Rozdział 8

Szeregi potęgowe

Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$ i współczynnikach $a_n \in \mathbb{C}$ nazywamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \tag{8.1}$$

gdzie $z \in \mathbb{C}$. Z szeregami tego typu mieliśmy już do czynienia, omawiając funkcję wykładniczą, sinus i cosinus.

W tym rozdziale, wyposażeni w wiedzę o zbieżności jednostajnej, omówimy ogólne własności funkcji, które można definiować wzorami typu (8.1).

8.1 Dygresja: granica górna i dolna

Niech (b_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych.

Definicja 8.1. Granicą górną ciągu (b_n) nazywamy element zbioru $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, określony następująco:

$$\limsup_{n\to\infty} b_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{m\geq n} b_m \right) .$$

Granicą dolną ciągu (b_n) nazywamy element zbioru $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, określony następująco:

$$\liminf_{n\to\infty} b_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{m\geq n} b_m \right) .$$

Symbole 'lim sup' i 'lim inf' pochodzą od łacińskich nazw *limes superior* oraz *limes inferior*.

Uwaga. Nietrudno sprawdzić, że zachodzą równości

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{m\geq n} b_m \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m\geq n} b_m \right) , \tag{8.2}$$

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{m\geq n} b_m \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geq n} b_m \right) . \tag{8.3}$$

Istotnie, ciąg $B_n = \sup_{m\geq n} b_m$ jest nierosnący (zwiększając n, obliczamy kres górny mniejszego lub tego samego zbioru). Dlatego ciąg B_n ma granicę (właściwą lub niewłaściwą:

nie wiemy wszak, czy B_n jest ograniczony), która zarazem jest kresem dolnym wszystkich liczb B_n. (Patrz Twierdzenie 2.22, Wniosek 2.23 i Twiredzenie 2.28). To dowodzi pierwszej z podanych równości; drugą można sprawdzić analogicznie.

Inna definicja granicy górnej i dolnej. Granice częściowe

Równoważna definicja granicy górnej i dolnej jest następująca. Oznaczmy literą $\mathcal{B}$ zbiór wszystkich tych podciągów ciągu (b_n), które są zbieżne do granicy właściwej lub niewłaściwej. Niech Γ oznacza zbiór wszystkich granic podciągów $(b_{n_k}) \in \mathcal{B}$. Inaczej mówiąc, element $c \in \overline{\mathbb{R}}$ należy do Γ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = \lim b_{n_k}$ dla pewnego podciągu (b_{n_k}) ciągu (b_n).

Tak określony zbiór Γ nazywamy *zbiorem granic częściowych* ciągu (b_n). Zachodzą równości

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \sup \Gamma\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} b_n = \inf \Gamma\,. \tag{8.4}$$

Ich sprawdzenie w oparciu o Definicję 8.1 pozostawimy jako nietrudne zadanie dla Czytelnika.

Przykład 8.2. Ciąg $b_n = (-1)^n$ ma granicę górną 1 i granicę dolną -1. Zbiór granic częściowych tego ciągu to zbiór dwuelementowy $\{-1, 1\}$. Ciąg

$$0,\quad 1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{2}{4},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{4}{5},\quad \ldots$$

ma granicę górną 1 i granicę dolną 0. Zbiór granic częściowych tego ciągu to przedział $[0, 1]$.

Zadanie 8.3. Niech (b_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych, a Γ zbiorem granic częściowych tego ciągu. Wykazać, że jeśli ciąg $(g_n) \subset \Gamma$ ma granicę (właściwą lub niewłaściwą) g, to $g \in \Gamma$.

Posługując się wnioskiem 2.35, nietrudno udowodnić, że ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny (do granicy właściwej lub niewłaściwej) wtedy i tylko wtedy, gdy jego granica górna i dolna są równe.

Zanotujmy jeszcze jedną własność granicy górnej, którą wykorzystamy w tym rozdziale.

Stwierdzenie 8.4. *Jeśli* $\limsup_{n\to\infty} b_n = b$*, to dla każdego* $b' > b$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takie, że* $b_n < b'$ *dla wszystkich* $n > n_0$*.*

Dowód. Wiemy, że $b = \lim_{n\to\infty}(\sup_{m\geq n} b_m)$; patrz (8.2). Jeśli $b' > b$, to dla dostatecznie dużych n jest $\sup_{m\geq n} b_m < b'$, tzn. $b_m < b'$ dla wszystkich dostatecznie dużych m. $\square$

8.2 Promień zbieżności; ciągłość sumy szeregu potegowego

Rozpatrzmy szereg potęgowy

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{8.5}$$

o środku w punkcie $z_0 = 0$.

Stwierdzenie 8.5. *Załóżmy, że szereg $S(\xi)$ jest zbieżny w pewnym punkcie $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jeśli $0 < \varrho < |\xi|$, to w kole domkniętym $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le \varrho\}$ szereg $S(z)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.*

Dowód. Z warunku koniecznego zbieżności szeregu wynika, że $a_n\xi^n \to 0$, a więc istnieje liczba M taka, że $|a_n\xi^n| \le M$ dla wszystkich n. Jeśli $z \in D_\varrho$, to

$$|a_n z^n| \le |a_n|\varrho^n = |a_n\xi^n| \cdot \frac{\varrho^n}{|\xi|^n} \le Mq^n,$$

gdzie $q = \varrho/|\xi| \in (0,1)$, gdyż $0 < \varrho < |\xi|$. Szereg o wyrazach Mq^n jest więc zbieżnym szeregiem liczbowym (po prostu: szeregiem geometrycznym). Teza stwierdzenia wynika z kryterium Weierstrassa. □

Stwierdzenie 8.6. . *Załóżmy, że szereg $S(\xi)$ jest rozbieżny w pewnym punkcie $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jeśli $|z| > |\xi|$, to szereg $S(z)$ jest rozbieżny.*

Dowód. Przypuśćmy, że jest przeciwnie i szereg $S(z)$ jest zbieżny. Ponieważ $|\xi| < |z|$, więc z poprzedniego stwierdzenia wynika wtedy, że zbieżny jest szereg $S(\xi)$, sprzeczność. □

Z obu powyższych stwierdzeń wynika, że szereg potęgowy (8.5) jest zbieżny w pewnym kole otwartym $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ i rozbieżny poza kołem domkniętym o tym samym promieniu, tzn. na zbiorze $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| > R\}$. Okazuje się, że liczbę R, nazywaną *promieniem zbieżności szeregu* (8.5), można wyznaczyć, znając współczynniki a_n tego szeregu.

Twierdzenie 8.7 (wzór Cauchy'ego–Hadamarda). *Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych i niech*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,. \tag{8.6}$$

Wtedy szereg potęgowy $S(z)$ jest, dla każdego $\varrho < R$, zbieżny bezwględnie i jednostajnie w kole $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le \varrho\}$, oraz rozbieżny w punktach zbioru $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| > R\}$.

Dowód. Rozpatrzymy najpierw przypadek $R > 0$. Ustalmy $\varrho < R$. Wybierzmy liczby rzeczywiste R_1, R_2 tak, aby $\varrho < R_1 < R_2 < R$. Niech ξ będzie (jakimkolwiek) punktem okręgu $\gamma_{R_1} = \{w \in \mathbb{C}\colon |w| = R_1\}$. Ponieważ $1/R_2 > 1/R$, więc na mocy Stwierdzenia 8.4 istnieje takie n_0, że dla wszystkich $n > n_0$ jest

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R_2},$$

lub równoważnie $|a_n| < (R_2)^{-n}$. Dlatego

$$|a_n\xi^n| = |a_n|R_1^n < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \qquad \text{dla } n > n_0,$$

a więc na mocy kryterium porównawczego szereg $S(\xi)$ jest zbieżny (nawet bezwględnie). Ze Stwierdzenia 8.5 wynika teraz pierwsza część tezy: $S(z)$ zbieżny bezwględnie i jednostajnie w kole $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le \varrho\}$.

Niech teraz $|z| > R$. Ustalmy $R_3 \in \mathbb{R}$ tak, aby mieć $R < R_3 < |z|$. Z definicji granicy górnej wynika, że istnieje podciąg n_j taki, że $|a_{n_j}|^{1/n_j} \to 1/R > 1/R_3$. Dla dostatecznie dużych n_j jest więc $|a_{n_j}| > R_3^{-n_j}$, a zatem

$$|a_{n_j} z^{n_j}| > R_3^{-n_j} |z|^{n_j} > R_3^{-n_j} R_3^{n_j} = 1\,.$$

Przeto szereg $S(z)$ nie może być zbieżny, gdyż pewien podciąg ciągu jego wyrazów nie dąży do zera: nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

Wreszcie, gdy $R = 0$, to po prostu dla każdego $z \neq 0$ szereg $S(z)$ jest rozbieżny. Aby to sprawdzić, Czytelnik zechce prześledzić ostatni fragment rozumowania, wpisując wszędzie $R = 0$, $1/R = \infty$. $\square$

Definicja 8.8. Koło $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$, gdzie liczba R jest dana wzorem Cauchy'ego–Hadamarda (8.6), nazywamy *kołem zbieżności* szeregu (8.5).

Wiemy z poprzedniego rozdziału, że suma szeregu jednostajnie zbieżnego na pewnym podzbiorze płaszczyzny $\mathbb{C}$ (lub prostej $\mathbb{R}$) jest na tym zbiorze funkcją ciągłą. Ponieważ na każdym kole domkniętym D_ϱ zawartym we wnętrzu koła zbieżności szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie, więc otrzymujemy natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 8.9. *Suma $S(z)$ szeregu potęgowego (8.5) jest funkcją ciągłą wewnątrz koła $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$, gdzie liczba R jest dana wzorem (8.6). (Jeśli $1/R = 0$, to $S(\cdot)$ jest funkcją ciągłą na całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$.)*

Przykład 8.10. Szereg

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ma promień zbieżności $R = \infty$, gdyż $a_n = 1/n!$,

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}} = 0\,.$$

Ostatnią równość można otrzymać, posługując się tezą Zadania A.6, albo (znacznie mniej subtelnym) oszacowaniem $(n!)^2 \geq n^n$, z którego wynika, że

$$0 < \frac{1}{(n!)^{1/n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Możemy więc – niezależnie od tego, co znacznie wcześniej udowodniliśmy w zupełnie inny sposób – stwierdzić, że funkcja $\exp(z)$ jest ciągła na całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$.

Przykład 8.11. Szereg

$$\sin(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

też ma promień zbieżności $R = \infty$. Zauważmy, że tym razem $a_n = 0$ dla n parzystych. Dla n nieparzystych mamy do czynienia z podciągiem ciągu $(n!)^{-1/n}$, który rozpatrzyliśmy w poprzednim przykładzie.

Przykład 8.12. Niech $k \in \mathbb{N}$. Każdy z szeregów

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad S_{2,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{kn}}{n}, \qquad S_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

ma promień zbieżności $R = 1$. Nietrudno to stwierdzić, posługując się równością

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

Zauważmy jednak, że szereg S_1 jest rozbieżny we wszystkich punktach okręgu $|z| = 1$. Szereg S_3 jest zbieżny bezwzględnie we wszystkich punktach tego okręgu, gdyż dla $|z| = 1$ jest $|z^n/n^2| = 1/n^2$. Szereg $S_{2,k}(\xi)$ jest rozbieżny, gdy $\xi^k = 1$ (bo wtedy jego sumy częściowe są sumami cześciowymi rozbieżnego szeregu $\sum \frac{1}{n}$) i zbieżny – warunkowo, ale nie bezwzględnie – w pozostałych punktach okręgu jednostkowego. Aby udowodnić ostatnią własność, można posłużyć się kryterium Dirichleta; zrobiliśmy to w istocie w Przykładzie 4.44 (proszę do niego zajrzeć i podstawić $z = \xi^k$).

Widać więc, że zachowanie szeregu potęgowego na brzegu koła zbieżności jest rzeczą delikatną: bez szczegółowego badania współczynników nic naprawdę ogólnego nie da się tu powiedzieć.

8.3 Różniczkowalność sumy szeregu potęgowego

Szeregi potęgowe mają bardzo wygodną własność: ich sumy mają pochodne wszystkich rzędów, które wolno obliczać tak samo, jak pochodne wielomianów – różniczkując kolejne składniki sumy.

Twierdzenie 8.13. *Załóżmy, że $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,.$$

Wtedy funkcja S ma pochodną w każdym punkcie $z \in \{w \in \mathbb{C}\colon |w| < R\}$ i zachodzi wzór

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\,. \tag{8.7}$$

Dowód. Przy dowolnym ustalonym z, szereg po prawej stronie wzoru (8.7) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg o wyrazach $na_n z^n$. (Mnożymy po prostu szereg (8.7) przez ustaloną liczbę). Ponieważ $n^{1/n} \to 1$ dla $n \to \infty$, więc

$$\limsup_{n\to\infty} |na_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}\,.$$

Dlatego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$, tzn. szereg utworzony z pochodnych kolejnych składników szeregu $S(z)$, jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na każdym kole $D_\varrho = \{z\colon |z| \le \varrho\}$, gdzie $\varrho < R$. Z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych (stosujemy jego wariant zespolony – wolno to zrobić, gdyż koło jest zbiorem wypukłym) wnioskujemy, że istotnie zachodzi wzór (8.7). $\square$

Przykład 8.14. Korzystając z powyższego twierdzenia, obliczamy

$$\begin{aligned}\big(\sin z\big)' &= \bigg(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}\bigg)'\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\cdot(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos z\,.\end{aligned}$$

(Podstawiliśmy wyżej $k = n - 1$.)

Ponieważ pochodna sumy szeregu potęgowego wyraża się przez nowy szereg potęgowy o tym samym promieniu zbieżności, więc ostatnie twierdzenie oczywiście wolno stosować wielokrotnie.

Wniosek 8.15. *Załóżmy, że $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,.$$

Funkcja S ma w kole $z \in \{w \in \mathbb{C} \colon |w| < R\}$ ciągłe pochodne wszystkich rzędów. Zachodzi wzór

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n z^{n-k}\,. \tag{8.8}$$

Dla każdego $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ jest $k!\,a_k = S^{(k)}(0)$.

Dowód. Ogólny wzór (8.8) otrzymujemy, stosując k-krotnie poprzednie twierdzenie. Podstawiając w (8.8) $z = 0$, otrzymujemy po prawej stronie tylko jeden niezerowy składnik sumy (dla $n = k$), równy właśnie $k!a_k$. □

Wniosek 8.16 (jednoznaczność rozwinięcia w szereg potęgowy). *Załóżmy, że sumy dwóch szeregów potęgowych,*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \textit{oraz} \qquad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\,,$$

są równe w pewnym kole $|z| < \varrho$. Wtedy $a_n = b_n = S^{(n)}(0)/n!$ dla wszystkich $n = 0, 1, 2, \ldots$

Innymi słowy, żadnej funkcji nie można przedstawić w postaci zbieżnego szeregu potęgowego o środku w zerze na dwa istotnie różne sposoby.

Dowód. Skoro $S(z) = T(z)$ w kole $|z| < \varrho$, to promień zbieżności obu szeregów jest przynajmniej taki, jak ϱ. Ponadto, z poprzedniego wniosku wynika, że $S^{(k)}(z) = T^{(k)}(z)$ dla wszystkich $|z| < \varrho$ i wszystkich k, a w szczególności

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = \frac{T^{(n)}(0)}{n!} = b_n\,.$$

Dowód jest zakończony. □

8.3.1 Pojęcie funkcji analitycznej

Uwaga 8.17. Wszystko, co powiedzieliśmy do tej pory w tym rozdziale, przenosi się bez zmian na szeregi potęgowe zmiennej rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych. Trzeba tylko zastąpić koło zbieżności $|z| < R$ przedziałem zbieżności $|x| < R$. Wzór na promień zbieżności R, a także wzory na pochodne sumy szeregu potegowego i jego współczynniki, nie ulegają zmianie.

Uwaga 8.18. Zauważmy, że wzory na współczynniki szeregu potęgowego funkcji S, tzn. równości $a_n = S^{(n)}(0)/n!$, otrzymane we Wnioskach 8.15–8.16, są takie same, jak wzory na kolejne współczynniki Taylora–Maclaurina. Jednak wzór Taylora z resztą w postaci Peano (lub innej) ma charakter lokalny; jak widzieliśmy w Przykładzie 6.86, funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{8.9}$$

ma na prostej pochodne wszystkich rzędów i $f^{(n)}(0) = 0$ dla wszystkich n. Zatem f *nie jest* sumą żadnego zbieżnego szeregu potęgowego – gdyby $f(x) = \sum a_n x^n$, to musiałoby być $a_n = f^{(n)}(0)/n! = 0$, tzn. $f \equiv 0$, ale przecież f wcale nie znika tożsamościowo.

Niech P będzie otwartym przedziałem w $\mathbb{R}$. Wprowadźmy następujące oznaczenia.

$C^k(P)$: zbiór wszystkich funkcji $f\colon P \to \mathbb{R}$, mających w P ciągłe pochodne do rzędu k włącznie;

$C^\infty(P)$: zbiór wszystkich funkcji $f\colon P \to \mathbb{R}$, mających w P ciągłe pochodne wszystkich rzędów;

$C^\omega(P)$: zbiór wszystkich funkcji $f\colon P \to \mathbb{R}$, dla których dla każdego $a \in P$ istnieje $R_a > 0$ takie, że $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$, gdy $|x-a| < R_a$.

Funkcje $f \in C^\infty(P)$ nazywamy *gładkimi*, a funkcje $f \in C^\omega(P)$ – *analitycznymi (w sensie rzeczywistym)*. Są to istotnie różne pojęcia: analityczność to coś więcej, niż gładkość.

Wniosek 8.19. *Dla każdego przedziału otwartego $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}$ jest $C^\omega(P) \subsetneqq C^\infty(P)$.*

Dowód. Niech $a \in P$. Funkcja $f(x-a)$, gdzie f jest dana wzorem (8.9), jest gładka w P, ale nie jest sumą żadnego szeregu potęgowego $\sum_n a_n(x-a)^n$, więc $f \notin C^\omega(P)$. □

Sprawdzimy jeszcze, że funkcja, która jest sumą szeregu potęgowego $\sum a_n z^n$, zbieżnego w kole $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$, rozwija się w szereg potęgowy wokół każdego innego punktu z_0, należącego do tego koła. Najpierw udowodnimy pomocniczy lemat, który pozwala zamieniać kolejność dwóch nieskończonych sum.

Lemat 8.20. *Niech $a_{ij} \in \mathbb{C}$ dla $i, j \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że*

$$\sum_{j=1}^\infty |a_{ij}| = b_i \quad \textit{dla } i = 1, 2, \ldots, \qquad \sum_{i=1}^\infty b_i < +\infty. \tag{8.10}$$

Wówczas

$$\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{ij} = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty a_{ij}\,.$$

Dowód. [1] Niech $E = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że x_i są parami różne i $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Zdefiniujmy funkcje $f_i, g\colon \mathbb{R}$ następująco:

$$\begin{aligned} f_i(x_0) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \qquad \text{dla } i \in \mathbb{N}, \\ f_i(x_n) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad \text{dla } i, n \in \mathbb{N}, \\ g(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \qquad \text{dla } x \in E. \end{aligned}$$

Wprost z definicji sumy szeregu wynika, że $f_i(x_n) \to f(x_0)$ dla $n \to \infty$. Zatem każda z funkcji f_i jest ciągła w $x_0 \in E$. Ponieważ $|f_i(x)| \le b_i$ na E, więc na mocy kryterium Weierstrassa i zbieżności szeregu $\sum b_i$ szereg definiujący funkcję g jest zbieżny jednostajnie na E. Wynika stąd, że g jest ciągła w x_0. Dlatego

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\,.$$

Przedostatnia równość wynika z własności sumy skończenie wielu szeregów, patrz Stwierdzenie 4.6. □

Twierdzenie 8.21. *Załóżmy, że szereg*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{8.11}$$

jest zbieżny w kole $K_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$. Niech $\xi \in K_R$. Funkcję S można rozwinąć w szereg potęgowy, który ma środek w punkcie ξ i jest zbieżny w każdym punkcie z takim, że $|z-\xi| < R - |\xi|$. Zachodzi przy tym równość

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(\xi)}{n!}(z-\xi)^n\,, \qquad |z-\xi| < R - |\xi|\,. \tag{8.12}$$

Dowód. Podstawiając $z = (z-\xi)+\xi$ we wzorze na S, otrzymujemy

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\big((z-\xi)+\xi\big)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z-\xi)^k \xi^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} \xi^{n-k}\Big)}_{=\,(\text{ozn.})\ c_k} (z-\xi)^k\,. \end{aligned} \tag{8.13}$$

[1] Patrz Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, rozdział 8.

Pisząc ostatnią równość, zmieniliśmy kolejność sumowania; sprawdzimy, że dla $|z-\xi| < R-|\xi|$ można to zrobić dzięki Lematowi 8.20. Po pierwsze, wzór

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

pozwala określić symbol Newtona dla wszystkich $k = 0, 1, 2, \ldots$; mamy $\binom{n}{k} = 0$ dla $k > n$. Wobec tego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left|a_n\binom{n}{k}(z-\xi)^k\xi^{n-k}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_n\binom{n}{k}(z-\xi)^k\xi^{n-k}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\big(|z-\xi|+|\xi|\big)^n$$

Podstawmy $t = |z-\xi| + |\xi|$. Szereg $\sum_n |a_n| t^n$ ma taki sam promień zbieżności, jak wyjściowy szereg $S(z)$; dlatego szereg podwójny po lewej stronie ostatniego wzoru jest zbieżny dla $t = |z-\xi| + |\xi| < R$ i wtedy, posługując się Lematem 8.20, można zmienić kolejność sumowania we wzorze (8.13). Wzory na współczynniki szeregu funkcji S wokół punktu ξ, tzn. równości $c_k = S^{(k)}(\xi)/k!$, wynikają z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy (patrz Wniosek 8.16). $\square$

Czytelnik zechce samodzielnie sformułować 'rzeczywisty' wariant ostatniego twierdzenia i sprawdzić, że podany dowód przenosi się bez zmian.

Uwaga 8.22. Może się okazać, że szereg (8.12) w poprzednim twierdzeniu jest zbieżny na zbiorze większym, niż koło $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-\xi| < R - |\xi|\}$. Oto prosty przykład. Mamy

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,, \qquad |z| < 1.$$

Nietrudno rozwinąć tę funkcję w szereg potęgowy o środku w innym punkcie ξ koła jednostkowego. Otóż,

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\xi-(z-\xi)} = \frac{1}{1-\xi}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-\xi}{1-\xi}} = \frac{1}{1-\xi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\xi}{1-\xi}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\cdot(z-\xi)^n,$$

gdzie $b_n = (1-\xi)^{-n-1}$. Otrzymany szereg potęgowy jest znów szeregiem geometrycznym, zbieżnym, gdy liczba $|\frac{z-\xi}{1-\xi}| < 1$, tzn. gdy $|z-\xi| < |1-\xi|$. Np. dla $\xi = 1/2$ otrzymujemy więc promień zbieżności $1/2$, ale dla $\xi = -1/2$ szereg jest zbieżny wtedy, gdy $|z+\frac{1}{2}| < 3/2$, tzn. w kole otwartym o środku $-1/2$ i promieniu $3/2$, które zawiera *całe* koło $|z| < 1$ i wiele punktów spoza niego. Czytelnik zechce zrobić odpowiednie rysunki i zobaczyć, że w każdym przypadku punkt $z_0 = 1$, w którym funkcja $1/(1-z)$ przestaje być określona, leży na brzegu koła zbieżności odpowiedniego szeregu.

8.4 Przykłady

Przykład 8.23. Zastosujemy wzór (8.8), aby obliczyć sumę szeregu

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n\,, \qquad |z| < 1\,.$$

Ponieważ $n^2 = n(n-1)+n$, a szereg T jest zbieżny bezwzględnie na każdym kole $|z| \le \varrho$ (gdzie $\varrho < 1$), więc

$$\begin{aligned}
T(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \\
&= z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} + z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \\
&\overset{(8.8)}{=} z^2\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big)'' + z\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big)' \\
&= z^2\Big(\frac{1}{1-z}\Big)'' + z\Big(\frac{1}{1-z}\Big)' \\
&= \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}\,.
\end{aligned}$$

Proszę zauważyć: wykorzystaliśmy jedynie wzór na pierwszą i drugą pochodną szeregu potęgowego, a następnie dwukrotnie zróżniczkowaliśmy funkcję $1/(1-z)$. $\square$

Przykład 8.24 (wzór Bineta na liczby Fibonacciego). Skorzystamy z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy, aby wyznaczyć jawnym wzorem liczby Fibonacciego ($a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$). Niech

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,.$$

Łatwo sprawdzić, że $0 < a_n \le 2^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Dlatego $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n} \le 2$ i szereg określający funkcję Φ jest zbieżny (przynajmniej) w kole $|z| < \frac{1}{2}$. Wewnątrz tego koła wszystkie rachunki, które będziemy prowadzić, mają sens dzięki bezwzględnej zbieżności odpowiednich szeregów.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
z\Phi(z) &= a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + a_3 z^4 + \cdots\,, \\
z^2\Phi(z) &= \phantom{a_0 z + {}} a_0 z^2 + a_1 z^3 + a_2 z^3 + \cdots\,.
\end{aligned}$$

Dodając te równości stronami i korzystając z rekurencyjnej definicji ciągu Fibonacciego, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
(z+z^2)\Phi(z) &= z + (a_1+a_0)z^2 + (a_2+a_1)z^3 + (a_3+a_2)z^4 + \cdots \\
&= a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots = \Phi(z) - 1\,.
\end{aligned}$$

Stąd $\Phi(z) = 1/(1-z-z^2)$. Trójmian kwadratowy $T(z) = 1 - z - z^2$ ma pierwiastki $z_1 = -(\sqrt{5}+1)/2$, $z_2 = (\sqrt{5}-1)/2$. Łatwo sprawdzić (rozwiązując układ równań liniowych z niewiadomymi a, b), że

$$\Phi(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{a}{z_1 - z} + \frac{b}{z_2 - z} \qquad \text{dla} \quad a = -b = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Stosując, podobnie jak w Uwadze 8.22, wzór na sumę szeregu geometrycznego, zapisujemy teraz $\Phi(z)$ jako

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{1}{z_1\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} + \frac{1}{z_2\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{z}{z_2}}\\ &= -\frac{1}{z_1\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \frac{1}{z_2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(z_2^{-n-1} - z_1^{-n-1}\right)z^n\,.\end{aligned}$$

Dzięki jednoznaczności rozwinięcia Φ w szereg potęgowy o środku w zerze,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(z_2^{-n-1} - z_1^{-n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Jest to tak zwany *wzór Bineta*. □

Podobnymi metodami można znajdować 'jawne' wzory na wyrazy innych ciągów, określonych liniowymi wzorami rekurencyjnymi.

Uwaga 8.25. Wzór Bineta można także wyprowadzić metodami algebry liniowej. Otóż, definicję rekurencyjną ciągu Fibonacciego można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix},$$

lub krótko $v_{n+1} = Mv_n$, gdzie

$$v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Przez indukcję otrzymujemy natychmiast $v_{n+1} = M^n v_0$. Potęgowanie macierzy M nie jest zajęciem pouczającym. Jednak w bazie złożonej z wektorów własnych przekształcenie $M\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma macierz diagonalną

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Wystarczy więc wyrazić v_0 jako kombinację wektorów własnych u, w przekształcenia M, $v_0 = \alpha u + \beta w$. Wtedy

$$v_n = M^n(\alpha u + \beta w) = \alpha\lambda_1^n u + \beta\lambda_2^n w\,.$$

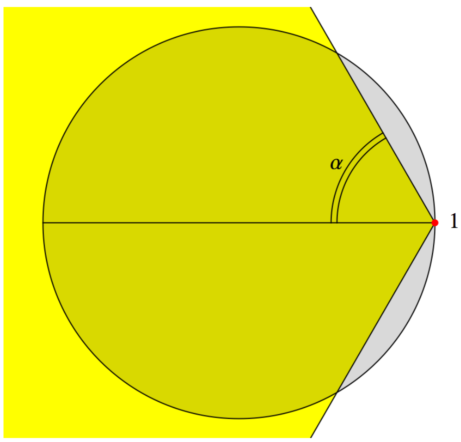
Zainteresowany Czytelnik zechce uzupełnić nietrudne rachunki (trzeba znaleźć wartości i wektory własne M, oraz dobrać stałe α, β tak, aby $v_0 = \alpha u + \beta w$), a następnie odczytać z podanego wyżej wzoru na v_n wzór na a_n (czyli na drugą współrzędną wektora v_n).

8.5 Twierdzenie Abela o granicach kątowych

Widzieliśmy już proste przykłady, wskazujące, że na brzegu koła zbieżności $|z| < R$ szereg potęgowy może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny. Udowodnimy teraz klasyczne twierdzenie, które mówi, jak zachowuje się suma szeregu potęgowego w pobliżu tych punktów okręgu $|z| = R$, gdzie szereg jest zbieżny.

Wprowadźmy najpierw odpowiednie oznaczenia. Niech $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Połóżmy

$$T(1,\alpha) = \{z \in \mathbb{C}\colon \quad |z| < 1, \quad 1 - z = re^{i\theta} \quad \text{dla pewnych } \theta \in (-\alpha, \alpha),\, r > 0\}\,. \tag{8.14}$$



Nietrudno jest sprawdzić, że $T(1,\alpha)$ stanowi część wspólną dysku jednostkowego $K_1 = \{z\colon |z| < 1\}$ oraz kąta o rozwartości 2α, wierzchołku w punkcie $1 \in \mathbb{C}$ oraz dwusiecznej pokrywającej się z półprostą $(-\infty, 1]$ na osi rzeczywistej.

Definicja 8.26. Powiemy, że funkcja $f\colon K_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ ma w punkcie 1 granicę kątową równą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ funkcja

$$f_\alpha \equiv f\Big|_{T(1,\alpha)} : T(1,\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$$

ma w punkcie 1 granicę równą g; równoważnie, $f\colon K_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ ma w punkcie 1 granicę kątową równą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego kąta $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że jeśli $z \in T(1,\alpha)$ i $|z-1| < \delta$, to wówczas $|f(z) - g| < \varepsilon$.

Definicja 8.27. Funkcja $g\colon K_R = \{|z| < R\} \to \mathbb{C}$ ma granicę kątową równą g w punkcie $z_0 \in \gamma_R = \{|z| = R\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(z) = g(z \cdot z_0)$ ma granicę kątową równą g w punkcie 1.

Twierdzenie 8.28 (Abela o granicy kątowej). *Niech*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \textit{dla } |z| < R\,, \qquad \textit{gdzie } \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\,.$$

Załóżmy, że szereg potęgowy definiujący funkcję g jest zbieżny w pewnym punkcie z_0 należącym do okręgu $\gamma_R = \{|z| = R\} \subset \mathbb{C}$ i ma w tym punkcie sumę równą S. Wówczas g ma w punkcie z_0 granicę katową równą S.

Dowód. Posługując się definicją granicy kątowej można bez zmniejszenia ogólności założyć, że $R = 1$ i $z_0 = 1$; szereg

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest zbieżny wewnątrz koła jednostkowego, tzn. dla $|z| < 1$, a ponadto

$$S = g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\in\, \mathbb{C}\,.$$

Będziemy szacować $|g(z)-S|$ dla z bliskich 1 i należących do $T(1,\alpha)$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$ i kąt $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Niech $\eta > 0$. Konkretną wartość η dobierzemy do α i ε na końcu dowodu.

Krok 1. Niech

$$\psi_{p,q}(z) = \sum_{n=p+1}^{p+q} a_n(z^n - 1)\,, \qquad \psi_p(z) = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n(z^n-1)\,.$$

Wykażemy, że istnieje taka liczba $p_0 \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $p \geq p_0$ zachodzi nierówność

$$|\psi_p(z)| \leq \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|}, \qquad |z| < 1\,. \tag{8.15}$$

W tym celu udowodnimy, że analogiczny warunek zachodzi dla $\psi_{p,q}(z)$ przy dowolnym $q \in \mathbb{N}$. Oznaczmy $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Ze wzoru na różnicę n-tych potęg otrzymujemy[2]

$$\begin{aligned}
\psi_{p,q}(z) &= (z-1)\sum_{n=p+1}^{p+q} a_n(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) \\
&= (z-1)\Big\{(S_{p+q}-S_p)\cdot 1 + (S_{p+q}-S_p)\cdot z + \cdots \\
&\quad + (S_{p+q}-S_p)\cdot z^p + (S_{p+q}-S_{p+1})\cdot z^{p+1} + \cdots + (S_{p+q}-S_{p+q-1})\cdot z^{p+q-1}\Big\}\,.
\end{aligned}$$

S_N są sumami częściowymi szeregu zbieżnego. Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje takie p_0, iż dla wszystkich $k, l \geq p_0$ zachodzi nierówność $|S_k - S_l| \leq \eta$. Z nierówności trójkąta otrzymujemy zatem dla $p \geq p_0$ i dowolnego $q \in \mathbb{N}$

$$|\psi_{p,q}(z)| \leq |z-1|\cdot\eta\cdot\sum_{j=0}^{p+q-1}|z|^j \leq |z-1|\cdot\eta\cdot\sum_{j=0}^{\infty}|z|^j = \eta\cdot\frac{|1-z|}{1-|z|}$$

Przechodząc teraz do granicy $q \to \infty$, otrzymujemy warunek (8.15).

Krok 2. Oszacujmy różnicę $g(z) - S$ następująco:

$$\begin{aligned}
|g(z)-S| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\big(z^n-1\big)\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=0}^{p} a_n\big(z^n-1\big)\right| + \left|\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n\big(z^n-1\big)\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{p} a_n\big(z^n-1\big)\right| + |\psi_p(z)| \overset{(8.15)}{\leq} \left|\sum_{n=0}^{p} a_n\big(z^n-1\big)\right| + \eta\cdot\frac{|1-z|}{1-|z|}\,.
\end{aligned}$$

Liczba $p \geq p_0$ jest odtąd ustalona. Wielomian $W(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n\big(z^n-1\big)$ jest ciągły i mamy $W(1) = 0$. Dlatego istnieje liczba $\delta_1 > 0$ taka, że $|W(z)| < \eta$ dla $|1-z| < \delta_1$. Zatem

$$|g(z)-S| < \eta + \eta\cdot\frac{|1-z|}{1-|z|} \qquad \text{dla } |z|<1,\ |1-z|<\delta_1. \tag{8.16}$$

[2]Proszę sobie przypomnieć dowód kryterium Abela: tam wykonywaliśmy podobny rachunek.

Krok 3. Jeśli $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, to istnieje taka liczba $\delta_2 > 0$, że

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \le \frac{2}{\cos\alpha} \qquad \text{dla } z \in T(1,\alpha),\ |1-z| < \delta_2. \tag{8.17}$$

Istotnie, niech $1 - z = re^{i\theta}$, gdzie wobec definicji zbioru $T(1,\alpha)$ kąt $\theta \in (-\alpha, \alpha)$. Mamy

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (1 - re^{i\theta}) \cdot (1 - re^{-i\theta}) = 1 - 2r\cos\theta + r^2$$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{|1-z|}{1-|z|} &= \frac{|1-z|(1+|z|)}{1-|z|^2} = \frac{r(1+|z|)}{2r\cos\theta - r^2} = \frac{1+|z|}{2\cos\theta - r} \\ &\le \frac{2}{2\cos\theta - r} \qquad \text{dla} \quad z = 1 - re^{i\theta} \in T(1,\alpha)\,. \end{aligned}$$

Niech $\delta_2 = \cos\alpha$. Dla $\theta \in (-\alpha, \alpha)$ jest $\cos\theta > \cos\alpha > 0$. Jeśli $|1-z| = r < \delta_2 = \cos\alpha$, to wtedy

$$2\cos\theta - r > 2\cos\theta - \cos\alpha > \cos\alpha\,.$$

Dlatego

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \le \frac{2}{2\cos\theta - r} \le \frac{2}{\cos\alpha}, \qquad z \in T(1,\alpha), \quad |1-z| < \delta_2 = \cos\alpha$$

Otrzymaliśmy więc (8.17).

Krok 4. Zakończenie dowodu. Niech $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Gdy $|1-z| < \delta$ i $z \in T(1,\alpha)$, możemy jednocześnie korzystać z oszacowań (8.16) i (8.17). Otrzymujemy dla takich z nierówność

$$|g(z) - S| \overset{(8.16)}{<} \eta + \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|} \overset{(8.17)}{\le} \eta\left(1 + \frac{2}{\cos\alpha}\right) < \varepsilon\,,$$

o ile np.

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{\cos\alpha}\right)^{-1}.$$

Dowód twierdzenia Abela jest zakończony. □

Jest oczywiste, że stosując twierdzenie Abela do funkcji analitycznych zmiennej rzeczywistej, otrzymujemy następujący fakt.

Wniosek 8.29. *Niech $a_n \in \mathbb{R}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ i niech*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \textit{dla } x \in (-R, R)\ , \qquad \textit{gdzie } \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\,.$$

Załóżmy, że szereg potęgowy definiujący funkcję g jest zbieżny w którymś końcu przedziału $(-R, R)$ i ma w nim sumę równą S. Wówczas g ma w tym końcu przedziału zbieżności granicę jednostronną równą S.

Inaczej mówiąc, zachodzi następujący wniosek.

Wniosek 8.30 (ciągłość szeregu potęgowego w końcu przedziału zbieżności). *Załóżmy, że szereg potęgowy*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

o współczynnikach rzeczywistych ma promień zbieżności równy R. Jeśli suma $g(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ jest skończona, to funkcja g jest ciągła na $(-R, R]$.

Przykład 8.31 (suma szeregu anharmonicznego). Rozważmy szereg potęgowy

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Łatwo sprawdzić, że ma on promień zbieżności 1. Ponadto, różniczkując wyraz po wyrazie otrzymujemy

$$g'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}\,.$$

Dlatego $g(x) = \ln(1+x)$ na $(-1,1)$: pochodna różnicy tych funkcji znika, więc różnica jest stała, ale dla $x = 0$ jest równa 0, więc jest równa zero dla wszystkich $|x| < 1$. (Podobny argument widzieliśmy w Przykładzie 7.22).

Dla $x = 1$ szereg $g(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ jest zbieżny (kryterium Leibniza). Na mocy Wniosku 8.30 jest więc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = g(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2\,.$$

Wykorzystaliśmy więc twierdzenie Abela, żeby obliczyć sumę $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$. □

Przykład 8.32 (szereg Leibniza o sumie $\frac{\pi}{4}$). Niech

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\,, \qquad |x| < 1.$$

Podobnie jak poprzednio, sprawdzamy, że

$$g'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Mamy też $(\operatorname{arc\,tg} x)' = 1/(1+x^2)$ i $\operatorname{arc\,tg} 0 = g(0) = 0$. Wnioskujemy, że $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ dla $|x| < 1$. Jednak dla $x = 1$ szereg definiujący funkcję g jest szeregiem zbieżnym (znów wolno użyć kryterium Leibniza). Dlatego na mocy Wniosku 8.30

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = g(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Szereg po lewej stronie nie nadaje się w praktyce do obliczania π, gdyż jest zbieżny bardzo wolno. Obliczając np. sumę 1000 początkowych wyrazów, otrzymujemy przybliżenie $\pi \approx 3{,}14059\ldots$, różniące się od π już na trzecim miejscu po przecinku.

Zadanie 8.33. Wykazać, że istnieje taka stała $c > 0$, że

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \right| \geq \frac{c}{N} \qquad \text{dla } N = 1, 2, \ldots$$

8.6 Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy

Do tej pory omijaliśmy następujący ogólny problem. Niech $f\colon K_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\} \to \mathbb{C}$, lub $f\colon \mathbb{R} \supset (-R, R) \to \mathbb{R}$. Kiedy f rozwija się w szereg potęgowy, zbieżny do f w pewnym otoczeniu zera?

Odpowiedź na to pytanie jest inna w przypadku zespolonym, inna zaś w przypadku rzeczywistym. W dziedzinie zespolonej warunkiem koniecznym i dostatecznym rozwijalności funkcji w szereg potęgowy jest istnienie f'; Czytelnik pozna ten zaskakujący na pierwszy rzut oka fakt, ucząc się teorii funkcji analitycznych. Natomiast w przypadku rzeczywistym założenie $f \in C^\infty$ jest koniecznym warunkiem rozwijalności w szereg potęgowy, ale nawet ono nie wystarcza: wspomnieliśmy o tym, omawiając funkcję (8.9).

Jeśli f jest w pewnym otoczeniu zera gładka, tzn. ma pochodne wszystkich rzędów, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ możemy napisać, posługując się np. wzorem Taylora,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)\,. \tag{8.18}$$

Lemat 8.34. *Niech $f\colon (-R, R) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞. Następujące warunki są równoważne.*

(a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *w przedziale* $|x| < \eta \le R$*;*

(b) Dla każdego $x \in (-\eta, \eta)$ reszta $r_n(x)$, określona wzorem (8.18), dąży do zera dla $n \to \infty$.

Dowód. Jeśli f jest na przedziale $(-\eta, \eta)$ sumą zbieżnego szeregu potęgowego, to r_n, równa różnicy f i n-tej sumy częściowej tego szeregu, dąży do zera, gdy $n \to \infty$. Na odwrót, gdy $r_n(x) \to 0$ dla $n \to \infty$, to przechodząc do granicy $n \to \infty$ we wzorze (8.18), otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x) - \lim_{n\to\infty} r_n(x) = f(x)\,.$$

Przykład 8.35 (szereg dwumienny). Niech $a \in \mathbb{R}$. Wykażemy, że funkcja

$$f(x) = (1+x)^a, \qquad \mathbb{R} \ni x > -1,$$

jest sumą szeregu potęgowego zbieżnego na przedziale $(-1, 1)$. Połóżmy

$$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdot\ldots(a-n+1)}{n!} \tag{8.19}$$

(Dla $a \in \mathbb{N}$, $a \ge n$, definicja jest taka sama, jak definicja współczynnika dwumianowego, z którą spotykaliśmy się wcześniej). Wykażemy, że

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n\,, \qquad |x| < 1. \tag{8.20}$$

Dla $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ wzór (8.20) wynika wprost z dwumianu Newtona. Współczynniki dwumianowe (8.19) są wtedy zerami dla wszystkich $n > a$ i suma w (8.20) jest skończona.

Ustalmy liczbę $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \ldots\}$. Niech $a_n = \binom{a}{n}$. Wtedy

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-n+1)}\right| = \left|\frac{a-n}{n+1}\right| \to 1, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

Dlatego $|a_n|^{1/n} \to 1$, gdy $n \to \infty$ (patrz Przykład A.5). Szereg po prawej stronie (8.20) ma więc promień zbieżności 1. Obliczając pochodne funkcji $f(x) = (1+x)^a$, łatwo stwierdzamy, że

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-n+1)(1+x)^{a-n} \tag{8.21}$$

i dlatego

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a(a-1)\cdot \ldots (a-n+1)}{n!} = \binom{a}{n}.$$

Wiemy już zatem, że jeśli f rozwija się wokół zera w szereg potęgowy, to jest to szereg (8.20). Pozostaje sprawdzić warunek z ostatniego lematu, tzn. zbieżność reszty $r_n(x)$ do zera dla $n \to \infty$. Posłużymy się w tym celu wzorem na resztę w postaci Schlömilcha–Roche'a,

$$f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = r_n(x) \overset{(6.18)}{=} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p} x^{n+1}, \quad \theta = \theta(x, n, p) \in (0, 1).$$

(Patrz Twierdzenie 6.59, wzór (6.18) – użyliśmy numeru n zamiast k, a punkt $x_0 = 0$.) Będziemy pracować z $p = 1$; w tym przypadku reszta Schlömilcha–Roche'a nazywa się *resztą Cauchy'ego*. Podstawiając $f(x) = (1+x)^a$ i $p = 1$, otrzymujemy dzięki (8.21)

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-n)(1+\theta x)^{a-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= \binom{a-1}{n} x^n \cdot a(1+\theta x)^{a-n-1} \cdot x(1-\theta)^n \\ &= \binom{a-1}{n} x^n \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot ax(1+\theta x)^{a-1}. \end{aligned}$$

Przeanalizujmy teraz zachowanie każdego z trzech czynników w ostatnim wyrażeniu. Ustalmy $x \in (-1, 1)$. Po pierwsze,

$$\binom{a-1}{n} x^n \to 0 \qquad \text{dla } n \to \infty.$$

Jest to warunek konieczny (zbadanej wcześniej) zbieżności szeregu po prawej stronie (8.20) dla parametru $a - 1$ (zamiast a). Po drugie, $(1-\theta)/(1+\theta x) \in (0, 1)$, gdy $x > -1$ i $\theta \in (0, 1)$. Dlatego

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \in (0, 1) \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N},\ x \in (-1, 1).$$

Po trzecie wreszcie, mamy $2 > 1+\theta x \geq 1-\theta|x| > 1-|x| > 0$. Dlatego czynnik $ax(1+\theta x)^{a-1}$ też jest ograniczony,[3] gdyż funkcja $t \mapsto t^{a-1}$ jest ograniczona na przedziale $[1-|x|, 2]$. Reszta $r_n(x)$ jest zatem (przy ustalonym x) iloczynem czynnika, który zbiega do zera przy $n \to \infty$ oraz dwóch czynników, które są ograniczone. Mamy więc $r_n(x) \to 0$; to kończy dowód wzoru (8.20). □

[3] Wprawdzie w zapisie tego czynnika nie widać *jawnej* zależności od n, ale pamiętajmy, że liczba θ zależy i od x, i od n.