Rozdział 4

Szeregi. Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej.

Pojęcie szeregu wprowadza się po to, żeby można było ściśle mówić o sumach nieskończenie wielu składników. Z takimi sumami spotkaliśmy się już, mówiąc o ciągach. Np. dla $|q| < 1$ jest

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} (1 + q + \cdots + q^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} . \tag{4.1}$$

Pierwszą równość traktujemy jako definicję napisu, występującego z lewej strony; druga równość wynika ze wzoru na różnicę $(n + 1)$-szych potęg, a trzecia – z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy i stąd, że $q^n \to 0$ dla $n \to \infty$, gdy $|q| < 1$.

Nieskończone sumowanie wymaga ostrożności: nie wolno w tym przypadku bezkarnie korzystać z przemienności i łączności dodawania. Gdyby np. suma $-1+1-1+1-1+1-\cdots$ miała skończoną wartość S i gdyby nieskończone dodawanie było przemienne i łączne, to mielibyśmy

$$\begin{aligned} S &= (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= -1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = -1 + 0 + 0 + \cdots \\ &= -1 - \Big((-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots\Big) \end{aligned}$$

tzn. przy, jak się wydaje, naturalnej i sensownej umowie $0 + 0 + 0 + \cdots = 0$, byłoby $S = 0 = -1 = -1 - S$, co pokazuje, że S byłaby jednocześnie każdą z liczb $0, -1, -\frac{1}{2}$, tak zaś oczywiście nie może być!

Dlatego zaczniemy od definicji, służących ustaleniu, kiedy można mówić o sumie nieskończenie wielu składników.

Definicja 4.1. Szereg (liczb rzeczywistych) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ to para ciągów, $(a_n) \subset \mathbb{R}$ i $s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg (s_n) nazywamy ciągiem *sum częściowych* szeregu. Liczby a_n to *wyrazy szeregu*.

Definicja 4.2. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny* wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest zbieżny do skończonej granicy. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to liczbę

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazywamy jego sumą i piszemy[1]

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Szereg, który nie jest zbieżny, nazywa się rozbieżny.

(Czasem wygodnie jest numerować ciąg wyrazów szeregu za pomocą liczb całkowitych większych od pewnej ustalonej liczby $n_0 \in \mathbb{Z}$; będziemy to robić bez wahania.)

Przykład 4.3 (szereg geometryczny)**.** Jeśli $q \in \mathbb{R}$ i $|q| < 1$, to wtedy szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

jest zbieżny, a jego suma jest równa $1/(1-q)$. To wynika ze wzoru na sumę skończonego postępu geometrycznego i zostało wyjaśnione, gdy podaliśmy wzór (4.1).

Stwierdzenie 4.4 (warunek Cauchy'ego)**.** *Szereg liczb rzeczywistych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący* warunek Cauchy'ego dla szeregów:

(CS) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $m > k > n_\varepsilon$ jest

$$|a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon .$$

DOWÓD. Mamy $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m = s_m - s_k$, więc (CS) to po prostu warunek Cauchy'ego dla ciągu (s_n), równoważny (jak wiemy) zbieżności (s_n), czyli – wprost z definicji – zbieżności szeregu. □

Dla porządku odnotujmy jeszcze jeden prosty fakt. (Jego sens jest jasny: analizując zbieżność szeregu, wolno odrzucić ustaloną liczbę początkowych wyrazów.)

Stwierdzenie 4.5. *Jeśli $k_0 \in \mathbb{N}$, to szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \textit{oraz} \qquad \sum_{n=k_0}^{\infty} a_n$$

są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

DOWÓD. Nietrudno zauważyć, że warunek Cauchy'ego albo jednocześnie zachodzi dla obu szeregów, albo nie zachodzi dla żadnego z nich: dla dużych $m > k > k_0$ wartości sum $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m$ są przecież te same. □

[1] Nadużywamy tu lekko oznaczeń, ale jest to przyjęty i w tym przypadku niegroźny obyczaj; nie będziemy się nadmiernie obawiać pomylenia szeregu z jego sumą.

Stwierdzenie 4.6 (suma szeregów)**.** *Jeśli szeregi* $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$ *są zbieżne, to szereg* $\sum(a_n + b_n)$ *jest zbieżny i*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,.$$

Dowód. To wynika natychmiast z twierdzenia o granicy sumy ciągów zbieżnych. □

Stwierdzenie 4.7 (warunek konieczny zbieżności szeregu)**.** *Jeśli szereg liczb rzeczywistych* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Dowód. Jeśli $s_n = a_1 + \cdots + a_n \to s \in \mathbb{R}$, to $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$, gdy $n \to \infty$. □

Przykład 4.8. Jeśli $|q| \ge 1$, to szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

jest rozbieżny, gdyż $a_n = q^n \not\to 0$ dla $n \to \infty$, a więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu. □

Przestroga. Należy pamiętać, że podany wyżej warunek konieczny zbieżności szeregu **nie jest warunkiem dostatecznym:** ze zbieżności $a_n \to 0$ nie wynika wcale zbieżność szeregu $\sum a_n$. Istotna jest nie sama zbieżność a_n do zera, ale *tempo tej zbieżności.*

Przykład 4.9 (rozbieżność szeregu harmonicznego)**.** Szereg *harmoniczny*, tzn. szereg o wyrazach $a_n = 1/n$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, *jest rozbieżny.* Jest to na tyle ważny fakt, że obejrzymy kilka jego dowodów.

Dowód pierwszy. Dla szeregu harmonicznego nie jest spełniony warunek Cauchy'ego; sumy dalekich wyrazów nie muszą być małe. Istotnie, biorąc $\varepsilon = 1/2$ i dowolną liczbę n, otrzymujemy

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}| = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ składników}} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon\,.$$

Dowód drugi. Wiemy już, że dla $t > -1$ zachodzą nierówności $t/(t+1) \le \ln(1+t) \le t$. Podstawiając w nich $t = 1/k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{k+1} = \frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} \le \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \le \frac{1}{k}.$$

Sumując te nierówności dla $k = 1, 2, \ldots, n$, sprawdzamy, że

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \le \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

Jednak $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln((k+1)\cdot\frac{1}{k}) = \ln(k+1)-\ln k$, zatem sumę logarytmów w poprzednim wzorze łatwo jest obliczyć: jest ona równa $\ln(n+1)-\ln 1 = \ln(n+1)$. Otrzymujemy stąd, oznaczając dla krótkości n-tą sumę częściową szeregu harmonicznego przez s_n,

$$s_{n+1} - 1 \le \ln(n+1) \le s_n\,. \tag{4.2}$$

Ponieważ $\ln(n+1) \to \infty$ dla $n \to \infty$, więc s_n nie ma skończonej granicy, gdy $n \to \infty$.

Przykład 4.10. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. Istotnie, dla każdej liczby $n \ge 2$ mamy

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

a zatem

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Ciąg (s_n) sum częściowych tego szeregu jest rosnący (bo wyrazy szeregu są dodatnie) i ograniczony z góry przez liczbę 2, jest więc zbieżny. □

4.1 Szeregi o wyrazach dodatnich

Badanie zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich jest łatwiejsze od badania zbieżności szeregów o dowolnych wyrazach rzeczywistych. W podręcznikach Analizy można znaleźć bardzo wiele tzw. *kryteriów zbieżności szeregów*, tzn. twierdzeń, podających warunki dostateczne zbieżności (lub rozbieżności) szeregu. Nie będziemy podawać długiej listy takich twierdzeń[2]; zadowolimy się skromnym zestawem, który do wielu celów w zupełności wystarcza.

Zacznijmy od banalnej obserwacji.

Stwierdzenie 4.11. *Jeśli $a_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ jest ograniczony z góry.

Dowód. Ciąg (s_n) jest niemalejący, gdyż $a_n > 0$ dla wszystkich n. Dlatego zbieżność s_n do granicy skończonej jest równoważna ograniczoności s_n, patrz Twierdzenie 2.28. Ponieważ $s_n > 0$, więc trzeba (i wystarcza) sprawdzać tylko ograniczoność z góry. □

Najprostszy zestaw kryteriów zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich w gruncie rzeczy można ograniczyć do dwóch faktów: kryterium porównawczego i kryterium zagęszczeniowego. Każde z nich wykorzystuje jasną, intuicyjną ideę. Sens kryterium porównawczego jest taki, że jeśli można określić sumę pewnego nieskończonego zestawu liczb dodatnich, to można także określić sumę liczb mniejszych (która będzie mniejsza). Kryterium zagęszczeniowe można opisać tak: grupując dodatnie wyrazy, łatwiej jest dostrzec, jak szybko (lub wolno) rosną sumy częściowe szeregu.

[2] Zainteresowanych odsyłam do podręcznika Fichtenholza i książki Knoppa o szeregach nieskończonych.

Stwierdzenie 4.12 (kryterium porównawcze, wersja I)**.** *Załóżmy, że $a_n, b_n > 0$ i istnieją takie liczby $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, że $a_n \le c \cdot b_n$ dla wszystkich $n \ge n_0$. Wtedy*

(a) Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

(b) Z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dowód. Jeśli $n_1 \ge n_0$, to dla wszystkich $m > k > n_1$ jest, dzięki dodatniości wyrazów obu szeregów,

$$|a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m| \le c|b_k + b_{k+1} + \cdots + b_m|$$

(moduły można po prostu pominąć). Jeśli więc warunek Cauchy'ego dla szeregów jest spełniony dla szeregu o wyrazach b_n, to jest spełniony także dla szeregu o wyrazach a_n. Trzeba po prostu ustalić $\varepsilon > 0$, wziąć dla szeregu o wyrazach b_n liczbę dodatnią $\varepsilon' = \varepsilon/c$, dobrać do niej $n_{\varepsilon'}$ (nie mniejsze od n_0) i zobaczyć, że dla $m > k > n_{\varepsilon'}$ będzie wtedy $|a_k + a_{k+1} \cdots + a_m| < c\varepsilon' = \varepsilon$.

Tak samo sprawdzamy, że jeśli warunek Cauchy'ego nie zachodzi dla szeregu o wyrazach a_n, to nie zachodzi także dla szeregu o wyrazach b_n. □

Uwaga. Jeśli komuś nie podoba się rozumowanie, w którym w sposób jawny korzysta się z warunku Cauchy'ego, może postępować w dowodzie tak: skorzystać ze Stwierdzenia 4.5, odrzucić wyrazy o numerach mniejszych od n_0 i stwierdzić, że liczba $M > 0$ jest ograniczeniem górnym zbioru wszystkich sum częściowych szeregu $\sum_{n \ge n_0} a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy M/c jest ograniczeniem górnym zbioru sum częściowych szeregu $\sum_{n \ge n_0} b_n$. To wynika z nierówności $a_n \le c \cdot b_n$ i dodatniości wyrazów a_n, b_n. Zastosowanie Stwierdzenia 4.11 pozwala zakończyć inny, alternatywny dowód kryterium porównawczego.

Stwierdzenie 4.13 (kryterium porównawcze, wersja II)**.** *Jeśli $a_n, b_n > 0$ dla wszystkich $n \ge n_0$ i istnieje skończona, dodatnia granica $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)$, to wówczas szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.*

Dowód. Można bez zmniejszenia ogólności założyć, że $n_0 = 1$. Wybierzmy liczbę $C > 0$ tak, aby

$$\frac{1}{C} < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < C\,.$$

Na mocy Stwierdzenia 2.13 (o szacowaniu granic) istnieje wtedy $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$a_n < Cb_n \quad \text{i} \quad b_n < Ca_n \qquad \text{dla wszystkich } n > n_1.$$

Teza wynika teraz z poprzedniej wersji kryterium porównawczego. □

Stwierdzenie 4.14 (kryterium porównawcze, wersja ilorazowa)**.** *Załóżmy, że dla $n \ge n_0$ jest $a_n, b_n > 0$ oraz*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}\,. \tag{4.3}$$

Wtedy

(a) *Ze zbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *wynika zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*;*

(b) *Z rozbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *wynika rozbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

DOWÓD. Można bez zmniejszenia ogólności założyć, że $n_0 = 1$. Mnożąc nierówności (4.3) stronami dla $n = 1, 2, \ldots, N-1$ otrzymujemy

$$\frac{a_N}{a_1} = \frac{a_N}{a_{N-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_N}{b_{N-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_{N+1}}{b_1},$$

a więc $a_N \le c \cdot b_N$, gdzie $c = a_1/b_1$. Są to założenia pierwszej wersji kryterium porównawczego; stosując je, kończymy dowód. □

Przykład 4.15. Jeśli $q \in (0,1)$, to szereg o wyrazach $a_n = nq^n$ jest zbieżny. Istotnie, weźmy dowolne $s \in (q, 1)$. Ponieważ $(n+1)/n \to 1$, więc dla wszystkich dostatecznie dużych n jest

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} q < s = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \qquad \text{gdzie } b_n = s^n.$$

Ponieważ dla każdego $s \in (0,1)$ szereg geometryczny $\sum s^n$ jest zbieżny, więc szereg $\sum nq^n$ jest zbieżny. To wynika z punktu (a) ostatniego kryterium. □

Przykład 4.16. Postępując praktycznie tak samo, jak w poprzednim przykładzie, można stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$, gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną i $q \in (0,1)$, jest zbieżny. □

Przykład 4.17. Obliczymy sumę szeregu $\sum_{n=1} nq^n$, posługując się wzorem na sumę postępu geometrycznego. Otóż, zauważając, że kq^k jest sumą k składników równych q^k, i grupując wyrazy, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
s_n := q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n \quad &= \quad q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \qquad \text{(w każdym wierszu} \\
&\qquad\quad + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \qquad \text{trójkątnej `tabelki' obok} \\
&\qquad\qquad\quad + q^3 + \cdots + q^n \qquad \text{widać postęp geometryczny!)} \\
&\qquad\qquad\qquad + \cdots + \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + q^n \\
&= \frac{q - q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^2 - q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^3 - q^{n+1}}{1-q} + \cdots + \frac{q^n - q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1}{1-q}\bigl(q + q^2 + \cdots + q^n - nq^{n+1}\bigr) \\
&= \frac{q - q^{n+1} - nq^{n+1}(1-q)}{(1-q)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{q}{(1-q)^2},
\end{aligned}$$

gdyż $q^n \to 0$ i $nq^n \to 0$ (można stwierdzić to na wiele sposobów – my w tej chwili możemy już powiedzieć, że wynika to np. ze zbieżności szeregu $\sum nq^n$, udowodnionej we wcześniejszym przykładzie!). Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} \qquad \text{dla } q \in (0,1). \tag{4.4}$$

Czytelnik może sam sprawdzić, że taki sam wzór ma miejsce dla $q \in (-1, 0]$.

Stwierdzenie 4.18 (kryterium zagęszczeniowe)**.** *Jeśli* (a_n) *jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, to szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \textit{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,, \qquad \textit{gdzie} \quad b_n = 2^n a_{2^n}\,,$$

są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

Dowód. Niech $s_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$, $t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Zauważmy, że dzięki monotoniczności ciągu (a_k) i równości $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ jest

$$\underbrace{a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \cdots + a_{2^{n+1}}}_{2^n \text{ składników; każdy jest } \le a_{2^n}} \le 2^n a_{2^n} = b_n$$

$$= 2 \cdot 2^{n-1} a_{2^n} \le 2 \cdot \Bigg(\underbrace{a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \cdots + a_{2^n}}_{2^{n-1} \text{ składników; każdy jest } \ge a_{2^n}} \Bigg).$$

Sumując te nierówności dla $n = 1, 2, \ldots, N$, otrzymujemy

$$s_{2^{N+1}} - a_1 - a_2 \le t_N = \sum_{n=1}^{N} b_n \le 2 s_{2^N}$$

(proszę zauważyć, że zaczynamy od $a_3 + a_4 \le b_1 = 2a_2$, stąd kosmetyczny dodatek $-a_1 - a_2$ po lewej stronie wyżej). Zatem, ciągi monotoniczne (t_N) i (s_m) są albo jednocześnie ograniczone, albo jednocześnie nieograniczone. Teza kryterium zagęszczeniowego wynika więc ze Stwierdzenia 4.11. $\square$

Zaleta tego kryterium jest taka, że (dzięki dodatkowemu założeniu o monotoniczności ciągu a_n) szereg o wyrazach b_n zachowuje się – używając przenośni – *tak samo, co szereg o wyrazach* a_n*, tylko w sposób bardziej oczywisty, łatwiejszy do zauważenia*. Najlepiej zobaczyć to na przykładach.

Przykład 4.19. Oto trzeci dowód rozbieżności szeregu harmonicznego: jeśli $a_n = 1/n$, to

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1,$$

a szereg z samych jedynek jest oczywiście rozbieżny. $\square$

Przykład 4.20. Szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

jest rozbieżny. Istotnie, dla $a_n = 1/(n \ln n)$ otrzymujemy

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{n \ln 2},$$

więc rozbieżność rozważanego szeregu wynika z rozbieżności szeregu harmonicznego i kryterium zagęszczeniowego. $\square$

Proszę zauważyć, że dla dużych n liczba $1/(n \ln n)$ jest dużo mniejsza od $1/n$ (iloraz tych liczb dąży do 0 dla $n \to \infty$), więc sumy częściowe ostatniego szeregu rosną wolniej niż sumy częściowe szeregu harmonicznego. Jednak dzięki zastosowaniu kryterium zagęszczeniowego, tzn. dzięki odpowiedniemu grupowaniu wyrazów, potrafimy łatwo wykazać rozbieżność.

Przykład 4.21. Szereg[3]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{4.5}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $s > 1$. Dla $s \le 0$ rozbieżność jest oczywista: nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności, gdyż dla takich s mamy $a_n = n^{-s} \to +\infty$. Niech więc $s > 0$. Wyrazy $a_n = n^{-s}$ maleją do zera; zastosujmy kryterium zagęszczeniowe. Otóż

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{\bigl(2^n\bigr)^s} = \frac{1}{\bigl(2^{s-1}\bigr)^n} = q^n, \qquad \text{gdzie } q = 2^{1-s},$$

a więc zagęszczenie prowadzi do szeregu geometrycznego $\sum b_n = \sum q^n$, który (jak już wiemy) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| = 2^{1-s} < 1 = 2^0$, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy $1 - s < 0$. $\square$

Przykład 4.22. Jeśli $a_n = 1/\bigl(n(\ln n)^s\bigr)$, gdzie $s \in \mathbb{R}$, to $\sum a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $s > 1$. Kryterium zagęszczeniowe daje:

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \bigl(\ln(2^n)\bigr)^s} = c \cdot \frac{1}{n^s}, \qquad \text{gdzie } c = 1/(\ln 2)^s.$$

Wystarczy teraz spojrzeć na poprzedni przykład. $\square$

Dla porządku odnotujmy też nieco ogólniejszą wersję kryterium zagęszczeniowego.

Stwierdzenie 4.23 (kryterium zagęszczeniowe, wariant ogólny). *Jeśli (a_n) jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, a $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, to szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \textit{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,, \qquad \textit{gdzie} \quad b_n = k^n a_{k^n}\,,$$

są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

Dowód. Niezbyt trudne ćwiczenie dla zainteresowanych. $\square$

Warto zdawać sobie sprawę, że istnieją przykłady, które wymagają nieco subtelniejszej analizy, nie polegającej na szybkim stosowaniu gotowych kryteriów. Popatrzmy na dwa z nich.

Przykład 4.24. Niech p_n oznacza n-tą z kolei liczbę pierwszą, tzn. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11, \ldots$ Wykażemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \tag{4.6}$$

[3] Suma tego szeregu odgrywa bardzo ważną rolę w teorii liczb i jest nazywana *funkcją dzeta Riemanna*.

jest rozbieżny. Ustalmy liczbę N. Niech $\mathcal{P}_N = \{p : p \text{ pierwsza}, p \le N\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\exp\Bigl(\sum_{p\in\mathcal{P}_N}\frac{1}{p}\Bigr) &= \prod_{p\in\mathcal{P}_N}\exp(1/p)\\ &\ge \prod_{p\in\mathcal{P}_N}\Bigl(1+\frac{1}{p}\Bigr) \qquad \text{gdyż } \exp(x)\ge 1+x\\ &\ge \sum_{\substack{1\le n\le N\\ n \text{ bezkwadr.}}}\frac{1}{n}\,.\end{aligned}$$

W ostatniej linijce występuje suma odwrotności wszystkich liczb bezkwadratowych[4] n, $n \le N$; nietrudno zauważyć, że mnożąc wszystkie nawiasy $(1+\frac{1}{p})$ szkolną metodą 'każdy z każdym', otrzymamy tylko odwrotności liczb bezkwadratowych: wszystkich liczb bezkwadratowych $\le N$ i niektórych liczb bezkwadratowych $> N$.

Wiemy już, że $2 > \sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n^2}$ dla każdego N (patrz Przykład 4.10); mnożąc tę nierówność przez poprzednią, otrzymujemy

$$\begin{aligned}2\exp\Bigl(\sum_{p\in\mathcal{P}_N}\frac{1}{p}\Bigr) &\ge \Bigl(\sum_{\substack{1\le n\le N\\ n \text{ bezkwadr.}}}\frac{1}{n}\Bigr)\cdot\Bigl(\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n^2}\Bigr)\\ &\ge \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \overset{(4.2)}{\ge} \ln(N+1)\,.\end{aligned}$$

Zatem

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_N}\frac{1}{p} \ge \ln\ln(N+1) - \ln 2,$$

a więc sumy częściowe szeregu (4.6) nie są ograniczone.[5] □

Przykład 4.25 (szereg Kempnera)**.** Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem tych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym w ogóle nie występuje cyfra 9. Wtedy szereg

$$\sum_{n\in\mathcal{A}}\frac{1}{n}$$

jest *zbieżny*, a jego suma S nie przekracza liczby 80. Aby się o tym przekonać, oznaczmy

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A}\cap[10^{N-1}, 10^N - 1]$$

(jak widać, $\mathcal{A}_N$ to podzbiór $\mathcal{A}$ złożony z liczb N-cyfrowych). Liczba elementów $\mathcal{A}_N$ jest równa

$$\#\mathcal{A}_N = 8\cdot 9^{N-1},$$

[4]Mówimy, że n jest liczbą bezkwadratową, jeśli n nie dzieli się przez żaden pełny kwadrat różny od 1; równoważnie, n jest liczbą bezkwadratową, gdy jest iloczynem różnych liczb pierwszych.

[5]Rozbieżność szeregu odwrotności liczb pierwszych wykazał L. Euler w 1737 roku, w nieco inny sposób od zaprezentowanego tutaj.

gdyż pierwszą cyfrę różną od dziewiątki, *niezerową*, można wybrać na 8 sposobów, a każdą z $N-1$ kolejnych na 9 sposobów. Zatem

$$\sum_{n\in\mathcal{A}_N} \frac{1}{n} \le 8\cdot 9^{N-1}\cdot\frac{1}{10^{N-1}} = 8\left(\frac{9}{10}\right)^{N-1}.$$

Sumując te nierówności, nietrudno stwierdzić, że $S\le 80 = 8\sum q^j$, gdzie $q=9/10\in(0,1)$, a indeks $j=N-1$ przybiera wartości $0,1,2,\ldots$ □

Podamy, na zakończenie tego podrozdziału, jeszcze jedno bardzo ogólne kryterium zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich.

Stwierdzenie 4.26 (kryterium Kummera)**.** *Załóżmy, że $a_n>0$ dla wszystkich $n>n_1$. Wówczas szereg $\sum a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $\theta>0$ oraz liczby nieujemne b_n, że*

$$b_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \ge \theta \qquad \textit{dla wszystkich } n\ge n_0. \tag{4.7}$$

Dowód. Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to przyjmujemy $b_n=(1/a_n)\cdot\sum_{k=n+1}^\infty a_k$ dla $n>n_1$. Wtedy

$$b_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{1\cdot a_n}{a_n\cdot a_{n+1}}\sum_{k=n+1}^\infty a_k - \frac{1}{a_{n+1}}\sum_{k=n+2}^\infty a_k = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1,$$

więc warunek (4.7) zachodzi dla $\theta=1$ i $n\ge n_1$. Na odwrót, stosując (4.7) dla $n\ge n_2=\max(n_0,n_1)$, otrzymujemy

$$a_nb_n - a_{n+1}b_{n+1} \ge \theta a_{n+1} > 0 \tag{4.8}$$

więc począwszy od miejsca n_2 ciąg a_nb_n jest malejący i ma wyrazy dodatnie, tzn. ma granicę skończoną. Przeto szereg o wyrazach $\theta^{-1}(a_nb_n-a_{n+1}b_{n+1})$ jest zbieżny: jego sumy częściowe to $s_N=\theta^{-1}(a_1b_1-a_Nb_N)$. Z kryterium porównawczego i nierowności (4.8) wynika teraz zbieżność szeregu $\sum a_n$. □

Przykład 4.27. Kładąc w (4.7) $b_n=n$, otrzymujemy łatwo tzw. *kryterium Raabego*:[6]

Jeśli $a_n>0$ i istnieje taka liczba $s>1$, że

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\ge s \qquad \text{dla wszystkich } n\ge n_0, \tag{4.9}$$

to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

(Uwaga: Czytelnik może sprawdzić, że wykorzystując warunek (4.9) i własności funkcji wykładniczej, można wykazać, że dla $r\in(1,s)$ i wszystkich dostatecznie dużych n jest $a_{n+1}/a_n\le b_{n+1}/b_n$, gdzie $b_n=1/n^r$. Szereg $\sum 1/n^r$ jest zbieżny dla $r>1$. Zatem, niezależnie od kryterium Kummera, każdy szereg $\sum a_n$ spełniający warunek (4.9) jest zbieżny na mocy ilorazowej wersji kryterium porównawczego, patrz Stw. 4.14.)

Ćwiczenie 4.28. Proszę sprawdzić, jaki wniosek otrzymamy, biorąc w kryterium Kummera $b_n\equiv 1$ dla wszystkich n.

[6] A raczej: tę jego cześć, która służy do uzasadniania *zbieżności* szeregów, patrz np. książka Fichtenholza.

Czytelnik, który zetknął się z powyższymi kryteriami i przykładami, a także samodzielnie rozwiązał pewną liczbę zadań, może zadać sobie pytanie: czy istnieje jakiś *idealny, wzorcowy szereg*, którego zawsze można byłoby używać w kryterium porównawczym? Odpowiedź jest negatywna: dla każdego szeregu zbieżnego istnieje szereg, który jest zbieżny wolniej...

Przykład 4.29. Załóżmy, że $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i szereg $\sum b_n$ jest zbieżny. Niech

$$R_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j$$

oznacza różnicę między sumą szeregu $\sum b_n$ i jego n-tą sumą częściową. Wtedy oczywiście R_n maleje do 0, gdy $n \to \infty$. Przyjmijmy $a_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$ dla $n \geq 2$. Mamy

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sqrt{R_1} - \sqrt{R_n}$$

(suma liczb a_j jest teleskopowa), a więc szereg $\sum_{n\geq 2} a_n$ jest zbieżny i ma sumę równą $\sqrt{R_1}$. Jednak

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}}{R_{n-1} - R_n} = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} \longrightarrow +\infty,$$

czyli zbieżności szeregu $\sum a_n$ *nie można* wywnioskować ze zbieżności $\sum b_n$ i kryterium porównawczego!

4.2 Interludium: zbieżność ciągów i szeregów zespolonych

Do tej pory mówiliśmy wyłącznie o ciągach i szeregach w $\mathbb{R}$. Wiele obserwacji i wniosków, dotyczących takich ciągów i szeregów, można przenieść na ciągi i szeregi liczb zespolonych.[7] Nam w najbliższym czasie takie ciągi i szeregi przydadzą się do trzech rzeczy:

- określenia $\exp(z)$ dla $z \in \mathbb{C}$,
- ścisłego wprowadzenia funkcji trygonometrycznych,
- wskazania jasnego związku funkcji trygonometrycznych z funkcją wykładniczą.

Zacznijmy ponownie od definicji. Są one prostym uogólnieniem tego, co już znamy. Załóżymy, że Czytelnik zna (np. z wykładów algebry liniowej) pojęcie liczby zespolonej i jej modułu.

Definicja 4.30. Ciąg $(z_n) \subset \mathbb{C}$ jest zbieżny do granicy $z \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|z_n - z| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > n_0$.

[7] Użycie takich ciągów i szeregów jest rzeczą wygodną, nawet wtedy, gdy koniec końców interesują nas wyłącznie obliczenia mające fizyczny lub praktyczny sens. Podczas studiów matematycznych Czytelnik przekona się wielokrotnie, że liczby zespolone są niezwykle użytecznym narzędziem obliczeniowym; często bywa tak, że najkrótsza droga do nietrywialnego wzoru czy twierdzenia dotyczącego liczb rzeczywistych prowadzi przez dziedzinę zespoloną.

Intuicja związana z tą definicją jest prosta i w gruncie rzeczy taka sama, jak w $\mathbb{R}$: do każdej, choćby i bardzo małej, liczby dodatniej ε potrafimy dobrać taki moment n_ε, że począwszy od tego momentu wszystkie wyrazy ciągu (z_n) będą oddalone od z mniej niż o ε — tzn. znajdą się wewnątrz dysku $D(z,\varepsilon) = \{w \in \mathbb{C}\colon |w - z| < \varepsilon\}$.

Podobnie określa się zbieżne szeregi liczb zespolonych.

Definicja 4.31. Niech $(z_n) \subset \mathbb{C}$. Szereg $\sum z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych $s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ ma granicę $s \in \mathbb{C}$.

Zauważmy, że jeśli $w = a + ib \in \mathbb{C}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to

$$\max(|a|, |b|) \le |w| \le |a| + |b|. \tag{4.10}$$

Interpreacja geometryczna tej nierówności jest oczywista: przeciwprostokątna trójkąta o wierzchołkach $0, a, w = a + ib \in \mathbb{C}$ jest dłuższa, niż każda przyprostokątna z osobna, ale krótsza od sumy przyprostokątnych. Z tej łatwej nierówności otrzymujemy szybko następujące użyteczne wnioski.

Stwierdzenie 4.32. *Ciąg liczb $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$, gdzie $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, jest zbieżny do granicy $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Dowód. Zapisujemy (4.10) dla $w = z_n - z$, $a = x_n - x$ i $b = y_n - y$, a następnie korzystamy z definicji granicy i twierdzenia o trzech ciągach. □

Stwierdzenie 4.33. *Szereg $\sum z_n$, gdzie $z_n = x_n + iy_n$ dla pewnych $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są oba szeregi $\sum x_n$, $\sum y_n$.* □

Stwierdzenie 4.34. *Ciąg $(z_n) \subset \mathbb{C}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego:*

(C) Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $m, k > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|z_m - z_k| < \varepsilon$.

Dowód. Ze Stwierdzenia 4.32 i Twierdzenia 2.37 wynika, że zbieżność (z_n) jest równoważna koniunkcji warunków Cauchy'ego dla ciągów $(x_n) = (\operatorname{Re} z_n)$ i $(y_n) = (\operatorname{Im} z_n)$. Wobec nierówności (4.10), (x_n) i (y_n) spełniają warunek Caychy'ego (w $\mathbb{R}$) wtedy i tylko wtedy, gdy (z_n) spełnia warunek Cauchy'ego. □

Stwierdzenie 4.35. *Szereg liczb zespolonych $\sum z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

(S) Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|z_k + z_{k+1} + \cdots + z_m| < \varepsilon \qquad \textit{dla wszystkich } m > k > n_\varepsilon.$$

Dowód. To wynika z definicji szeregu zbieżnego i poprzedniego stwierdzenia. □

4.3 Szeregi o wyrazach dowolnych

4.3.1 Zbieżność bezwzględna i warunkowa

Definicja 4.36. Szereg $\sum z_n$ jest *bezwzględnie zbieżny* wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum |z_n|$ jest zbieżny.

Szereg, który jest zbieżny, ale nie bezwzględnie, nazywa się *warunkowo zbieżny*. Przykłady takich szeregów zobaczymy później; jednym z nich jest $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ (który nie jest bezwzględnie zbieżny, gdyż $\sum 1/n = \infty$).

Stwierdzenie 4.37. *Jeśli szereg $\sum z_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum z_n$ jest zbieżny.*

Dowód. Jeśli szereg $\sum z_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to, z definicji, szereg liczb nieujemnych $\sum |z_n|$ jest zbieżny, a więc spełnia warunek Cauchy'ego dla szeregów. Mamy jednak

$$|z_k + z_{k+1} + \cdots + z_m| \leq |z_k| + |z_{k+1}| + \cdots + |z_m|$$

dla wszystkich $m > k$, więc skoro $\sum |z_n|$ spełnia warunek Cauchy'ego, to i $\sum z_n$ spełnia ten warunek. To zaś oznacza, że $\sum z_n$ jest zbieżny. $\square$

Pojęcie zbieżności bezwzględnej jest ważne z uwagi na następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.38. *Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny, a $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dowolną bijekcją. Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ jest zbieżny, a ponadto*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

Innymi słowy, wyrazy szeregu bezwzględnie zbieżnego można dowolnie przestawiać; nie wpływa to ani na jego zbieżność, ani na wartość jego sumy.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$|z_k| + |z_{k+1}| + \cdots + |z_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{dla wszystkich } m > k \geq n_0$$

(istnienie takiej liczby n_0 wynika z bezwzględnej zbieżności $\sum z_n$ i warunku Cauchy'ego). Biorąc $k = n_0$ i przechodząc do granicy $m \to \infty$, otrzymujemy

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} |z_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Niech $m_j \in \mathbb{N}$ będzie taką liczbą, że $\sigma(m_j) = j$, gdzie $j = 1, 2, \ldots$, tzn. $m_j := \sigma^{-1}(j)$. Dla $n \in \mathbb{N}$ połóżmy $k(n) = n + \max(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Wtedy $k(n)$ jest ciągiem rosnącym.

Zauważmy, że dla numerów $l > k(n_0)$ mamy $\sigma(l) > n_0$, gdyż σ jest bijekcją i wartości $1, 2, \ldots, n_0$ przymuje w liczbach nie większych od $k(n_0)$. Zatem, dla wszystkich $m > k > n_1 = \max(n_0, k(n_0))$ spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned} |z_{\sigma(k)} + z_{\sigma(k+1)} + \cdots + z_{\sigma(m)}| &\leq |z_{\sigma(k)}| + |z_{\sigma(k+1)}| + \cdots + |z_{\sigma(m)}| \\ &\leq \sum_{j=n_0}^{\infty} |z_j| < \varepsilon \, . \end{aligned}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ spełnia więc warunek Cauchy'ego, tzn. jest zbieżny.

Ponadto, dla wszystkich $n \geq n_0$ jest

$$\left| \sum_{j=1}^{n} z_j - \sum_{j=1}^{k(n)} z_{\sigma(j)} \right| \leq \sum_{j \geq n_0} |z_n| < \varepsilon$$

a więc granica ciągu $s_n = z_1 + \cdots + z_n$ i granica wskazanego wyżej podciągu (o numerach $k(n)$) sum częściowych szeregu $\sum z_{\sigma(n)}$ różnią się co najwyżej o ε. Z dowolności ε wynika zatem, że obie wspomniane granice są równe, a więc sumy obu szeregów są równe. To kończy cały dowód. □

Założenie bezwzględnej zbieżności w ostatnim twierdzeniu jest istotne. Bez niego teza nie zachodzi. Co więcej, ma miejsce następujący zaskakujący fakt.

Twierdzenie 4.39 (Riemann)**.** *Jeśli* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *i szereg* $\sum a_n$ *jest warunkowo (ale nie bezwzględnie!) zbieżny, to dla każdej liczby rzeczywistej* x *istnieje taka bijekcja* $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$$

Dowód. Opiszemy dowód słowami, gdyż dzięki temu będzie bardziej zrozumiały. Zainteresowany Czytelnik zdoła samodzielnie uzupełnić drobne szczegóły.

Nietrudno zauważyć, że szereg $\sum a_n$ ma nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele wyrazów ujemnych, gdyż w przeciwnym razie wszystkie wyrazy o dostatecznie dużych numerach byłyby tego samego znaku, a więc $\sum a_n$ byłby nie tylko zbieżny, ale i bezwzględnie zbieżny.

Niech $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ będą kolejnymi numerami wyrazów ujemnych, a $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ — kolejnymi numerami wyrazów dodatnich szeregu $\sum a_n$. (Bez zmniejszenia ogólności załóżmy, że żadna z liczb a_n nie jest zerem.) Zauważmy, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} = -\infty, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} = +\infty\,.$$

Gdyby tak nie było, to oba powyższe szeregi byłyby zbieżne, a cały szereg $\sum a_n$ byłby zbieżny bezwzględnie.

Bijekcję σ budujemy indukcyjnie. Oto pierwsze dwa kroki konstrukcji.

Wybieramy najmniejszą liczbę m taką, że $a_{k_1} + \cdots + a_{k_m} > x$. Kładziemy $\sigma(1) = k_1$, $\sigma(2) = k_2$, …, $\sigma(m) = k_m$. Następnie zmniejszamy uzyskaną sumę, korzystając z ujemnych wyrazów szeregu: wybieramy najmniejszą liczbę s taką, że

$$a_{k_1} + \cdots + a_{k_m} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_s} < x$$

Przyjmujemy teraz $\sigma(m+1) = n_1$, $\sigma(m+2) = n_2$, …, $\sigma(m+s) = k_s$. Zarówno m, jak i s, są dobrze określone, gdyż szeregi wyrazów dodatnich i wyrazów ujemnych są rozbieżne. Niech $m_1 = m$, $m_2 = m + s$.

Załóżmy teraz, że wykonaliśmy N podobnych kroków, definiując $\sigma(j)$ dla wszystkich $j \leq m_N$, gdzie $m_N \geq N$. Wyrazy o numerach $\leq m_N$ są już *wykorzystane*, a wyrazy o numerach $> m_N$ — *jeszcze dostępne*. Załóżmy także, że (1) jeśli N jest nieparzyste, to

$$S_{m_N} = \sum_{j \leq m_N} a_{\sigma(j)} > x,$$

a także: (2) jeśli N jest parzyste, to

$$S_{m_N} = \sum_{j \le m_N} a_{\sigma(j)} < x$$

W kolejnym kroku w przypadku (1) dobieramy kolejne dostępne jeszcze (tzn. niewykorzystane wcześniej) ujemne wyrazy a_{k_j} szeregu, aż do momentu, gdy uzyskamy sumę częściową mniejszą od x. Można to osiągnąć, gdyż szereg wyrazów ujemnych jest rozbieżny. Natomiast w przypadku (2) dobieramy kolejne dostępne jeszcze wyrazy dodatnie, aż do momentu, gdy uzyskamy sumę częściową większą od x. Numery wyrazów, które wybieramy w $(N+1)$-szym kroku, to wartości σ w liczbach $m_N + 1, \ldots, m_{N+1}$.

Postępując indukcyjnie, definiujemy $\sigma\colon N \to N$. Jest to bijekcja, gdyż każdy wyraz wykorzystujemy tylko raz i każdy wyraz zostaje kiedyś wykorzystany. Łatwo zauważyć, że $\sigma(n) \to \infty$, gdy $n \to \infty$. Sumy częściowe S_n szeregu $\sum a_{\sigma(n)}$ oscylują wokół liczby x, gdyż tak były wybierane. W dodatku różnice między tymi sumami i liczbą x są coraz mniejsze, gdyż $a_n \to 0$ dla $n \to \infty$ (to jest warunek konieczny zbieżności szeregu $\sum a_n$).

Ściślej, nie jest trudno sprawdzić, że ciąg S_n spełnia warunek Cauchy'ego. To wynika z konstrukcji σ i zbieżności $a_n \to 0$. Ponadto, ciąg S_{m_N} jest zbieżny do x. Zatem, cały ciąg S_n też jest zbieżny do x. $\square$

Uwaga. Nietrudno sprawdzić, że jeśli $\sum a_n$ jest tylko warunkowo zbieżny, to można tak przestawić wyrazy, żeby po przestawieniu ciąg sum częściowych był rozbieżny do $+\infty$ (albo do $-\infty$). Czytelnik, po zapoznaniu się z dowodem twierdzenia Riemanna, bez większego trudu wskaże odpowiednie permutacje wyrazów.

Uwaga. Jeśli szereg liczb zespolonych $\sum z_n$ jest zbieżny warunkowo, ale nie bezwzględnie, to na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ istnieje taka prosta ℓ, że dla każdej liczby $w \in \ell$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = w$$

dla pewnej bijekcji $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

4.3.2 Przekształcenie Abela

W tym podrozdziale zajmiemy się opisem warunków, które pozwalają wnioskować, że szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny. Wygodnie będzie przyjąć następującą konwencję: jeśli wyrazy szeregu oznaczamy jakąś małą literą (np. $a, b, \ldots$), to sumy częściowe tego szeregu oznaczamy odpowiednią wielką literą ($A, B, \ldots$).

Twierdzenie 4.40 (Abel)**.** *Niech $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$. Załóżmy, że istnieje taka liczba $M > 0$, że $|A_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le M$ dla wszsytkich n, a ponadto*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty \qquad \textit{oraz} \qquad b_n \to 0 \quad \textit{dla } n \to \infty,$$

to wtedy szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

Dowód. Najpierw zapiszmy pomocniczy

Lemat. *Jeśli* (α_n) *jest ograniczonym ciągiem w* $\mathbb{C}$*, a szereg* $\sum \beta_n$ *jest bezwgzlędnie zbieżny, to szereg* $\sum \alpha_n\beta_n$ *jest bezwględnie zbieżny.*

(Dla dowodu wystarczy zauważyć, że jeśli $|\alpha_n| \le M$ dla wszystkich n, to wtedy $|\alpha_n\beta_n| \le M|\beta_n|$, a więc ze zbieżności szeregu $\sum |\beta_n|$ i kryterium porównawczego wynika zbieżność szeregu $\sum |\alpha_n\beta_n|$).

Teraz wykonujemy *przekształcenie Abela*, tzn. zapisujemy sumy częściowe szeregu $\sum a_nb_n$ w innej postaci, korzystając z równości $a_k = A_k - A_{k-1}$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_kb_k = b_1A_1 + \sum_{k=2}^n b_k(A_k - A_{k-1}) \\ &= \underbrace{A_1(b_1-b_2) + A_2(b_2-b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1}-b_n)}_{\text{patrz Lemat!}} + A_nb_n. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ostatni składnik, A_nb_n, jest zbieżny do zera, gdyż $|A_n| \le M$ i $b_n \to 0$. Pozostała, oznaczona klamrą, część sumy S_n, tzn.

$$A_1(b_1-b_2) + A_2(b_2-b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1}-b_n)$$

też ma granicę dla $n \to \infty$. To wynika z lematu, zastosowanego dla $\alpha_n = A_n$ oraz dla $\beta_n = b_n - b_{n+1}$. □

Wniosek 4.41 (kryterium Dirichleta). *Jeśli ciąg liczb rzeczywistych* b_n *maleje do zera, a sumy częściowe* A_n *szeregu* $\sum a_n$ *tworzą ciąg ograniczony, to szereg* $\sum a_nb_n$ *jest zbieżny.*

Dowód. Ponieważ $b_n \ge b_{n+1} > 0$ i $b_n \to 0$, więc

$$\sum_{n=1}^N |b_n - b_{n+1}| = \sum_{n=1}^N \big(b_n - b_{n+1}\big) = b_1 - b_{n+1} \to b_1 \qquad \text{dla } N \to \infty.$$

Można więc stosować twierdzenie Abela: spełnione są wszystkie jego założenia. □

Wniosek 4.42 (kryterium Leibniza). *Jeśli ciąg liczb rzeczywistych* b_n *maleje do zera, to szereg naprzemienny*

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} b_n$$

jest zbieżny.

Dowód. Przyjmujemy w kryterium Dirichleta $a_n = (-1)^{n+1}$; wtedy $|A_n| \le 1$ dla wszystkich n. □

Przykład 4.43. Szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac12 + \frac13 - \frac14 + \cdots$ jest zbieżny (ale oczywiście nie jest bezwgzlędnie zbieżny).

Przykład 4.44. Jeśli $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z \ne 1$, to szereg $\sum z^n/n$ jest zbieżny. To wynika z kryterium Dirichleta zastosowanego do $a_n = z^n$ i $b_n = 1/n$. Ciąg $b_n = 1/n$ maleje do zera, natomiast wartości bezwzględne sum częściowych

$$z + z^2 + \cdots + z^n = z \cdot \frac{1-z^n}{1-z}$$

są, niezależnie od n, ograniczone przez liczbę $M = 2/|1-z|$, gdyż $|1-z^n| \le 1 + |z|^n = 2$. Ponieważ $|z^n/n| = 1/n$, więc rozpatrywany szereg *nie jest* bezwzględnie zbieżny.

W tym przykładzie można zamiast $1/n$ użyć dowolnego ciągu b_n malejącego do zera i takiego, że $b_n \ge 1/n$ — żadna konkluzja nie ulegnie zmianie. □

Zadanie 4.45. Udowodnić kryterium Leibniza bezpośrednio, nie posługując się twierdzeniem Abela. (Wskazówka: zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągów (s_{2k}) i (s_{2k+1}), gdzie s_n oznacza n-tą sumę częściową rozważanego szeregu.)

Zadanie 4.46. Udowodnić następujące twierdzenie, nazywane czasem kryterium Abela:

> *Jeśli b_n jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, a szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.*

Wskazówka. Wykorzystać pierwszą linijkę (4.11) i wykazać, że ciąg S_n sum częściowych szeregu $\sum a_n b_n$ spełnia warunek Cauchy'ego.

4.3.3 Mnożenie szeregów i twierdzenie Mertensa

Ze zdroworozsądkowego punktu widzenia, mnożenie szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ powinno polegać na próbie sprawdzenia, czy zbieżny będzie szereg, który (w jakimś porządku) zawiera wszystkie składniki $a_i b_j$, które uzyskalibyśmy, mnożąc formalnie jedną sumę przez drugą. Czytelnik rozumie już, że zbieżność takiego szeregu może zależeć od tego, jak uporządkujemy liczby $a_i b_j$.

Definicja 4.47. Jeśli $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$, to iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg o wyrazach

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\,.$$

Innymi słowy, w iloczynie Cauchy'ego grupujemy $a_i b_j$ tak, aby w każdej grupie suma $i+j$ miała stałą wartość — tzn. postępujemy tak, jak przy mnożeniu wielomianów w szkole, gdzie nauczono nas grupować składniki z tą samą potęgą zmiennej x.

Twierdzenie 4.48 (F. Mertens)**.** *Jeśli szereg $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a szereg $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to ich iloczyn Cauchy'ego, tzn. szereg*

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right)$$

jest zbieżny. Ponadto, jeśli szereg A jest zbieżny bezwzględnie, to i szereg C jest zbieżny bezwzględnie.

Dowód. Niech, dla $n \ge 0$, zgodnie z przyjętą wcześniej konwencją, $C_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$ oznacza n-tą sumę częściową szeregu C. Wykorzystując definicję c_n, porządkujemy C_N, grupując wyrazy zawierające wspólny czynnik b_j:

$$\begin{aligned} C_N &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_N + a_1b_{N-1} + \cdots + a_Nb_0) \\ &= b_0(a_0 + a_1 + \cdots + a_N) + b_1(a_0 + a_1 + \cdots + a_{N-1}) + \cdots + b_Na_0 \\ &= \sum_{j=0}^{N} b_j A_{N-j}\,, \end{aligned}$$

gdzie $A_k = a_0 + \cdots + a_k$ dla $k \geq 0$. Wykażemy, że $\lim C_N = AB$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i liczbę $\eta > 0$, którą dopasujemy do ε później.

Mamy

$$|C_N - AB| = |C_N - AB_r + AB_r - AB| \leq |C_N - AB_r| + |A||B_r - B|\,. \tag{4.12}$$

Każdy ze składników prawej strony oszacujemy osobno, odpowiednio dobierając r.

Istnieje takie n_1, że dla wszystkich $r > n_1$ jest $|B_r - B| < \eta$ i $|A||B_r - B| \leq |A|\eta$, bo $\lim_{r\to\infty} B_r = B$. Ustalmy jedną z takich liczb r, wybierając ją tak, żeby spełniony był również warunek: $|A_n - A| < \eta$ dla wszystkich $n > r$.

Teraz oszacujemy składnik $|C_N - AB_r|$. Niech

$$\beta = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|,$$

i niech $M = \sup_n |A_n|$ ($M < \infty$, bo ciąg A_n jest zbieżny do A, a więc ograniczony). Wobec wykonanych wcześniej obliczeń i równości $B_r = b_0 + \cdots + b_r$, dla wszystkich $N > 2r$ mamy

$$\begin{aligned}
|C_N - AB_r| &= \left|\sum_{j=0}^{N} b_j A_{N-j} - A\sum_{j=0}^{r} b_j\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{r} b_j(A_{N-j} - A) + \sum_{j=r+1}^{N} b_j A_{N-j}\right| \\
&\leq \sup_{0\leq j\leq r} |A_{N-j} - A| \cdot \sum_{j=0}^{r} |b_j| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |A_n| \cdot \left|\sum_{j=r+1}^{\infty} b_j\right| \\
&\leq \eta\cdot\beta + M|B_r - B| \qquad \text{bo } N > 2r, \text{ a więc } n = N - j > r \\
&\leq \eta(\beta + M)\,.
\end{aligned}$$

Wracając teraz do (4.12) i dodając uzyskane oszacowania obu składników prawej strony, otrzymujemy

$$|C_N - AB| \leq \eta(\beta + M + |A|) < \eta(\beta + M + |A| + 1) \qquad \text{dla wszystkich } N > 2r.$$

Wybierając $\eta = \varepsilon(\beta + M + |A| + 1)^{-1}$, kończymy dowód zbieżności C_N do AB.

Aby wykazać ostatnią część twierdzenia, tzn. zbieżność *bezwzględną* szeregu C przy założeniu bezwzględnej zbieżności *obu* szeregów A i B, zauważamy, że

$$|c_n| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot |b_{n-j}|$$

i stosujemy pierwszą część twierdzenia do iloczynu zbieżnych bezwzględnie szeregów $\sum |a_n|$, $\sum |b_n|$, otrzymując zbieżność szeregu $\sum |c_n|$ z kryterium porównawczego. □

Założenie zbieżności bezwzględnej jednego z szeregów A, B jest w twierdzeniu Mertensa istotne.

Przykład 4.49. Niech $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$. Szeregi $A = \sum a_n$ i $B = \sum b_n$ są wtedy zbieżne. To wynika z kryterium Leibniza. Jednak

$$\begin{aligned} |c_n| = \left|\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right| &= |(-1)^n| \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{j+1}\cdot\sqrt{n-j+1}} \\ &\geq \sum_{j=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1\,. \end{aligned}$$

Zatem $c_n \not\to 0$, więc szereg $C = \sum c_n$ jest rozbieżny. (Aby uzyskać środkową nierówność, zastosowaliśmy nierówność między średnimi: $\sqrt{j+1}\cdot\sqrt{n-j+1} \leq \frac{(j+1)+(n-j+1)}{2} = \frac{n+2}{2}$.)

Na zakończenie tego podrozdziału sformułujemy jeszcze jedno twierdzenie, które uzupełnia twierdzenie Mertensa.

Twierdzenie 4.50 (E. Cesàro)**.** *Jeśli szeregi $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oraz $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to ich iloczyn Cauchy'ego, tzn. szereg*

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right)$$

ma następującą własność:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_N}{N+1} = AB,$$

gdzie

$$C_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\,.$$

Szkic dowodu. Jak w dowodzie twierdzenia Mertensa, sprawdzamy, że

$$C_k = b_0 A_k + b_1 A_{k-1} + \cdots + b_k A_0\,.$$

Sumując takie równości dla $k = 0, 1, \ldots, N$, otrzymujemy

$$C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_N = B_0 A_N + B_1 A_{N-1} + \cdots + B_N A_0 = \sum_{j=0}^{N} B_j A_{N-j}\,.$$

Dlatego

$$\frac{C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_N}{N+1} - AB = \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N}(B_j A_{N-j} - AB) \equiv (*)\,.$$

Jeśli zarówno j, jak i $N-j$ są odpowiednio duże, to składnik $B_j A_{N-j} - AB$ jest mały. Trzeba jednak uporać się z oszacowaniem wielu takich składników, oraz uwzględnić inne! Dlatego weźmiemy $N > 3k \gg 1$ i podzielimy ostatnią sumę $(*)$ na trzy części:

- *ogon lewy*, tzn. k składników o numerach $j = 0, 1, \ldots, k-1$;

- *środek,* tzn. $(N+1)-2k$ składników takich, gdzie zarówno j, jak i $N-j$ są równe co najmniej k;
- *ogon prawy*, tzn. k składników o numerach j takich, że $N-j=0,1,\ldots,k-1$.

Ustalmy $\varepsilon>0$ i $\eta>0$. Ciągi A_s, B_s są ograniczone, gdyż są zbieżne. Niech

$$M > 1 + \sup_{s\in\mathbb{N}} |A_s| + \sup_{s\in\mathbb{N}} |B_s| + |A| + |B| > 0\,.$$

Każdy składnik lewego ogona jest nie większy od $2M^2$ (brutalne użycie nierówności trójkąta pozwala oszacować różnicę iloczynów przez sumę modułów iloczynów), a zatem cały lewy ogon ma sumę równą co najwyżej $2M^2\cdot k/(N+1)$. Podobnie, suma prawego ogona nie przekracza $2M^2\cdot k/(N+1)$. Ustalmy teraz $k=k(\eta)$ tak, aby

$$\max(|A_j-A|,|B_j-B|)<\eta \qquad \text{dla wszystkich } j\ge k.$$

Nietrudno sprawdzić, że przy takim warunku *środek* ma sumę nie większą niż

$$\frac{N+1-2k}{N+1}\cdot 2M\cdot\eta < 2M\eta$$

(liczba składników środka razy oszacowanie składnika z góry[8]). Dlatego

$$|(*)| \le |\text{ogon lewy}| + |\text{środek}| + |\text{ogon prawy}| \le \frac{2M^2k}{N+1} + 2M\eta + \frac{2M^2k}{N+1}\,.$$

Biorąc $\eta=\varepsilon/4M$ i $N>N_1=\max\bigl(3k,(8M^2k)/\varepsilon\bigr)$, otrzymamy powyżej prawą stronę mniejszą od $\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$. $\square$

Zadanie 4.51. Korzystając z twierdzenia Cesàro, wykazać, że jeśli iloczyn Cauchy'ego szeregów $A=\sum a_n$ i $B=\sum b_n$ *jest zbieżny*, to jego suma C jest równa AB.

Wskazówka: skorzystać z twierdzenia Stolza i Przykładu A.4.

4.4 Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej

Zaczniemy, jak w przypadku zmiennej rzeczywistej, od twierdzenia, które mówi o istnieniu pewnej granicy.

Twierdzenie 4.52. *Dla każdej liczby zespolonej $z\in\mathbb{C}$ ciąg $a_n(z)=(1+\frac{z}{n})^n$ i ciąg $b_n(z)$ sum częściowych szeregu*

$$b(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

są zbieżne do tej samej granicy. Szereg $b(z)$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $z\in\mathbb{C}$.

[8] Bardzo uważny Czytelnik zechce sprawdzić, że można zamiast $2M$ napisać M; to i tak nie ma szczególnego znaczenia.

Dowód. *Krok 1.* Ponieważ dla wszystkich $n > 2|z|$ jest

$$\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} < \frac{1}{2} = \frac{(1/2)^{n+1}}{(1/2)^n},$$

więc z ilorazowej wersji kryterium porównawczego wynika, że szereg $b(z)$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdej liczby $z \in \mathbb{C}$.

Krok 2. Wykażemy, że $\lim_{n\to\infty} a_n(z) = b(z)$. Mamy

$$|a_n(z) - b(z)| \le |a_n(z) - b_k(z)| + |b_k(z) - b(z)|.$$

Każdy składnik oszacujemy osobno, dobierając najpierw dużą liczbę k, a potem dostatecznie duże $n > k$. Z dwumianu Newtona otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_n(z) - b_k(z) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \sum_{j=0}^{k}\frac{z^j}{j!} &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{z^j}{n^j} - \sum_{j=0}^{k}\frac{z^j}{j!} \\ &= 1 + z + \sum_{j=2}^{n}\frac{z^j}{j!}\cdot\frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{n^j} - \sum_{j=0}^{k}\frac{z^j}{j!} \\ &= \alpha_{k,n}(z) + \beta_{k,n}(z), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_{k,n}(z) &= \sum_{j=2}^{k}\frac{z^j}{j!}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{j-1}{n}\right) - 1\right] \\ \beta_{k,n}(z) &= \sum_{j=k+1}^{n}\frac{z^j}{j!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{j-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Stąd

$$|a_n(z) - b(z)| \le |\alpha_{k,n}(z)| + |\beta_{k,n}(z)| + |b_k(z) - b(z)|\,. \tag{4.13}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i rozpatrzmy składniki prawej strony (4.13). Po pierwsze,

$$\begin{aligned} |\alpha_{k,n}(z)| &\le \sum_{j=2}^{k}\frac{|z|^j}{j!}\cdot\max_{2\le j\le k}\left[1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{j-1}{n}\right)\right] \\ &\le b(|z|)\cdot\left(1-\left(1-\frac{k}{n}\right)^k\right) \qquad \text{(i sumę, i maksimum szacujemy osobno)} \\ &\le b(|z|)\cdot\frac{k^2}{n}\,. \end{aligned}$$

Aby napisać ostatnią linijkę, skorzystaliśmy dla liczb k oraz $n > k$ z nierówności Bernoulli'ego $(1-k/n)^k \ge 1 - k^2/n$.

Po drugie, z nierówności trójkąta,

$$|\beta_{k,n}(z)| \le \sum_{j=k+1}^{n}\frac{|z|^j}{j!} = b_n(|z|) - b_k(|z|) = \Big|b_n(|z|) - b_k(|z|)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dla wszystkich $n > k > n_0$, gdyż ciąg $b_n(|z|)$ jest zbieżny jako ciąg sum częściowych zbieżnego szeregu $b(|z|)$, a więc spełnia warunek Cauchy'ego.

Ustalmy teraz jakiekolwiek konkretne $k > n_0$, tak, aby prócz powyższej nierówności na $\left|\beta_{k,n}(|z|)\right|$ mieć także $|b_k(z) - b(z)| < \varepsilon/3$. Jest to możliwe, gdyż $b_k(z) \to b(z)$ dla $k \to \infty$.

Na koniec wybierzmy $n_1 > k$, tak, aby dla wszystkich $n > n_1$ mieć

$$|\alpha_{k,n}(z)| \le b(|z|)\frac{k^2}{n} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Widać, że wystarczy wziąć $n_1 > 3k^2 b(|z|)/\varepsilon$. Przy takim doborze n_1 każdy z trzech składników prawej strony nierówności (4.13) będzie mniejszy od $\varepsilon/3$. Zatem, wprost z definicji granicy, $\lim_{n\to\infty} a_n(z) = b(z)$. □

Definicja 4.53. Dla każdej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ kładziemy

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Jak widać, dla rzeczywistych z określamy tę samą funkcję, co w poprzednim rozdziale.

Twierdzenie 4.54 (własności exp w dziedzinie zespolonej)**.** *Funkcja* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ma następujące własności:*

(i) $\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w$ *dla wszystkich* $z, w \in \mathbb{C}$*;*

(ii) Dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ *jest* $\exp z \neq 0$*,* $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$*.*

(iii) Dla $z = iy$*, gdzie* $y \in \mathbb{R}$*, mamy* $\overline{\exp(iy)} = \exp(-iy)$ *oraz* $|\exp(iy)| = 1$*.*

(iv) Dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ *jest* $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$*.*

(v) Dla każdego zbieżnego do zera ciągu $(z_n) \subset \mathbb{C}$ *(*$z_n \neq 0$ *dla wszystkich* n*) i dla każdego* $w \in \mathbb{C}$ *zachodzi równość*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\exp(w + z_n) - \exp(w)}{z_n} = \exp(w). \tag{4.14}$$

Dowód. Własność (i) udowodnimy, posługując się twierdzeniem Mertensa i równością

$$\exp(z) = b(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Ponieważ szereg $b(z)$ jest zbieżny bezwzględnie dla wszystkich z, więc $b(z)b(w)$ jest, wobec twierdzenia Mertensa, sumą iloczynu Cauchy'ego (szeregu $b(z)$ i szeregu $b(w)$). Inaczej mówiąc, iloczyn $\exp(z)\exp(w)$ to

$$\begin{aligned}
b(z)b(w) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\cdot\frac{w^{n-j}}{(n-j)!}\right) && \text{(z definicji iloczynu Cauchy'ego i tw. Mertensa)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^j\cdot w^{n-j}\right) && \text{(dopisujemy } n! \text{ w liczniku i mianowniku)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n && \text{(korzystamy z dwumianu Newtona)}\\
&= b(z+w) = \exp(z+w).
\end{aligned}$$

Własność (ii) wynika z równości $\exp(0) = 1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots = 1$ i własności (i), gdyż $\exp(z)\exp(-z) = \exp\big(z + (-z)\big) = \exp(0) = 1$.

Aby sprawdzić (iii), korzystamy z równości $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{z_k} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty} z_k}$, która łatwo wynika ze Stwierdzenia 4.32. Piszemy

$$\overline{\exp(iy)} = \lim_{k\to\infty} \overline{\left(1 + \frac{iy}{k}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{iy}{k}\right)^k = \exp(-iy)\,.$$

Stąd

$$|\exp(iy)|^2 = \exp(iy)\cdot\overline{\exp(iy)} = \exp(iy)\exp(-iy) = \exp\big(iy + (-iy)\big) = 1\,.$$

Własność (iv) jest prostą konsekwencją (iii) oraz (i). Jeśli $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$|\exp(z)| = |\exp(x)| \cdot |\exp(iy)| = |\exp(x)| \cdot 1 = \exp(x)\,.$$

Ostatnią równość piszemy bez wahania, gdyż dla $x \in \mathbb{R}$ jest $\exp(x) = \big(\exp(x/2)\big)^2 > 0$.

Została nam do udowodnienia własność (v). Podobnie jak w przypadku funkcji wykładniczej zmiennej rzeczywistej, nietrudno zauważyć, że wystarczy wykazać, iż

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(z_n) - 1}{z_n} = 1 \tag{4.15}$$

dla każdego ciągu $(z_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z_n \to 0$ dla $n \to \infty$. Dla wszystkich liczb z takich, że $|z| \le 1$, mamy[9]

$$\begin{aligned}
|\exp(z) - 1 - z| &= \left|\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right| \\
&\le \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^4}{4!} + \cdots \\
&\le |z|^2\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right) \qquad (\text{bo } 1 \ge |z|^2 \ge |z|^3 \ge |z|^4 \ge \ldots) \\
&= |z|^2(e-2)\,.
\end{aligned}$$

Zatem, jeśli $z_n \to 0$, $z_n \neq 0$, to dla wszystkich dostatecznie dużych n jest

$$0 \le \left|\frac{\exp(z_n) - 1}{z_n} - 1\right| = \left|\frac{\exp(z_n) - 1 - z_n}{z_n}\right| \le |z_n|(e-2)\,.$$

Równość (4.15) wynika teraz z twierdzenia o trzech ciągach. □

Wniosek 4.55 (ciągłość funkcji $\exp$ na $\mathbb{C}$). *Jeśli $(\xi_n) \subset \mathbb{C}$ i $\xi_n \to \xi$ dla $n \to \infty$, to wówczas $\exp(\xi_n) \to \exp(\xi)$ dla $n \to \infty$.*

Dowód. Niech najpierw $\xi_n \to 0$. Wtedy, wobec własności (v) z poprzedniego twierdzenia oraz arytmetycznych własności granicy,

$$\exp(\xi_n) = \xi_n \cdot \underbrace{\frac{\exp(\xi_n) - 1}{\xi_n}}_{\to 1,\ \text{własność (v)}} + 1 \longrightarrow 0 \cdot 1 + 1 = 1 = \exp(0)\,.$$

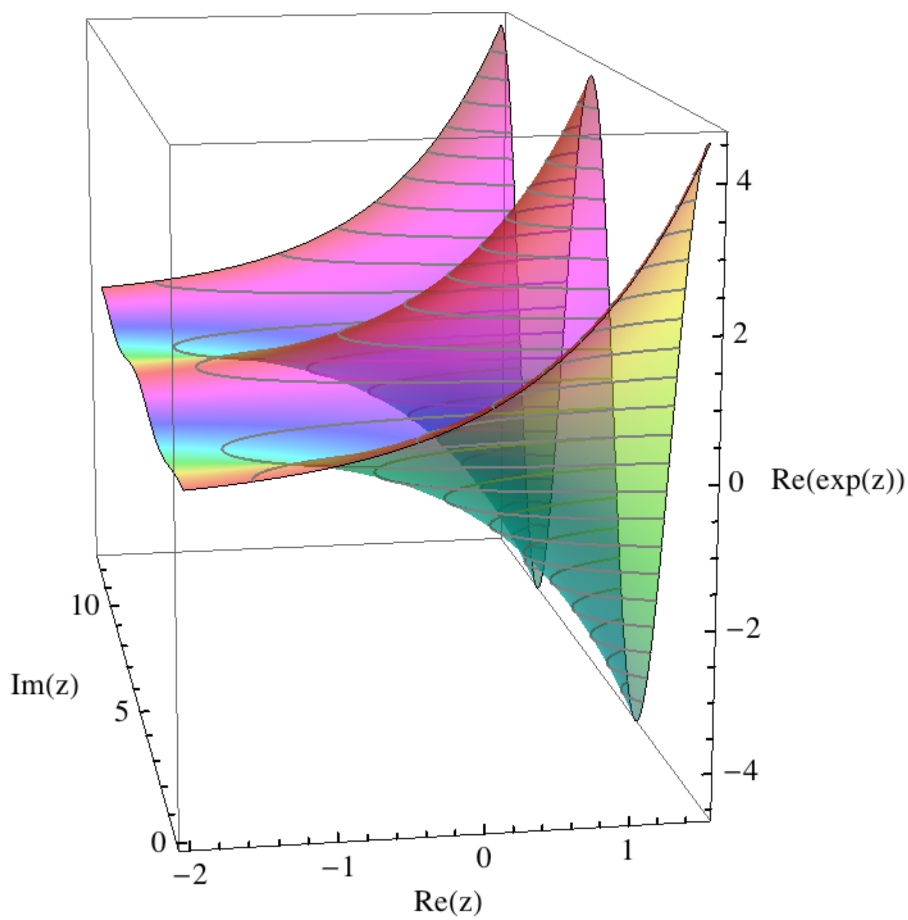
[9] Uwaga: formalnie biorąc, zaprezentowany tu rachunek jest oczywisty. Korzystamy w nim jednak z *ciągłości modułu:* jeśli $w_k \to w$, to $|w_k| \to |w|$ dla $k \to \infty$.

Korzystając z tej równości i z własności grupowej $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$, w przypadku ogólnym piszemy

$$\exp(\xi_n) = \exp(\xi_n - \xi) \cdot \exp(\xi) \to 1 \cdot \exp(\xi) = \exp(\xi)\,,$$

gdyż $\xi_n - \xi \to 0$. Dowód jest zakończony. $\square$

Uwaga. Czytelnik zechce zauważyć, że schemat dowodu jest w gruncie rzeczy taki sam, jak w przypadku rzeczywistym: dowodzimy *najpierw* różniczkowalności $\exp$, a potem ciągłości $\exp$. Kluczem do obu własności jest oszacowanie modułu różnicy $\exp(z) - 1 - z$ dla małych z. W przypadku rzeczywistym *najpierw* dowodziliśmy oszacowania (E6) w Twierdzeniu 3.2, a z niego wynikała i różniczkowalność, i ciągłość funkcji wykładniczej.



Portret $\exp$**, I.** Wykres funkcji $f(x,y) = \mathrm{Re}\,(\exp(x+iy))$ nad prostokątem $-2 \le x \le 1.5$, $0 \le y \le 12.56$; innymi słowy, wysokość punktu powierzchni nad dolnym dnem pudełka jest równa $\mathrm{Re}\,(\exp(x+iy))$. Szare linie to poziomice (jak na mapie: wysokość na poziomicy ma jedną, ustaloną wartość. Kolory powierzchni zależą liniowo od części urojonej liczby $\exp(x+iy)$. Przednia krawędź powierzchni odpowiada wartości $y = \mathrm{Im}\, z = 0$: widzimy wykres $\exp$ na $\mathbb{R}$.

Na zakończenie tego podrozdziału wykażemy, że funkcja wykładnicza jest *jednoznacznie wyznaczona* przez dwie swoje własności.

Twierdzenie 4.56 (charakteryzacja $\exp$**).** *Załóżmy, że funkcja* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *spełnia dwa warunki:*

(i) Dla wszystkich $z, w \in \mathbb{C}$ *jest* $f(z+w) = f(z)f(w)$*;*

(ii) Dla każdego zbieżnego do zera ciągu liczb zespolonych z_n *(*$z_n \neq 0$ *dla wszystkich* n*) zachodzi równość*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)-1}{z_n} = 1\,.$$

Wówczas $f(z) = \exp(z)$ *dla każdego* $z \in \mathbb{C}$*.*

Zanim podamy dowód tego twierdzenia, sformułujemy zespolony odpowiednik lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1.

Lemat 4.57. *Jeśli* ε_n *jest ciągiem liczb zespolonych takim, że* $n\varepsilon_n \to 0$ *dla* $n \to \infty$*, to wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} (1+\varepsilon_n)^n = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n\Big)^n = \exp z$$

dla każdego $z \in \mathbb{C}$*.*

Dowód Lematu 4.57. Najpierw udowodnimy pierwszą równość. Z nierówności trójkąta, zastosowanej do sumy, którą otrzymujemy, rozpisując $(1+\varepsilon_n)^n - 1$ z użyciem dwumianu Newtona, wynika, że

$$0 \le \big|(1+\varepsilon_n)^n - 1\big| \le (1+|\varepsilon_n|)^n - 1$$

Jednak z Lematu 3.1 wynika, że ciąg $(1+|\varepsilon_n|)^n - 1$ jest zbieżny do 0, więc na mocy twierdzenia o trzech ciągach $(1+\varepsilon_n)^n \to 1$.

Druga podana w lemacie równość wynika łatwo z twierdzenia o granicy iloczynu ciągów i definicji funkcji wykładniczej, gdyż

$$\Big(1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n\Big)^n = \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n \cdot \big(1 + \varepsilon'_n\big)^n$$

dla $\varepsilon'_n = \varepsilon_n/(1 + \frac{z}{n})$. Oczywiście $n\varepsilon'_n \to 0$, więc z pierwszej cześci lematu $(1+\varepsilon'_n)^n \to 1$, a zatem każda ze stron powyższej równości ma dla $n \to \infty$ granicę równą $\exp(z)$. □

Dowód Twierdzenia 4.56. Ustalmy dowolny punkt $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Oznaczmy

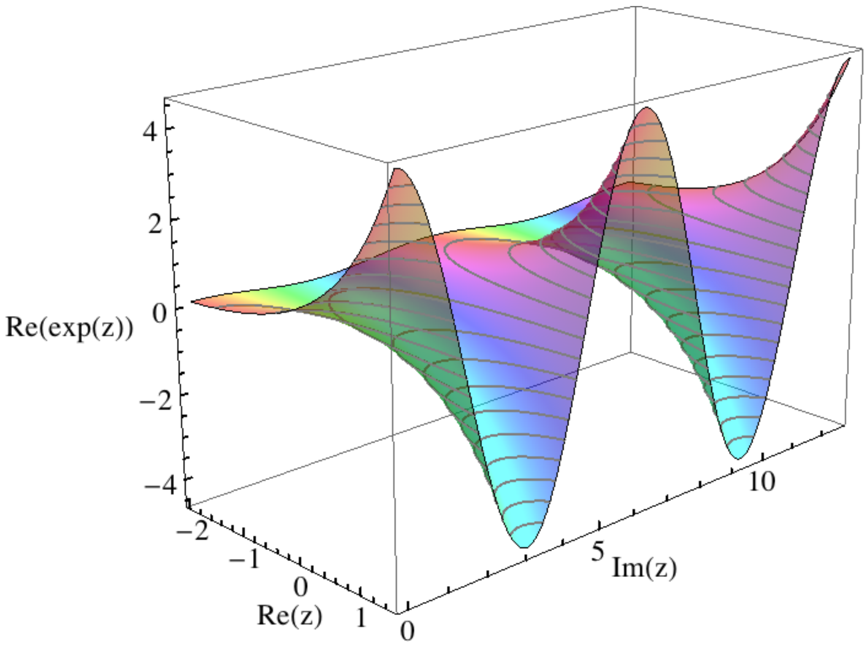
$$\delta_n = \frac{f(z/n) - 1}{z/n} - 1, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Z założenia (ii) wynika, że $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 1 - 1 = 0$. Używając wzoru definiującego δ_n do wyznaczenia wartości $f(z/n)$, otrzymujemy

$$f\Big(\frac{z}{n}\Big) = 1 + \frac{z + z\delta_n}{n} = 1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n\,,$$

gdzie $\varepsilon_n = z\delta_n/n$ jest ciągiem liczb zespolonych takim, że $n\varepsilon_n \to 0$ dla $n \to \infty$. Z Lematu 4.57 otrzymujemy i założenia (i) otrzymujemy teraz

$$f(z) = f\Big(\frac{z}{n} + \cdots + \frac{z}{n}\Big) = f\Big(\frac{z}{n}\Big)^n = \Big(1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n\Big)^n \to \exp(z) \qquad \text{dla } n \to \infty.$$



Portret exp**, II.** Wykres funkcji $f(x, y) = \mathrm{Re}\,(\exp(x + iy))$ nad prostokątem $-2 \leq x \leq 1.5$, $0 \leq y \leq 12.56$. Widok z innej strony. Przednia krawędź nie bez powodu wygląda tak, jak sinusoida. Związek funkcji wykładniczej z trygonometrycznymi poznamy w następnym podrozdziale. Tu widać, że zarówno wysokości, jak i kolory powtarzają się w kierunku osi urojonej. Wykażemy później, że funkcja wykładnicza *jest okresowa* — w kierunku osi urojonej!

Lewa strona nie zależy w ogóle od n, więc mamy po prostu $f(z) = \exp(z)$. Teza wynika z dowolności z; wprawdzie pominęliśmy w rozważaniach $z = 0$, ale $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$, tzn. $f(0) = 0$ lub 1 — pierwszą możliwość odrzucamy, gdyż prowadziłaby do $f \equiv 0$, co jest sprzeczne z założeniem (ii). □

Dla zainteresowanych przytoczymy jeszcze kilkanaście linijek kodu, które posłużyły do narysowania powyższych wykresów w programie Mathematica (jest on dostępny w laboratorium komputerowym MIM). Różne widoki powierzchni można było uzyskać, obracając gotowy rysunek myszką na ekranie.

```
Plot3D[Re[Exp[x + I*y]], {x, -2, 1.5}, {y, 0, 4*Pi},
  PlotPoints -> {100, 100},
  BoxRatios -> {1, 2, 1.3}, PlotRange -> All,
  TicksStyle -> Directive[Black, Thick, 24],
  PlotStyle -> Directive[Opacity[0.5]],
  ColorFunction -> (Hue[(Arg[Exp[#1 + I*#2]])/(2*Pi)] &),
  ColorFunctionScaling -> False,
  MeshFunctions -> (#3 &),
  MeshStyle -> {Gray, Thick},
  Mesh -> 20, ImageSize -> 700,
  PerformanceGoal -> "Quality",
  AxesLabel
    -> (Style[#, 24] & /@ {"Re(z)", "Im(z)", "Re(exp(z))"})
 ]
```

4.5 Funkcje trygonometryczne

Istnieje wiele równoważnych sposobów ścisłego definiowania funkcji trygonometrycznych. Jeden z nich polega na wykorzystaniu ich związku z funkcją wykładniczą zmiennej zespolonej.

Definicja 4.58. Dla każdej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ przyjmujemy

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \qquad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

Wzory użyte w tej definicji będziemy nazywać *wzorami Eulera*.

Twierdzenie 4.59 (własności funkcji trygonometrycznych). *Dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzą równości:*

(T1) $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$.

(T2) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$*, a ponadto*

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots, \tag{4.16}$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \tag{4.17}$$

(i oba szeregi są bezwzględnie zbieżne).

Wreszcie,

(T3) *dla każdego ciągu $(z_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, który jest zbieżny do zera, zachodzą równości*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin z_n}{z_n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos z_n - 1}{z_n} = 0.$$

Dowód. Wprost z definicji funkcji trygonometrycznych i równości

$$\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
(\cos z)^2 + (\sin z)^2 &= \left(\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{\exp(2iz) + 2 + \exp(-2iz)}{4} + \frac{\exp(2iz) - 2 + \exp(-2iz)}{-4} \\
&= \frac{4}{4} = 1,
\end{aligned}$$

tzn. własność (T1). Mamy także

$$\cos z + i \sin z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} + i\,\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \exp(iz).$$

Z definicji cosinusa,

$$2\cos z = \exp(iz) + \exp(-iz) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{i^k z^k}{k!} + \frac{(-i)^k z^k}{k!}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\left(i^k + (-i)^k\right).$$

Ponieważ

$$i^k + (-i)^k = \left(1 + (-1)^k\right) i^k = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k \text{ jest nieparzyste,} \\ 2, & \text{gdy } k \text{ jest podzielne przez } 4, \\ -2, & \text{gdy } k = 4l-2 \text{ dla pewnego } l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

więc łatwo wynika stąd wzór (4.16) (zostają tylko składniki o parzystych numerach, ze znakami na przemian). Zbieżność bezwzględna szeregu (4.16), tzn. zbieżność szeregu

$$1 + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^4}{4!} + \frac{|z|^6}{6!} + \cdots$$

wynika stąd, że j-ta suma częściowa nie przekracza $(2j-1)$-szej sumy cześciowej szeregu

$$1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^4}{4!} + \frac{|z|^5}{5!} + \cdots = \exp(|z|).$$

Podobnie dowodzimy wzoru (4.17) i bezwzględnej zbieżności występującego w nim szeregu. To kończy dowód własności (T2).

Dla dowodu (T3) ustalmy ciąg $z_n \to 0$ ($z_n \neq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$) i napiszmy

$$\frac{\sin z_n}{z_n} = \frac{\exp(iz_n) - \exp(-iz_n)}{2iz_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\exp(iz_n)-1}{iz_n} + \frac{\exp(-iz_n)-1}{-iz_n}\right).$$

Z własności (v) zespolonej funkcji wykładniczej wynika, że każdy ze składników w nawiasie ma dla $n \to \infty$ granicę równą 1, więc z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic otrzymujemy $(\sin z_n)/z_n \to 1$. Podobnie radzimy sobie z cosinusem, pisząc

$$\frac{\cos z_n - 1}{z_n} = \frac{\exp(iz_n) + \exp(-iz_n) - 2}{2z_n} = \frac{i}{2}\left(\frac{\exp(iz_n)-1}{iz_n} + \frac{\exp(-iz_n)-1}{iz_n}\right).$$

Tym razem dla $n \to \infty$ pierwszy składnik w nawiasie ma granicę równą 1, a drugi granicę równą -1. Dlatego ich suma ma granicę 0. □

Ze wzorów (4.16), (4.17) otrzymujemy natychmiast

Wniosek 4.60. *Dla każdego* $z \in \mathbb{C}$ *jest* $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$. □

Wniosek 4.61. *Jeśli* $x \in \mathbb{R}$*, to* $\sin x, \cos x \in \mathbb{R} \cap [-1, 1]$. *Ponadto,* $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

Dowód. Sumy szeregów (4.16) i (4.17) są, rzecz jasna, liczbami rzeczywistymi, gdy $z = x \in \mathbb{R}$. To, że $\sin x$ oraz $\cos x$ należą do przedziału $[-1, 1]$, wynika z własności (T1). Wartości sinusa i cosinusa w zerze obliczamy, wstawiając $z = 0$ we wzorach (4.17) i (4.16). □

Wniosek 4.62 (ciągłość funkcji trygonometrycznych). *Dla każdego ciągu* $(z_n) \subset \mathbb{C}$ *takiego, że* $\lim z_n = z \in \mathbb{C}$*, mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \sin z_n = \sin z, \qquad \lim_{n\to\infty} \cos z_n = \cos z.$$

Dowód. To wynika ze wzorów Eulera i Wniosku 4.55 (ciągłości funkcji wykładniczej). □

Stwierdzenie 4.63. *Dla dowolnych liczb zespolonych $z, w \in C$ zachodzą równości*

$$\begin{aligned}\cos z - \cos w &= -2\sin\frac{z-w}{2}\sin\frac{z+w}{2}\,,\\ \sin z - \sin w &= 2\sin\frac{z-w}{2}\cos\frac{z+w}{2}\,.\end{aligned}$$

Dowód. Oba wzory uzyskujemy z czysto szkolnych rachunków, stosując definicję sinusa i cosinusa oraz własność $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$. Sprawdźmy dla przykładu wzór na różnicę cosinusów. Jego prawa strona to

$$\begin{aligned}-2\sin\frac{z-w}{2}\sin\frac{z+w}{2} &= \frac{-2}{2i\cdot 2i}\left(e^{i(z-w)/2} - e^{-i(z-w)/2}\right)\left(e^{i(z+w)/2} - e^{-i(z-w)/2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} - e^{iw} - e^{-iw} + e^{iz}\right)\\ &= \cos z - \cos w\,.\end{aligned}$$

Wzór na różnicę sinusów uzyskujemy podobnie. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi. □

4.6 Liczba π

Czytelnik, który zna funkcje trygonometryczne ze szkoły, zauważył zapewne, że dotychczas nie dysponujemy formalnym opisem miejsc zerowych tych funkcji. Aby ten opis uzyskać i przy okazji zdefiniować liczbę π, udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.64. *W przedziale $(0, 2)$ funkcja $\cos$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.*

Dowód tego twierdzenia poprzedzimy serią nieskomplikowanych lematów, które komuś, kto myśli: *przecież widziałem już kiedyś wykresy sinusa i cosinusa, a ponadto wiem, że jedyne miejsce zerowe cosinusa w przedziale $(0, 2)$ to $\pi/2 = 1{,}57\ldots$*, mogą się wydawać oczywiste, ale pamiętajmy: funkcje trygonometryczne to dla nas obiekty zdefiniowane wzorami Eulera! Chcemy sprawdzić ich własności, odwołując się wyłącznie do definicji i do tego, co już wykazaliśmy w sposób ścisły.

Lemat 4.65. *Dla każdego $y \in (0, 2]$ zachodzą nierówności $y > \sin y > 0$.*

Dowód. Dzięki (4.17) mamy

$$\sin y = y - \lim_{n\to\infty} s_n(y),$$

gdzie

$$s_n(y) = \left(\frac{y^3}{3!} - \frac{y^5}{5!}\right) + \left(\frac{y^7}{7!} - \frac{y^9}{9!}\right) + \cdots + \left(\frac{y^{4n-1}}{(4n-1)!} - \frac{y^{4n+1}}{(4n+1)!}\right)\,.$$

Każdy z nawiasów jest dodatni dla $y \in (0, 2]$, gdyż dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $4n + 1 > 3$ i $4n > 2$, a więc

$$1 > \frac{2^2}{2\cdot 3} \geq \frac{y^2}{4n(4n+1)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^{4n-1}}{(4n-1)!} > \frac{y^{4n+1}}{(4n+1)!}\,.$$

Zatem $s_n(y)$ rośnie i ma wyrazy dodatnie. Dlatego $\lim s_n(y) > 0$ i $\sin y < y$ dla $y \in (0, 2]$. Podobnie sprawdzamy, że $\sin y > 0$ dla $y \in (0, 2]$: to wynika stąd, że każdy składnik po prawej stronie równości

$$\sin z = \left(y - \frac{y^3}{3!}\right) + \left(\frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!}\right) + \cdots$$

jest dodatni, gdy $y \in (0, 2]$. $\square$

Lemat 4.66. *Cosinus jest malejący na przedziale* $[0, 2]$*, tzn.*

$$x_1, x_2 \in [0, 2], \quad x_2 > x_1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos x_2 < \cos x_1 . \tag{4.18}$$

Ponadto, dla wszystkich $x_1, x_2 \in [0, 2]$ *jest*

$$|\cos x_2 - \cos x_1| \le |x_2 - x_1| .$$

Dowód. Korzystając ze wzoru na różnicę cosinusów (patrz Stwierdzenie 4.63), piszemy dla $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [0, 2]$

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \qquad \text{dla } x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in [0, 2].$$

Jednak $y = \frac{x_2 - x_1}{2} \in (0, 1]$, więc zgodnie z poprzednim Lematem jest $\sin y > 0$. Podobnie, $\sin \frac{x_2 + x_1}{2} > 0$, gdyż $(x_1 + x_2)/2 \in (0, 2]$. Oba sinusy w powyższej równości są więc dodatnie, a stąd $\cos x_2 - \cos x_1 < 0$.

Ponadto, przy założeniu $2 \ge x_2 > x_1 \ge 0$ jest

$$|\cos x_2 - \cos x_1| = 2\left|\sin \frac{x_2 - x_1}{2} \sin \frac{x_2 + x_1}{2}\right| \le 2\left|\sin \frac{x_2 - x_1}{2}\right| = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \le x_2 - x_1.$$

W ostatniej nierówności skorzystaliśmy z tego, że $\sin y \le y$ na $(0, 2]$. $\square$

Lemat 4.67. *Dla każdej liczby* $x \in [0, 1)$ *jest* $\cos x > 0$*, a dla każdej liczby* $y \in [\frac{40}{23}, 2]$ *jest* $\cos y < 0$*.*

Dowód. Po pierwsze, dla każdej liczby $x \in [0, 1)$ mamy wobec nierówności z poprzedniego Lematu: $|1 - \cos x| = |\cos 0 - \cos x| \le |0 - x| = x < 1$, a więc $\cos x > 0$. Oszacujemy teraz liczbę $\cos 2$. Mamy

$$\begin{aligned}
\cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \left(\frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!}\right) + \left(\frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!}\right) + \cdots \\
&= -1 + \left(\frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!}\right) + \left(\frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!}\right) + \cdots \\
&\le -1 + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^8}{8!} + \cdots \qquad \text{(opuszczamy ujemne składniki w nawiasach)} \\
&< -1 + \frac{2^4}{4!}\left(1 + \frac{2^4}{5^4} + \frac{2^8}{5^8} + \cdots\right) \\
&= -1 + \frac{16}{24} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4} < -1 + \frac{16}{24} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{24}} = -\frac{7}{23}, \qquad \text{gdyż} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^4 < \frac{1}{24} .
\end{aligned}$$

Jeśli $y \in [\frac{40}{23}, 2]$, to $|y-2| \le \frac{6}{23}$, a więc, dzięki nierówności $|\cos 2 - \cos y| \le |2-y| \le \frac{6}{23}$ (z poprzedniego Lematu) i powyższemu oszacowaniu liczby $\cos 2$, z pewnością jest

$$\cos y \le -\frac{7}{23} + \frac{6}{23} = -\frac{1}{23} < 0.$$

Dowód Lematu 4.67 jest zakończony. □

Dowód Twierdzenia 4.64. Ponieważ $\cos x$ maleje na $[0,2]$, więc ma w tym przedziale co najwyżej jedno miejsce zerowe. Niech

$$A = \{x \in [0,2] \colon \cos x > 0\}.$$

Z monotoniczności cosinusa wynika, że ten zbiór jest przedziałem. Z ostatniego lematu wynika ponadto, że

$$[0,1) \subset A, \qquad A \subset [0, 40/23],$$

a więc kres górny x_0 przedziału A jest pewną liczbą z przedziału $[1, 40/23] \subset [1, 7/4)$.

Ponadto, $\cos x_0 = 0$. Istotnie, liczba x_0 jest granicą ciągu $x_n = x_0(1 - \frac{1}{n}) \in A$ i dlatego z ciągłości cosinusa $\cos x_0 = \lim \cos x_n \ge 0$. Gdyby $\cos x_0 > 0$, to wobec równości

$$0 < \cos x_0 = \lim_{m\to\infty} \cos(x_0 + m^{-1})$$

byłoby $\cos(x_0 + \frac{1}{m}) > 0$ dla wszystkich dostatecznie dużych m, tzn.

$$x_0 + \frac{1}{m} \in A, \qquad x_0 + \frac{1}{m} > x_0 = \sup A,$$

to zaś jest sprzeczność. □

Definicja 4.68 (liczba π). Liczba π to liczba rzeczywista równa $2x_0$, gdzie $x_0 \in (0,2)$ jest jedyną w przedziale $(0,2)$ liczbą taką, że $\cos x_0 = 0$.

Twierdzenie 4.69. *Zachodzą wzory*

$$e^{i\pi/2} = i, \qquad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Dowód. Wiemy już, że $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Zatem, z równości

$$\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

wynika, że $\sin \frac{\pi}{2} = \pm 1 = 1$, bo wiemy już, że $\sin x > 0$ na $(0,2)$. Zatem $\exp(i\frac{\pi}{2}) = 0 + 1 \cdot i = i$. Stąd wynika, że

$$e^{\pi i} = \left(e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}\right)^2 = i^2 = -1\,.$$

To kończy dowód. □

Definicja 4.70. Liczba $T \ne 0$ jest okresem funkcji $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (odpowiednio: funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $f(z+T) = f(z)$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$ (odpowiednio: dla każdego $z \in \mathbb{R}$).

Twierdzenie 4.71 (okresowość $\exp$ na $\mathbb{C}$). *Dla każdej liczby $z \in \mathbb{C}$ i każdego $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ zachodzi równość*

$$\exp(2\pi ik + z) = \exp(z)\,,$$

tzn. $2\pi ik$ jest okresem funkcji wykładniczej. Ponadto, jeśli liczba T jest okresem funkcji wykładniczej, to $T = 2\pi ik$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Dowód. Jeśli $T = 2\pi ik$, gdzie jest całkowite, to wtedy dla każdej liczby zespolonej z mamy

$$\exp(z + T) = \exp(z)\exp(T) = \exp(z)\exp(2\pi i)^k = \exp(z)\,,$$

gdyż $\exp(2\pi i) = \exp(\pi i)^2 = (-1)^2 = 1$. Dlatego każda liczba $T = 2\pi ik$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest okresem funkcji wykładniczej.

Pozostaje wykazać, że innych okresów nie ma. Jeśli $\exp(z+T) = \exp(z)$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$, to z pewnością $\exp T = 1$. Niech $T = t + is$, gdzie $t, s \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$1 = |\exp T| = |\exp(t + is)| = \exp t,$$

a zatem $t = 0$ i $T = is$ dla pewnego $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Przypuśćmy, że s nie jest całkowitą wielokrotnością 2π. Ponieważ suma okresów funkcji jest okresem tej funkcji, więc z pierwszej części dowodu wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ liczba $i(s + 2\pi k)$ też jest okresem $\exp$. Dobierzmy $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $s' = (s + 2k\pi) \in (0, 2\pi)$. Oczywiście,

$$\exp(is') = \cos s' + i \sin s' = 1\,.$$

Stąd

$$\cos(s'/4) + i\sin(s'/4) = \exp(is'/4) \in \{1, -1, i, -i\},$$

gdyż innych pierwiastków czwartego stopnia z jedynki nie ma. Ponieważ jednak $0 < s'/4 < \frac{\pi}{2} < 2$, więc $1 > \cos(s'/4) > 0$ i $\sin(s'/4) > 0$. To jest sprzeczność, bo w $\{1, -1, i, -i\}$ nie ma żadnej liczby, która spełniałaby naraz obie nierówności $\operatorname{Re} z > 0$ $\operatorname{Im} z > 0$.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że s musi być całkowitą wielokrotnością 2π. To kończy dowód całego twierdzenia. $\square$

Zauważmy, że dowodząc ostatniego twierdzenia, wykazaliśmy także następujący fakt.

Wniosek 4.72. *Równość*

$$\exp(i\xi) = 1, \qquad \xi \in \mathbb{C}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi = 2\pi k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Wniosek 4.73 (okresowość funkcji trygonometrycznych). *Jeśli $T = 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, to T jest okresem obu funkcji*

$$\sin, \cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Ponadto, jeśli T jest okresem cosinusa (lub sinusa), to T jest całkowitą wielokrotnością 2π.

Dowód. To, że każda liczba $T = 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, jest okresem zarówno sinusa, jak i cosinusa, wynika z poprzedniego twierdzenia i wzorów Eulera.

Wykażemy drugą część twierdzenia. Niech T będzie okresem cosinusa (lub, odpowiednio, sinusa). Ponieważ $\exp(\pm i\pi/2) = \pm i$, więc ze wzorów Eulera otrzymujemy

$$\cos(z + \pi/2) = \frac{e^{i(z+\pi/2)} + e^{-i(z+\pi/2)}}{2} = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\sin z \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.19}$$

Podobnie sprawdzamy, że

$$\sin(z + \pi/2) = \cos z \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}. \tag{4.20}$$

Z obu tych wzorów[10] wynika, że T jest także okresem sinusa (lub, odpowiednio, cosinusa). Zatem dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ jest

$$\exp(i(z+T)) = \cos(z+T) + i\sin(z+T) = \cos z + i\sin z = \exp(iz),$$

tzn. liczba iT jest okresem $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Na mocy poprzedniego twierdzenia, iT jest całkowitą wielokrotnością $2\pi i$, tzn. $T = 2\pi k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. □

Wniosek 4.74. *(i) Jedynymi zespolonymi rozwiązaniami równania* $\sin z = 0$ *są liczby* $z = k\pi$*, gdzie* $k \in \mathbb{Z}$*.*

(ii) Jedynymi zespolonymi rozwiązaniami równania $\cos z = 0$ *są liczby* $z = (k + \frac{1}{2})\pi$*, gdzie* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Dowód. Jeśli $\sin z = 0$, to $\cos z = \pm 1$, więc $\exp(iz) = \pm 1 + i\cdot = \pm 1$, a stąd $\exp(2iz) = 1$. Na mocy Wniosku 4.72 otrzymujemy

$$2z = 2k\pi, \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem tylko liczby $z = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, mogą być rozwiązaniami równania $\sin z = 0$. Na odwrót, jeśli $z = k\pi$ i $k \in \mathbb{Z}$ jest dowolne, to

$$\exp(ik\pi) = \big(\exp(i\pi)\big)^k = (-1)^k = (-1)^k + 0 \cdot i = \cos k\pi + i \sin k\pi,$$

więc $\sin z = 0$. To kończy dowód pierwszej części wniosku. Druga część wynika z pierwszej i z tożsamości $\cos(z + \pi/2) = -\sin z$. □

4.7 Wzór de Moivre'a

Odnotujmy prostą konsekwencję związków między funkcją wykładniczą i funkcjami trygonometrycznymi.

Stwierdzenie 4.75 (wzór de Moivre'a)**.** *Jeśli* $\alpha \in \mathbb{R}$*, to wówczas dla każdego* $n \in \mathbb{N}$

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$

Dowód. Z własności exp i wzorów Eulera wynika, że lewa strona to, inaczej, $\exp(in\alpha) = \exp(i\alpha)^n = (\cos\alpha + i\sin n\alpha)^n$. □

[10] Wzory (4.19), (4.20) bywają nazywane wzorami redukcyjnymi.

Wniosek 4.76. *Jeśli* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i* $n \in \mathbb{N}$*, to*

$$\cos n\alpha = \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}\right)^n, \qquad \sin n\alpha = \operatorname{Im}\left(e^{i\alpha}\right)^n.$$

Znając wzór de Moivre'a (i dwumian Newtona) można bez trudu wyrażać $\cos n\alpha$ oraz $\sin n\alpha$ przez $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$. Ciekawsze, i ważniejsze jest zastosowanie do wyznaczania sum sinusów oraz cosinusów kolejnych wielokrotności α — aby takie sumy obliczać, wystarczy umieć sumować postęp geometryczny, bowiem

$$\sum_{n=k_1}^{k_2} \cos n\alpha = \sum_{n=k_1}^{k_2} \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}\right)^n = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=k_1}^{k_2} \left(e^{i\alpha}\right)^n\right).$$

(Dla sum sinusów trzeba użyć części urojonej.)

Zadanie 4.77. Sprawdzić, że jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $\exp(ix) \neq 1$, to

$$\sum_{n=0}^{N} \sin nx = \frac{\sin\big(Nx/2\big)\sin\big((N+1)x/2\big)}{\sin(x/2)}.$$

Znaleźć analogiczny wzór na sumę cosinusów. Jak zmienią się oba wzory, gdy przestaniemy zakładać, że $\exp(ix) \neq 1$?

Na tym zakończymy pierwsze spotkanie z szeregami. Chciałbym, żeby Czytelnik tego tekstu nie tylko uważał szeregi za pewne obiekty matematyczne, które (być może) warto poznawać i badać same w sobie, ale widział w nich *przede wszystkim* narzędzie, służące m.in. do definiowania różnych funkcji, systematycznego badania ich własności, oraz obliczania ich wartości. To ma szczególne znaczenie praktyczne wtedy, gdy – mówiąc nieprecyzyjnie – szeregi są zbieżne *szybko*. Tak właśnie jest w przypadku szeregów $\exp$, $\sin$ i $\cos$, z uwagi na błyskawiczne tempo wzrostu silni. Dopóki obliczamy np. wartości e^x dla niezbyt dużych x, możemy w praktyce traktować funkcję $\exp$ jako wielomian, złożony z pewnej liczby składników szeregu $\sum(x^n/n!)$; np. e^3 różni się od $\sum_{n=0}^{50} 3^n/n!$ naprawdę niewiele: około 10^{-42}.

```
In[1]:= N[Exp[3], 44]

Out[1]= 20.085536923187667740928529654581717896987908

In[2]:= N[Sum[3^n/n!, {n, 0, 50}], 44]

Out[2]= 20.085536923187667740928529654581717896987906
```

Gdybyśmy chcieli z taką dokładnością określić odległość Ziemi od Słońca, nanometry byłyby zdecydowanie za dużymi jednostkami. Jeśli ktoś woli myśleć o wielkościach związanych z ekonomią, a nie z astronomią czy fizyką, może sprawdzić, jakie jest zadłużenie budżetu USA. Strona

http://www.brillig.com/debt_clock/

podaje je z dokładnością do 1 centa, aktualizując wartości co parę sekund. Taka precyzja z praktycznego punktu widzenia graniczy z absurdem, ale dokładność przybliżenia

$$\sum_{n=0}^{50} \frac{3^n}{n!} \approx e^3$$

jest i tak o 25 rzędów wielkości lepsza.

Takie uwagi mogą kogoś zaciekawić, jednak – aby lepiej rozumieć, co się naprawdę za nimi kryje – musimy w miarę systematycznie poznać takie pojęcia, jak *ciągłość, różniczkowalność* i *zbieżność jednostajna*. Ich ścisłe definicje oraz własności poznamy w kolejnych rozdziałach.