Rozdział 2

Generowanie topologii i baza

2.1 Generowanie topologii

Niech X będzie dowolnym zbiorem a $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ dowolną rodziną jego podzbiorów.

Definicja 2.1.1. Topologią *generowaną* przez rodzinę $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy najmniejszą topologię w X zawierającą $\mathcal{U}$ - czyli przecięcie wszystkich topologii zawierających rodzinę $\mathcal{U}$. Oznaczamy ją $\mathcal{T}(\mathcal{U})$.

Konstrukcja topologii $\mathcal{T}(\mathcal{U})$:

1. dołączamy do $\mathcal{U}$ przecięcia skończenie wielu elementów rodziny $\mathcal{U}$ definiując rodzinę:
$$\mathcal{U}^{\cap} := \{U_1 \cap \cdots \cap U_k \,|\, U_i \in \mathcal{U}\}$$
Rodzina $\mathcal{U}^{\cap}$ jest już zamknięta ze względu na branie przecięć skończenie wielu zbiorów tzn. jeśli $V_1, V_2 \in \mathcal{U}^{\cap}$ to $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}^{\cap}$

2. Do rodziny $\mathcal{U}^{\cap}$ dołączamy wszystkie sumy zbiorów należących do $\mathcal{U}^{\cap}$ definiując rodzinę:
$$(\mathcal{U}^{\cap})^{\cup} := \{\bigcup_{i \in I} V_i \,|\, V_i \in \mathcal{U}^{\cap}\}$$
Rodzina $(\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$ jest zamknięta ze względu na branie sum zbiorów tzn. dla dowolnej rodziny $\{W_j\}_{j \in J} \subset (\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$ jej suma $\bigcup\limits_{j \in J} W_j \in (\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$.

3. $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = (\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$

Stwierdzenie 2.1.1. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną, Y będzie zbiorem oraz $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(Y)$ rodziną jego podzbiorów. Przekształcenie $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}(\mathcal{V}))$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $V \in \mathcal{V}$ jego przeciwobraz $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.* $\square$

Przykład 2.1.1. Wybór rodziny generującej topologię nie jest oczywiście jednoznaczny; np. cała topologia generuje samą siebie. W przestrzeni metrycznej topologia $\mathcal{T}(d)$ jest generowana przez każdą z następujących rodzin:

1. Rodzinę wszystkich kul otwartych.

2. Rodzinę kul otwartych o promieniach wymiernych.

3. Rodzinę kul otwartych o promieniach $\frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, 3....$

i wiele innych.

2.2 Baza topologii

Definicja 2.2.1 (Baza topologii)**.** Podrodzinę $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ nazywamy *bazą* topologii $\mathcal{T}$ jeśli dowolny zbiór $U \in \mathcal{T}$ jest sumą mnogościową pewnych zbiorów należących do $\mathcal{B}$.

Jeśli przestrzeń topologiczna posiada bazę przeliczalną, to mówimy że spełnia *II aksjomat przeliczalności.*

Rodzina $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $x \in X$ oraz zbioru otwartego $U \ni x$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{B}$ taki, że $x \in V \subset U$. Istotnie, jest to warunek równoważny stwierdzeniu, że U jest sumą zbiorów należących do $\mathcal{B}$. W zapisie logicznym warunek, że zbiór jest otwarty, wyrazony w terminach bazy jest nastepujący:

$$U \in \mathcal{T} \iff \forall_{x \in U} \exists_{V \ni \mathcal{B}} \, x \in V \subset U.$$

Jeśli $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$ to oczywiście $\mathcal{B}$ generuje topologię $\mathcal{T}$, przy czym w opisanej wyżej procedurze generowania topologii przez rodzinę zbiorów wystarczy dokonać kroku drugiego, bowiem definicji bazy przecięcie skończenie wielu zbiorów otwartych jest sumą zbiorów z $\mathcal{B}$.

Stwierdzenie 2.2.1. *Rodzina $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ jest bazą topologii $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ generowanej przez rodzinę $\mathcal{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:*

(B1) $\forall_{x \in X} \exists_{V \in \mathcal{B}} \; x \in V$*, czyli* $\bigcup\{U \mid U \in \mathcal{B}\} = X$

(B2) $\forall_{V_1, V_2 \in \mathcal{B}} \forall_{x \in V_1 \cap V_2} \exists_{V \in \mathcal{B}} \; x \in V \subset V_1 \cap V_2$

□

Stwierdzenie 2.2.2. *Niech $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ będą topologiami w zbiorze X a $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_1$, i $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{T}_2$ odpowiednio pewnymi ich bazami. Inkluzja topologii $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in X$ i zbioru bazowego $U_1 \in \mathcal{B}_1$ takiego, że $x \in U_1 \in \mathcal{B}_1$ istnieje zbiór U_2 taki, ze $x \in U_2 \subset U_1$.* □

Definicja 2.2.2. Mówimy, że rodzina podzbiorów $\{A_s\}_{s \in S}$ zbioru X jest jego *pokryciem* jeśli $\bigcup\limits_{s \in S} A_s = X$.

Stwierdzenie 2.2.3. *Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ posiada bazę przeliczalną, to z każdego pokrycia X zbiorami otwartymi $\{U_s\}_{s \in S} \subset \mathcal{T}$ można wybrać podpokrycie przeliczalne, czyli istnieją wskaźniki $s_1, s_2, ... \in S$ takie, że $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{s_i} = X$.*

Ostatnie stwierdzenie wynika natychmiast z następującego lematu teorio-mnogościowego:

Lemat 2.2.1. *Załóżmy, że mamy dane dwa pokrycia zbioru* X*:* $\{A_s\}_{s\in S}$ *oraz* $\{B_t\}_{t\in T}$*. Jeśli dla każdego* $s \in S$ *i dla każdego punktu* $a \in A_s$ *istnieje zbiór* $B_{t(a)}$ *taki, że* $a \in B_{t(a)} \subset A_s$*, to istnieje podzbiór* $S' \subset S$ *mocy nie większej niż moc zbioru* T *taki, że* $\{A_s\}_{s\in S'}$ *jest także pokryciem.*

Dowód. Rozpatrzmy funkcję $\tau : \{(a,s) \mid a \in A_s,\ s \in S\} \to T$ taką, że $\forall_{(a,s)} a \in B_{\tau(a,s)} \subset A_s$ i oznaczmy przez $T' \subset T$ obraz τ, a więc $X = \bigcup\limits_{t'\in T'} B_{t'}$. Dla dowolnego $t' \in T'$ wybieramy po jednym elemencie $(a', s') \in \tau^{-1}(t')$ i definiujemy zbiór

$$S' := \{s' \in S \mid \exists_{t'\in T'}\, (a', s')\, \text{jest wybranym elementem}\, \tau^{-1}(t')\}.$$

Oczywiście $|S'| \leqslant |T'| \leqslant |T|$ oraz $\{A_{s'}\}_{s'\in S'}$ jest pokryciem, bowiem:

$$\bigcup_{s'\in S'} A_{s'} \supset \bigcup_{t'\in T'} B_{t'} = X.$$

□

Wniosek 2.2.1. *Jeśli przestrzeń* $(X, \mathcal{T})$ *spełnia II aksjomat przeliczalności (tzn. posiada bazę przeliczalną), to z dowolnej bazy można wybrać bazę przeliczalną.* □

Definicja 2.2.3 (Baza topologii w punkcie)**.** Niech $x \in X$ będzie ustalonym punktem. Podrodzinę $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{T}$ nazywamy *bazą topologii* $\mathcal{T}$ *w punkcie* x jeśli dla każdego zbioru otwartego $U \ni x$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{B}_x$ taki, że $x \in V \subset U$. Bazę w punkcie nazywamy także *bazą otoczeń* punktu x.

Jeśli przestrzeń topologiczna posiada bazę przeliczalną w każdym punkcie, to mówimy że spełnia *I aksjomat przeliczalności.*

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, to dla dowolnego $x \in X$ rodzina $\mathcal{B}_x := \{U \in \mathcal{B} \mid U \ni x\}$ jest bazą w punkcie x. Odwrotnie, mając bazy w punktach $\mathcal{B}_x$ dla wszystkich $x \in X$, rodzina $\mathcal{B} := \bigcup\limits_{x\in X} \mathcal{B}_x$ jest bazą przestrzeni $(X, \mathcal{T})$.

Przykład 2.2.1. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną to dla ustalonego punktu $x_0 \in X$ rodzina kul $\mathcal{B}(x_0) := \{B(x_0; \frac{1}{n}) \mid n = 1, 2, ...\}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}(d)$ w punkcie x_0, a więc dowolna przestrzeń metryzowalna spełnia I aksjomat przeliczalności.