(t)) \right) = \dot{x}\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\dot{x} = \dot{x}F(x) - F(x)\dot{x} = 0.$$

Dowodzi to, że funkcja

$$\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + U(x(t))$$

jest całką pierwszą równania (6.2). ■

Z twierdzenia 6.2 wynika ważny w mechanice wniosek.

6.3 WNIOSEK. (Prawo zachowania energii) *Energia całkowita punktu materialnego poruszającego się zgodnie z równaniem (6.2), gdzie $F(x)$ jest siłą potencjalną, jest stała w trakcie ruchu.*

W dalszym ciągu udowodnimy jeszcze jeden ważny dla opisu ruchu zachowawczego wynik, który jest prawdziwy w dowolnym wymiarze. W tym celu zamienimy równanie (6.2) układem równań pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= F(x_1). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Zajmiemy się teraz punktami równowagi układu (6.5). W przestrzeni zmiennych $(x_1, x_2) \in D \times \mathbb{R}^m$ są to punkty $(\bar{x}_1, 0)$, dla których $F(\bar{x}_1) = 0$.

6.4 TWIERDZENIE. *Jeśli w stanie równowagi układu zachowawczego energia całkowita układu osiąga minimum lokalne, to ten stan równowagi jest stabilny.*

Dowód. Z tw. 6.2 wiemy, że energia całkowita układu zachowawczego jest całką pierwszą. W zmiennych (x_1, x_2) ta całka zapisuje się formułą $E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\|x_2\|^2 + U(x_1)$. Jeśli punkt $(\bar{x}_1, 0)$ jest punktem równowagi i energia całkowita osiąga w tym punkcie lokalne minimum, to funkcja

$$V(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) - E(\bar{x}_1, 0)$$

jest funkcją Lapunowa dla tego położenia równowagi.

Łatwo widać, że funkcja $V(x_1, x_2)$ spełnia warunki definicji 5.3 (oczywiście po drobnej modyfikacji, bo w definicji zakładano, że badanym rozwiązaniem jest rozwiązanie zerowe a w naszym przypadku jest to rozwiązanie $(\bar{x}_1, 0)$). Funkcja $V(x_1, x_2)$ jest nieujemna i zeruje się jedynie w punkcie $(\bar{x}_1, 0)$, bo jest to minimum lokalne. Aby sprawdzić warunek 3) def. 5.3 obliczamy

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot F(x_1) = -F(x_1) \cdot x_2 + x_2 \cdot F(x_1) = 0,$$

gdzie symbol $a \cdot b$ oznacza iloczyn skalarny w \mathbb{R}^m . Z tw. 5.4 wynika, że rozwiązanie $(\bar{x}_1, 0)$ jest stabilne. ■

Obecnie zajmiemy się jedynie jednowymiarowym układem (6.2) lub równoważnie układem (6.5). Dla tego układu przestrzenią fazową jest $D \times \mathbb{R}$, gdzie D jest otwartym odcinkiem (być może nieograniczonym) w \mathbb{R} .

6.5 TWIERDZENIE. *Dla układu z jednym stopniem swobody poziomice energii całkowitej są gładkimi krzywymi w otoczeniu każdego swojego punktu z wyjątkiem punktu równowagi.*

Dowód. Poziomica energii jest zbiorem $\{(x_1, x_2): E(x_1, x_2) \equiv x_2^2/2 + U(x_1) = E_0\}$, gdzie E_0 jest stałą. Pochodne cząstkowe funkcji E dane są wzorami

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = -F(x_1), \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} = x_2.$$

Jeśli punkt (x_1, x_2) nie jest położeniem równowagi, to nie są spełnione jednocześnie równania

$$F(x_1) = 0 \quad \text{oraz} \quad x_2 = 0.$$

Wynika stąd, że przynajmniej jedna pochodna cząstkowa funkcji E w punkcie (x_1, x_2) jest różna od zera. Z tw. o funkcji uwikłanej wynika wtedy istnienie gładkiej funkcji $x_1 = x_1(x_2)$ lub $x_2 = x_2(x_1)$. ■

Zajmiemy się teraz szczegółowo badaniem poziomicy energii. Założymy przy tym, że potencjał $U(x_1)$ jest funkcją klasy C^2 na całej prostej \mathbb{R} . Przypomnijmy, że punkt x_0 nazywa się punktem krytycznym funkcji jednej zmiennej $f(x)$, jeśli $f'(x_0) = 0$. Zajmiemy się na początku poziomiami energii $x_2^2/2 + U(x_1) = E_0$ dla wartości energii E_0 , które nie są równe wartości potencjału U w żadnym punkcie krytycznym tego potencjału (nie są wartościami krytycznymi potencjału). Z

gładkości potencjału wynika, że zbiór $\{x_1: U(x_1) \leq E_0\}$ składa się z przeliczalnej liczby rozłącznych odcinków. Skrajne z tych odcinków mogą być rozciągającymi się do nieskończoności półprostymi, może też się zdarzyć, że cały zbiór pokrywa się z prostą rzeczywistą \mathbb{R} .

Przeanalizujmy jak wygląda poziomicą energii dla jednego z odcinków ograniczonych $[a, b]$. Na odcinku tym mamy $U(a) = U(b) = E_0$ oraz $U(x_1) < E_0$ dla $x_1 \in (a, b)$.

6.6 TWIERDZENIE. *Jeśli odcinek $[a, b]$ jest ograniczony, $U(a) = U(b) = E_0$, $U'(a) < 0$, $U'(b) > 0$ i $U(x_1) < E_0$ dla $x_1 \in (a, b)$, to równanie*

$$\frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E_0, \quad x_1 \in [a, b],$$

definiuje zamkniętą krzywą gładką na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 będącą krzywą fazową równania (6.2).

Dowód. Z prawa zachowania energii wynika, że znalezienie rozwiązania równania (6.2) w przypadku układu z jednym stopniem swobody sprowadza się do scałkowania równania o rozdzielonych zmiennych

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E_0 - U(x))}. \quad (6.6)$$

Niech (x_1, x_2) leży na rozważanej poziomici i niech $x_2 > 0$. Niech $\varphi(t)$ będzie rozwiązaniem równania (6.2) z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = x_1$, $\dot{\varphi}(t_0) = x_2$. Z równania (6.6) otrzymamy wtedy związek

$$t - t_0 = \int_{x_1}^{\varphi(t)} \frac{dz}{\sqrt{2(E_0 - U(z))}}.$$

Aby przekonać się jak daleko można przedłużyć to lokalne rozwiązanie, policzmy czas jaki jest potrzebny, aby trajektoria przeszła z punktu a do punktu b

$$\frac{T}{2} = \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{2(E_0 - U(z))}}. \quad (6.7)$$

Występująca tu całka jest niewłaściwa (na obu końcach), ale zbieżna. Aby się o tym przekonać dokonamy odpowiedniego oszacowania funkcji podcałkowej. Ponieważ funkcja U jest klasy C^2 oraz $U'(a) < 0$, to w pewnym otoczeniu punktu a mamy oszacowanie $U'(x) \leq \frac{1}{2}U'(a)$. Z tw. o wartości średniej dostajemy $U(x) = U(a) + U'(\xi)(x - a)$. Stąd mianownik naszej całki może być oszacowany następująco

$$\frac{1}{\sqrt{2(E_0 - U(x))}} = \frac{1}{\sqrt{-2U'(\xi)(x - a)}} \leq \frac{1}{\sqrt{-U'(a)(x - a)}}.$$

Teraz zbieżność interesującej nas całki w końcu $x = a$ wynika ze zbieżności całki

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x - a}}.$$

Zbieżność w końcu $x = b$ dowodzi się analogicznie.

Znaleźliśmy w ten sposób rozwiązanie $\varphi(t)$ równania (6.2) na pewnym odcinku czasu $[t_1, t_2]$ o długości $T/2$, takim że $\varphi(t_1) = a$ i $\varphi(t_2) = b$. Ponieważ poziomicą energii jest symetryczna względem osi x_1 , to biorąc $\varphi(t_2 + t) = \varphi(t_2 - t)$, dla $t \in [0, T/2]$, rozszerzamy nasze rozwiązanie na przedział $[t_1, t_1 + T]$ przy czym z konstrukcji tego rozszerzenia wynika, że otrzymujemy funkcję okresową o okresie T . Odpowiadająca otrzymanemu rozwiązaniu krzywa fazowa jest częścią poziomicy energii E_0 nad odcinkiem $[a, b]$. ■

Zbadamy teraz zachowanie się poziomicy energii w otoczeniu punktu krytycznego potencjału. Jeśli $U(\bar{x}_1) = E_0$ i $U'(\bar{x}_1) = 0$, to w otoczeniu punktu \bar{x}_1 potencjał można w przybliżeniu przedstawić (korzystając z wzoru Taylora) w postaci $U(x_1) = U(\bar{x}_1) + \frac{1}{2}U''(\xi)(x_1 - \bar{x}_1)^2$. Wtedy poziomice energii są krzywymi kwadratowymi $x_2^2 + k(x_1 - \bar{x}_1)^2 = \text{const}$. W przypadku gdy $k > 0$ (potencjał ma minimum w punkcie \bar{x}_1) krzywe te są elipsami o środku w punkcie krytycznym $(\bar{x}_1, 0)$. Dla $k < 0$ (potencjał ma maksimum w punkcie \bar{x}_1) krzywe te są hiperbolami o środku w $(\bar{x}_1, 0)$.

Globalne zachowanie poziomicy energii dla krytycznych wartości energii jest dość skomplikowane. Jak poprzednio rozpatrujemy ograniczony odcinek $[a, b]$, na którym $U(a) = U(b) = E_0$, przy czym wartość E_0 odpowiada wartości potencjału w punkcie krytycznym. Możliwych jest kilka przypadków. Kiedy oba końce odcinka $[a, b]$ są punktami krytycznymi ($U'(a) = U'(b) = 0$), to krzywymi fazowymi są dwa otwarte łuki

$$x_2 = \pm \sqrt{2(E_0 - U(x_1))}, \quad x_1 \in (a, b).$$

Jeśli $U'(a) = 0, U'(b) \neq 0$ lub $U'(a) \neq 0, U'(b) = 0$, to równanie

$$\frac{1}{2}x_2^2 + U(x_1) = E_0$$

definiuje jedną otwartą krzywą fazową. Jeśli wreszcie $U'(a) \neq 0$ i $U'(b) \neq 0$, to znaczy, że punkt krytyczny znajduje się poza odcinkiem $[a, b]$ i otrzymujemy zamknięte krzywe fazowe jak dla niekrytycznych wartości energii.

6.7 Przykład. Przeanalizujemy teraz poziomice energii oraz krzywe fazowe wahadła bez uciekania się do przybliżenia małych odchyłeń. Jak pamiętamy z wyprowadzenia w przykładzie 4.20 równanie to ma postać

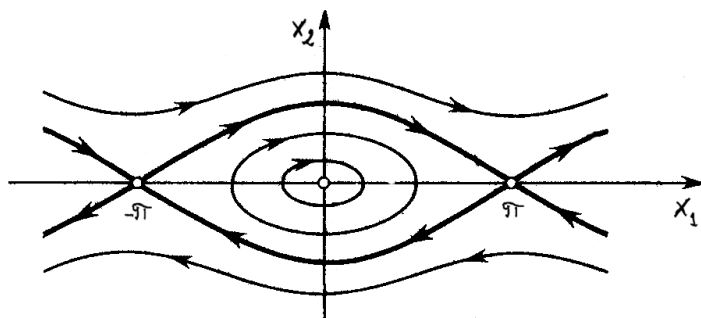
$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \sin x.$$

Potencjałem dla tego równania jest funkcja $U(x) = -\omega_0^2 \cos x$. Mamy więc dwa krytyczne poziomy energii: $E_0 = -\omega_0^2$, który odpowiada stabilnemu położeniu równowagi $x = 2n\pi$, oraz $E_0 = \omega_0^2$ odpowiadający niestabilnemu położeniu równowagi $x = \pi + 2n\pi$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. W dalszym ciągu będziemy

analizowali kształt krzywych fazowych wyłącznie w otoczeniu punktów $x = -\pi$, $x = 0$ i $x = \pi$, ponieważ portret fazowy jest okresowy o okresie 2π .

Na płaszczyźnie fazowej (x_1, x_2) punkt $(0, 0)$ odpowiadający minimum potencjału jest stabilnym położeniem równowagi a krzywe fazowe w jego małym otoczeniu są zamkniętymi krzywymi fazowymi jak to wynika z tw. 6.6. Punkty $(-\pi, 0)$ oraz $(\pi, 0)$ odpowiadają przypadkowi, gdy $U(-\pi) = U(\pi) = \omega_0^2$ oraz $U'(-\pi) = U'(\pi) = 0$. Oznacza to, że punkty te są same krzywymi fazowymi a krzywe fazowe w ich otoczeniu są dyfeomorficzne z hiperbolami. Prócz tego istnieją krzywe fazowe w formie otwartych łuków łączące punkt $(-\pi, 0)$ z punktem $(\pi, 0)$.

Jeśli portret fazowy przetłumaczymy na zachowanie wahadła, to obraz ten wygląda następująco. Dla poziomów energii $E_0 \leq -\omega_0^2$ wahadło nie porusza się spoczywając w położeniu równowagi $(0, 0)$. Dla poziomów energii $-\omega_0^2 < E_0 < \omega_0^2$ wahadło wykonuje okresowe wahnięcia (krzywe fazowe są zamkniętymi krzywymi). Dla poziomu energii $E_0 = \omega_0^2$ stan wahadła jest zależny od warunków początkowych: jeśli chwili początkowej mieliśmy $x(t_0) = -\pi$, $\dot{x}(t_0) = 0$, to wahadło pozostaje w położeniu równowagi $(-\pi, 0)$ (analogicznie dla punktu $(\pi, 0)$). Jeśli dane początkowe odpowiadają położeniu wahadła na jednej z krzywych fazowych łączących punkty $(-\pi, 0)$ i $(\pi, 0)$ (jak wiemy są dwie takie krzywe fazowe), to porusza się ono po tej krzywej, przy czym czas potrzebny na przebycie drogi z punktu $(-\pi, 0)$ do punktu $(\pi, 0)$ jest nieskończony (wynika to z równości (6.7)). Dla wartości $E_0 > \omega_0^2$ mamy niezamknięte krzywe fazowe. Odpowiada to ruchowi wahadła, przy którym obraca się ono wokół swojej osi (rys. 6.1).



Rysunek 6.1: Portret fazowy wahadła

6.2 Ruch w centralnym polu sił

W tym podrozdziale zajmiemy się ruchem punktu materialnego w przestrzeni trójwymiarowej \mathbb{R}^3 pod wpływem działania siły centralnej.

6.8 DEFINICJA. Pole wektorowe w \mathbb{R}^3 nazywa się centralne względem początku

układu współrzędnych, jeśli jest ono niezmiennicze względem ruchów przestrzeni \mathbb{R}^3 nie zmieniających położenia początku układu współrzędnych. Jeśli $F(x)$ jest wektorem pola centralnego, to istnieje funkcja skalarna Φ , taka że

$$F(x) = \Phi(|x|) \frac{x}{|x|}.$$

Wynika stąd następujące równanie ruchu punktu materialnego w centralnym polu sił

$$\ddot{x} = \Phi(|x|) \frac{x}{|x|}. \quad (6.8)$$

Z definicji tej wynika prosty wniosek.

6.9 WNIOSEK. *Centralne pole sił jest polem potencjalnym.*

Dowód. Niech $r = |x|$. Potencjał pola dany jest wtedy wzorem

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \Phi(z) dz.$$

■

6.10 DEFINICJA. *Momentem pędu* względem początku układu współrzędnych poruszającego się punktu materialnego nazywamy wektor $M = x \times \dot{x}$.

6.11 TWIERDZENIE. (Prawo zachowania momentu pędu) *W trakcie ruchu w centralnym polu sił moment pędu względem centrum pola nie zmienia się w czasie.*

Dowód. Jeśli pomnożymy równanie ruchu (6.8) wektorowo przez x , to otrzymamy

$$x \times \ddot{x} = \Phi(|x|) \frac{1}{|x|} x \times x = 0.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} x \times \dot{x} = \dot{x} \times \dot{x} + x \times \ddot{x} = x \times \ddot{x} = 0.$$

■

Z powyższego twierdzenia wynika ważny wniosek.

6.12 WNIOSEK. *Ruch punktu materialnego w centralnym polu sił w \mathbb{R}^3 jest ruchem płaskim, tj. odbywa się na płaszczyźnie.*

Dowód. Rozważmy równanie (6.8) z warunkami początkowymi

$$x(0) = \alpha_0, \quad \dot{x}(0) = \alpha_1.$$

Wektory α_0 i α_1 wyznaczają płaszczyznę w \mathbb{R}^3 ($\alpha_0 \times \alpha_1$ jest wektorem prostopadłym do tej płaszczyzny). Ponieważ $x \times \dot{x}$ jest momentem pędu, który jest stały w czasie, więc

$$x \times \dot{x} = c = \alpha_0 \times \alpha_1.$$

Wynika z tego, że ruch punktu materialnego odbywa się cały czas w płaszczyźnie prostopadłej do wektorów α_0 i α_1 . ■

Ponieważ ruch odbywa się na płaszczyźnie, celowe jest wprowadzenie na niej współrzędnych biegunowych. Niech (r, θ) będą tymi współrzędnymi. Układ (6.8) redukuje się wtedy do układu

$$\begin{aligned} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin \theta &= -\frac{dU}{dr} \cos \theta, \\ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta &= -\frac{dU}{dr} \sin \theta, \end{aligned} \quad (6.9)$$

a warunki początkowe mogą być zapisane w postaci

$$\begin{aligned} r(0) &= a, \quad \dot{r}(0) = 0, \\ \theta(0) &= 0, \quad \dot{\theta}(0) = \frac{C}{a^2}. \end{aligned}$$

Kombinacja liniowa równań (6.9) prowadzi do układu

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= -\frac{dU}{dr}, \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Zauważmy, że drugie z równań (6.10) może być zapisane w postaci

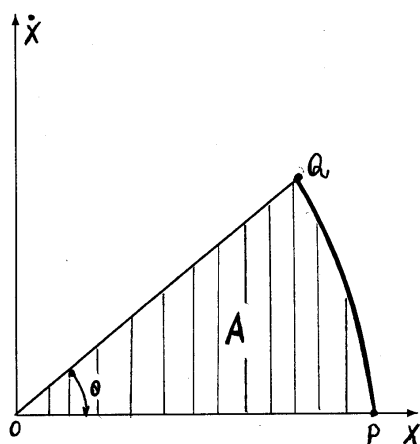
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Stąd

$$r^2\dot{\theta} = C. \quad (6.11)$$

Równość ta, będąca konsekwencją zachowania momentu pędu, ma interesującą interpretację geometryczną. Wyobraźmy sobie ciało poruszające się z punktu P do punktu Q po krzywej PQ (patrz rys. 6.2). Niech A będzie polem ograniczonym przez promienie OP , OQ i łuk PQ . Wtedy

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\theta,$$



Rysunek 6.2: Prędkość polowa

czyli

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}C. \quad (6.12)$$

Wielkość $\frac{dA}{dt}$ nazywa się w mechanice **prędkością polową**. Równanie (6.11) wyraża stałość prędkości polowej w ruchu punktu materialnego. Taką formę prawa zachowania pędu sformułował Kepler opisując prawa rządzące ruchem planet wokół słońca. W wersji Keplera (było to jego II prawo) miało ono formę:

Planeta porusza się wokół Słońca po krzywej płaskiej ze stałą prędkością polową.

6.13 TWIERDZENIE. *Ruch punktu materialnego w centralnym polu sił można opisać jednowymiarowym równaniem ruchu*

$$\ddot{r} = -\frac{dV}{dr}, \quad (6.13)$$

gdzie r jest promieniem wodzącym punktu, a $V(r)$ jest **efektywnym potencjałem** danym wzorem

$$V(r) = U(r) + \frac{C^2}{2r^2}.$$

We wzorze tym $U(r)$ jest potencjałem siły centralnej zdefiniowanym w dowodzie wniosku 6.9, a stała C jest stałą z równania (6.11) definiującą wartość momentu pędu.

Dowód. W pierwszym z równań (6.10) robimy podstawienie $\dot{\theta} = C/r^2$ wynikające z równania (6.11). Otrzymujemy wtedy

$$\ddot{r} = -\frac{dU}{dr} + \frac{C^2}{r^3},$$

co odpowiada równaniu

$$\ddot{r} = -\frac{dV}{dr}$$

$$z V(r) = U(r) + \frac{C^2}{2r^2}. \quad \blacksquare$$

Zajmiemy się teraz dokładniej problemem ruchu planet wokół słońca, aby otrzymać wszystkie prawa odkryte przez Keplera. W pewnym uproszczeniu możemy opisać to zadanie jako ruch ciała o małej masie μ wokół położonego w początku układu współrzędnych ciała o bardzo dużej masie m . Ciała te oddziałują na siebie siłą przyciągania grawitacyjnego

$$F(x) = -G \frac{\mu m x}{|x|^3}.$$

Odpowiada to ruchowi punktu materialnego w polu sił centralnych

$$\ddot{x} = -k \frac{x}{|x|^3}. \quad (6.14)$$

Korzystając z tej postaci siły centralnej scałkujemy równanie ruchu (6.13) z potencjałem V wynikającym z siły grawitacji. Z równania (6.13) wynika prawo zachowania energii $E_0 = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r)$. Pozwala ono uprościć problem całkowania równania (6.13). Z prawa zachowania energii mamy związek

$$\dot{r} = \sqrt{2(E_0 - V(r))}.$$

Ponieważ z równania (6.11) mamy $\dot{\theta} = C/r^2$, to

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{C/r^2}{\sqrt{2(E_0 - V(r))}}.$$

Całkujemy to ostatnie równanie dla $V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{C^2}{2r^2}$ i dostajemy

$$\theta = \int \frac{C/r^2}{\sqrt{2(E_0 - V(r))}} dr = \arccos \frac{C/r - k/C}{\sqrt{2E_0 + k^2/C^2}},$$

gdzie przyjęliśmy dla uproszczenia stałą całkowania równą zero. Prowadzi to do równania

$$r = \frac{C^2/k}{1 + e \cos \theta}, \quad (6.15)$$

gdzie $e = \sqrt{1 + 2E_0 C^2/k^2}$.

Równanie (6.15) jest równaniem stożkowej we współrzędnych biegunowych. Stała e nazywa się mimośrodem (ekscentrycznością) stożkowej. Odpowiada ona:

- a) okręgowi, jeśli $e = 0$,
- b) elipsie, jeśli $e < 1$,

c) paraboli, jeśli $e = 1$,

d) hiperboli, jeśli $e > 1$,

przy czym początek układu współrzędnych jest jednym z ognisk tej stożkowej. Wiadomo, że orbity są ograniczone jeśli $E_0 < 0$, co odpowiada $e < 1$ i gwarantuje prawdziwość I prawa Keplera:

Planeta porusza się wokół Słońca po elipsie, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy.

Kepler sformułował także III prawo ruchu planet:

Kwadrat czasu obiegu planety wokół Słońca jest proporcjonalny do trzeciej potęgi dłuższej osi elipsy, po której porusza się planeta.

Dowód tego prawa wynika z innego zapisu równania elipsy

$$r = \frac{b^2/a}{1 + e \cos \theta},$$

gdzie a jest dłuższą, a b krótszą półosią elipsy. Korzystając z równań (6.15) i (6.12) znajdujemy prędkość polową

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}b\sqrt{k/a}.$$

Stąd okres obiegu T można obliczyć ze wzoru

$$T = \frac{\text{pole elipsy}}{\text{prędkość polowa}} = \frac{\pi ab}{dA/dt} = \frac{2\pi a^{3/2}}{k^{1/2}}.$$