Rozdział 9

Homotopia

9.1 Homotopia odwzorowań

Definicja 9.1.1. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi, a $I := [0,1]$ będzie odcinkiem z topologią euklidesową. *Homotopią* nazxywamy dowolne przekształcenie ciągłe $F \colon X \times I \to Y$. Przekształcenia $f_0, f_1 \colon X \to Y$ nazywamy *homotopijnymi* jeśli istnieje homotopia $F \colon X \times I \to Y$ taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzą równości $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$ i oznaczamy $f_0 \sim f_1$ lub jeśli chcemy pamiętać jaka homotopia je łączy $f_0 \sim_F f_1$.

Stwierdzenie 9.1.1. *Homotopia $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze odwzorowań* $\mathrm{Map}\,(X,Y)$.

Dowód. Sprawdzimy trzy warunki, które musi spełniać relacja równoważności:

Zwrotność. Każde przekształcenie $f \colon X \to Y$ jest homotopijne ze sobą przez homotopię stałą: $F \colon X \times I \to Y$, $F(x,t) := f(x)$.

Symetria. Jeśli $F \colon X \times I \to Y$ jest homotopią między f_0 i f_1, to $F' \colon X \times I \to Y$, $F'(x,t) := F(x, 1-t)$ jest homotopią między f_1 i f_0.

Przechodniość. Jeśli $F \colon X \times I \to Y$ jest homotopią między f_0 i f_1 a $G \colon X \times I \to Y$ jest homotopią między f_1 i f_2 to $H \colon X \times I \to Y$ zdefiniowane przez F na dolnej połowie walca i przez G na górnej połowie:

$$H(x,t) := \begin{cases} F(x,2t)\,\mathrm{dla}\, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1)\,\mathrm{dla}\, \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

jest homotopią między f_0 a f_2. □

Zbiór klas homotopii oznaczamy $[X,Y] := \mathrm{Map}\,(X,Y)/\sim$. Zauważmy, że $[\{p\}, X] = \pi_0(X)$, gdzie $\{p\}$ – przestrzeń jednopunktowa, jest rozważanym poprzednio zbiorem składowych łukowych przestrzeni X.

Stwierdzenie 9.1.2. *Dowolne dwa przekształcenia $f_0, f_1 \colon X \to W$ gdzie $W \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem wypukłym są homotopijne przez homotopię $F(x,t) := (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$, zwaną homotopią afiniczną.*

Składanie przekształceń zachowuje relację homotopii:

Stwierdzenie 9.1.3. *Jeśli $f_0, f_1 \colon X \to Y$ oraz $g_0, g_1 \colon Y \to Z$ oraz $f_0 \sim f_1$ i $g_0 \sim g_1$, to ich złożenia są homotopijne: $g_0 f_0 \sim g_1 f_1$*

Dowód. Skonstruujemy homotopie $g_0 f_0 \sim g_0 f_1 \sim g_1 f_1$ i skorzystamy z przechodniości relacji homotopii. Niech $F \colon X \times I \to Y$ będzie homotopią między f_0 i f_1 a $G \colon Y \times I \to Z$ homotopią między g_0 i g_1. Wtedy złożenie $X \times I \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{g_0} Z$ jest homotopią $g_0 f_0 \sim g_0 f_1$ a złożenie $X \times I \xrightarrow{f_1 \times id} Y \times I \xrightarrow{G} Z$ jest homotopią $g_0 f_1 \sim g_1 f_1$. □

Wniosek 9.1.1. *Jeśli $f : X \to Y$, to dla dowolnej przestrzeni Z są dobrze określone przekształcenia $f^{\#} \colon [Y, Z] \to [X, Z]$, $f^{\#}([\phi]) := [\phi \circ f]$ oraz $f_{\#} \colon [Z, X] \to [Z, Y]$, $f_{\#}([\psi]) := [f \circ \psi]$. Jeśli $f \sim g$ to $f_{\#} = g_{\#}$ i $f^{\#} = g^{\#}$. Jeśli dane są dwa przekształcenia $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, to $(gf)_{\#} = g_{\#} f_{\#}$ oraz $(gf)^{\#} = f^{\#} g^{\#}$.*

Dowód. Wynika natychmiast z definicji i z poprzedniego Stwierdzenia. □

Następujące twierdzenie powiada, że przekształcenia bliskie o wartościach w otwartych podzbiorach przestrzeni euklidesowych są homotopjne.

Twierdzenie 9.1.1. *Niech X będzie przestrzenią zwartą, a $W \subset \mathbb{R}^n$ otwartym podzbiorem. Dla każdego przekształcenie $f \colon X \to W$ istnieje $\epsilon > 0$ takie, że dowolne przekształcenie $g \colon X \to W$ dla którego $d_{\sup}(g, f) < \epsilon$ jest homotopijne z f.*

Dowód. Obraz $f(X) \subset G$ jest podzbiorem zwartym. Zatem jego pokrycie

$$f(X) \subset \bigcup_{x \in X} B(f(x), r_x) \subset W$$

ma liczbę Lebesgue'a $\lambda > 0$ tzn. dowolne dwa punkty odległe o mniej niż λ leżą w pewnej kuli $B(f(x), r_x) \subset W$. Zatem jeśli $d_{\sup}(g, f) < \lambda =: \epsilon$ to afiniczna homotopia $F(x, t) = (1 - t) f(x) + t g(x)$ jest dobrze określonym odwzorowaniem $F : X \times I \to W$. □

9.2 Punktowana homotopia

Jak zobaczymy w dalszych rozdziałach bywa pożyteczne rozpatrywanie przestrzeni topologicznych z wyróżninym punktem i odwzorowań zachowujacych te punkty. Takie sytuacje spotykamy jeśli w przestrzeni występuje struktura algebraiczna (np. przestrzenie wektorowe lub grupy macierzy). Punktem wyróżnionym jest wtedy element neutralny i jest on zachowywany przez homomorfizmy. Dokładniej, punktowaną przestrzenią (lub przestrzenią z wyróżnionym punktem) nazywamy parę (X, x_0) gdzie X jest przestrzenią topologiczną (oznaczenie topologii pomijamy), a $x_0 \in X$.

Definicja 9.2.1. Niech (X, x_0), (Y, y_0) będą przestrzeniami z wyróżnionymi punktami. *Homotopią punktowaną* nazywamy przekształcenie ciągłe $F \colon X \times [0, 1] \to Y$, takie, że dla każdego $t \in I$, $F(x_0, t) = y_0$.

Przekształcenia punktowane $f_0, f_1 \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ są *homotopijne* jeśli istnieje punktowana homotopia $F \colon X \times [0, 1] \to Y$ taka, że $F(-, 0) = f_0$, $F(-, 1) = f_1$.

Deifnicja punktowanej homotopii prowadzi w oczywisty sposób do definicji punktowanej homotopijnej równoważności. Np. włożenie $j\colon (S^{n-1}, e_1) \subset (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_1)$ jest punktowaną homotopijną równoważnością, gdyż retrakcja $r\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_1) \to (S^{n-1}, e_1)$ jest przekształceniem punktowanym, $rj = id_{S^{n-1}}$ oraz jr i $id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ wiąże punktowana homotopia: $H\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zadana wzorem: $H(p,t) := (1-t)\frac{p}{||p||} + tp$.

Podobnie jak zwykła homotopia, punktowana homotopia $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze przekształceń punktowanych $\mathrm{Map}_*(X,Y) \subset \mathrm{Map}\,(X,Y)$. Zbió/r klas punktowanej homotopii oznaczamy $[X,Y]_* := \mathrm{Map}_*(X,Y)/\sim$. Konstrukcje w dowodzie Stw. 9.1.1 zachowują homotopie punktowane. Istnieje odwzorowanie zapominania $\Phi\colon [X,Y]_* \to [X,Y]$ przypisujące klasie homotopii punktowanej odwzorowania jego zwykłą klasę homotopii: $\Phi[f]_* = [f]$. Odwzorowanie to w ogólności nie musi być ani surjekcją, ani injekcją. Dla odwzorowań w okrąg S^1 mamy jednak następujące:

Stwierdzenie 9.2.1. *Dla dowolnej przestrzeni punktowanej (X, x_0) i punktowanego okręgu $(S^1, 1)$, odwzorowanie $\Phi\colon [X, S^1]_* \xrightarrow{\simeq} [X, S^1]$ jest bijekcją.*

Lemat 9.2.1. *Niech $z_0 \in S^1$. Odwzorowanie $f_{z_0}\colon S^1 \to S^1$, $f_{z_0}(w) = wz_0$ jest homotopijne z identycznością.* □

Dowód 9.2.1. Zastosujemy dwukrotnie powyższy lemat.

Φ jest surjekcją, bo dowolne $f\colon X \to S^1$ jest homotopijne z odwzorowaniem $g\colon X \to S^1$ $g(x) := f(x)f(x_0)^{-1}$ dla którego $g(x_0) = 1$.

Φ jest injekcją. Jeśli $F\colon X \times I \to Y$ jest homotopią między punktowanymi przekształceniami, to $G(x,t) := F(x,t)F(x_0,t)^{-1}$ jest punktowaną homotopią. □

Na przestrzeniach punktowanych można wykonywać konstrukcje opisane w Rozdziale 3. Podprzestrzeń przestrzeni punktowanej zawierająca wyróżniony punkt jest oczywiście przestrzenią punktowaną a włożenie przekształceniem punktowanym, przestrzeń ilorazowa jest przestrzenią punktowana - wyróżnionym punktem jest w niej klasa równoważności punktu wyróżnionego. Podobnie produkt kartezjański rodziny przestrzeni z wyróżnionym punktem $(X_s, x_s^0)_{s\in S}$ posiada naturalny punkt wyróżniony $x^0 := \{x_s^0\}_{s\in S}$, a rzutowania na czynniki są odwzorowaniami punktowanymi. Inaczej jest z konstrukcją sumy prostej; w sumie rozłącznej mamy dwa punkty wyróżnione, które następnie utożsamiamy. Odpowiednik sumy prostej dla przestrzeni punktowanych nazywa się *bukietem*, co uzasadnia następująca:

Definicja 9.2.2. Niech (X, x_0) (Y, y_0) będą przestrzeniami z wyróżnionymi punktami. Bukietem tych przestrzeni nazywamy przestrzeń punktowaną $X \vee Y := X \sqcup Y/\sim$ gdzie $(x_0, 1) \sim (y_0, 2)$ i punktem wyróżnionym jest klasa $[(x_0,1)] = [(y_0,2)]$, wyposażoną w włożenia $j_X\colon X \to X \vee Y$ oraz $j_Y\colon Y \to X \vee Y$ (por. Definicja 4.5.2).

Zauważmy, że bukiet $X \vee Y$ jest homeomorficzny z podzbiorem produktu kartezjańskiego:

$$X \vee Y = \{(x,y) \in X \times Y\colon x = x_0 \,\mathrm{lub}\, y = y_0\}.$$

i ten podzbiór bywa przyjmowany za definicję bukietu.

Stwierdzenie 9.2.2. *Niech (Z, z_0) będzie przestrzenią z wyróżnionym punktem. Dla dowolnych dwóch przestrzeni Hausdorffa z wyróżnionymi punktami włożenia $j_X \colon X \subset X \vee Y$, $j_Y \colon Y \subset X \vee Y$ definiują bijekcję*

$$(j_1^*, j_2^*) \colon [X \vee Y, Z]_* \to [X, Z]_* \times [Y, Z]_*$$

Dowód. Mamy oczywistą bijekcję $(j_1^*, j_2^*) \colon \operatorname{Map}_*(X \vee Y, Z) \to Map_*(X, Z) \times \operatorname{Map}_*(Y, Z)$. Trzeba pokazać, że odwzorowanie to pozostaje bijekcją po przejściu do klas homotopii. Oczywiście pozostaje surjekcją. Niech $f, g \colon X \vee Y \to Z$ będą dwoma odwzorowaniami takimi, że $f|X \sim g|X$ oraz $f|Y \sim g|Y$ i niech $H_X \colon X \times I \to Z$ oraz $H_Y \colon Y \times I \to Z$ będą odpowiednimi punktowanymi homotopiami.Definiujemy homotopię $H \colon (X \vee Y) \times I \to Z$ następująco (traktujemy $X \vee Y$ jako podzbiór $X \times Y$):

$$H(x, y, t) = \begin{cases} H_X(x, t) & \text{jeśli} \quad y = y_0 \\ H_Y(y, t) & \text{jesli} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Ponieważ homotopie H_X i H_Y są punktowane, więc H jest dobrze określone, a ponieważ podzbiory $X \times I \subset (X \vee Y) \times I$ oraz $Y \times I \subset (X \vee Y) \times I$ są domknięte (tu korzystamy z własności Hausdorffa!), więc H jest ciągłe. □

Wniosek 9.2.1. *Niech $(S^1, 1)$ będzie punktowanym okręgiem. Dla dowolnych dwóch przestrzeni Hausdorffa z wyróżnionymi punktami włożenia $j_X \colon X \subset X \vee Y$, $j_Y \colon Y \subset X \vee Y$ definiują izomorfizm grup*

$$(j_1^*, j_2^*) \colon [X \vee Y, S^1] \to [X, S^1] \times [Y, S^1].$$

Dowód. Ze Stw. otrzymujemy izomorfizm grup punktowanych klas homotopii $(j_1^*, j_2^*) \colon [X \vee Y, S^1]_* \to [X, S^1]_* \times [Y, S^1]_*$. Dzięki Stw. 9.2.1 możemy zastapić zbiory klas punktowanych przez klasy zwykłej homotopii. □

Uwaga 9.2.1. Ponieważ jak zauważyliśmy włożenie $(S^1, 1) \subset (\mathbb{C}^*, 1)$ jest punktowaną homotopijną równoważnością, więc we Wn. 9.2.1 mozna zastąpić okrąg przez $\mathbb{C}^*$.

9.3 Przekształcenia i przestrzenie ściągalne

Definicja 9.3.1. Przekształcenie $f \colon X \to Y$ nazywa się *ściągalne* jeśli jest homotopijne z przekształceniem stałym w pewien punkt. Przestrzeń X nazywa się ściągalna jeśli przekształcenie identycznościowe $Id \colon X \to X$ jest ściągalne.

Przykład 9.3.1. Podzbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy gwiaździstym jeśli istnieje punkt $p_0 \in G$ (srodek gwiazdy) taki, że dla każdego $p \in G$ odcinek $[p_0, p] \subset G$. Zbiory wypukłe są gwiaździste. Dowolny podzbiór gwiaździsty jest ściągalny, a ściagnięcie jest dane wzorem $F \colon G \times I \to G$, $F(p, t) = (1 - t)p_0 + tp$.

Stwierdzenie 9.3.1. *Dowolne przekształcenie określone na przestrzeni ściągalnej lub o wartościach w przestrzeni ściągalnej jest ściągalne.* □

9.4 Homotopijna równoważność

Definicja 9.4.1. Przekształcenie $f : X \to Y$ nazywa się *homotopiją równoważnością* jeśli istnieje $g : Y \to X$ takie, że $f \circ g \sim Id_Y$ i $g \circ f \sim Id_X$. Mówimy, że przestrzenie X, Y są homotopijnie równoważne.

Uwaga 9.4.1. Każdy homeomorfizm jest homotopijną równoważnością. Przestrzeń jest ściągalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest homotopijnie równoważna z przestrzenią jednopunktową.

Stwierdzenie 9.4.1. *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest homotopijną równoważnością i Z jest dowolną przestrzenią, to $f^{\#}\colon [Y,Z] \to [X,Z]$, $f^{\#}([\phi]) := [\phi \circ f]$ oraz $f_{\#}\colon [Z,X] \to [Z,Y]$, $f_{\#}([\psi]) := [f \circ \psi]$ są bijekcjami. W szczególności f definiuje bijekcję zbiorów składowych łukowych $f_{\#}\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$.*

Dowód. Wykażemy, że $f_{\#}$ jest bijekcją. Niech $g\colon Y \to X$ będzie homotopijną odwrotnością tzn. $fg \sim id_Y$ i $gf \sim id_X$. Z Wniosku 9.1.1 otrzymujemy równości $f_{\#}g_{\#} = (fg)_{\#} = id_{[Z,Y]}$ i $g_{\#}f_{\#} = (gf)_{\#} = id_{[Z,X]}$, a więc $f_{\#}$ jest bijekcją. Podobnie rozumowanie przeprowadzamy dla $f^{\#}$. □

Przykład 9.4.1. Podajemy przykłady ważnych homotopijnych równoważności:

1) Homotopijną odwrotnością włożenia $\iota\colon S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jest retrakcja $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$, $r(x) := \frac{x}{||x||}$

2) Jeśli Y jest ściągalna, to $p_X\colon X \times Y \to X$ jest homotopijną równoważnością.

3) Włożenie równika $S^1 \hookrightarrow M$ we wstęgę Möbiusa jest homotopijną równoważnością.

9.5 Jednospójność

Definicja 9.5.1. Łukowo spójną przestrzeń X nazywamy *jednospójną* jeśli dowolne odwzorowanie $S^1 \to X$ jest ściągalne.

Przykład 9.5.1. Dowolna przestrzeń ściągalna jest jednospójna.

Stwierdzenie 9.5.1. *Dla $n \geqslant 0$ odwzorowanie $f\colon S^n \to X$ jest ściągalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $\bar{f}\colon D^{n+1} \to X$ ($D^{n+1} := \bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$) takie, że $\bar{f}|S^n = f$.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli f jest ściągalne, to istnieje homotopia $F\colon S^n \times [0,1] \to X$ taka, że $F(x,0) = x_0$ i $F(x,1) = f(x)$. Rozpatrzmy odwzorowanie $q\colon S^n \times [0,1] \to D^{n+1}$, $q(\mathbf{v},t) := t\mathbf{v}$. Ponieważ q jest domknięte (a więc ilorazowe) odwzorowanie $\bar{f}([\mathbf{v},t]) := F(\mathbf{v},t)$ jest dobrze zdefiniowanym i ciągłym rozszerzeniem f.

$\Longleftarrow$ Jeśli f rozszerza się na D^{n+1} to jest ściągalne, bowiem dysk jest ściągalny jako podzbiór wypukły. Ściągnięcie f można zadać wzorem: $F(\mathbf{v},t) := (1-t)f(\mathbf{v}) + t\mathbf{e_1}$, gdzie $\mathbf{e_1}$ jest wektorem bazy kanonicznej. □

Zamiast odzwzorowań zdefiniowanych na okręgu $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ wygodnie jest rozważać zamknięte drogi (pętle) czyli odzwzorowania określone na odcinku $\omega\colon [0,1] \to X$ takie, że $\omega(0) = \omega(1)$. Nawet jesli interesują nas pętle, to pożyteczne jest też rozpatrywanie dróg o różnych początku i końcu.

Stwierdzenie 9.5.2. *Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Odwzorowanie $p\colon [0,1] \to S^1$ dane wzorem $p(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ustanawia bijekcję między zbiorem dróg zamkniętych (pętli) w X tzn. odwzorowań $\omega\colon [0,1] \to X$ takich, że $\omega(0) = \omega(1)$ a zbiorem odwzorowań $S^1 \to X$.*

Dowód. Dowolnemu odwzorowaniu $\alpha\colon S^1 \to X$ przypisujemy drogę zamkniętą $\alpha_p := p \circ \alpha\colon I \to X$. Odwrotnie, jeśli $\omega\colon [0,1] \to X$ jest drogą zamkniętą, to odwzorowanie $\omega^p\colon S^1 \to X$, $\omega^p(z) := \omega(t)$ gdzie $p(t) = z$ jest dobrze zdefiniowane i jest ciągłe, ponieważ p jest odwzorowaniem ilorazowym (a nawet domkniętym). □

Przypomnijmy z GAL, że odwzorowanie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ nazywa się afiniczne jeśli zachowuje kombinacje wypukłe tzn. dla każdego $t \in [0,1]$ zachodzi równość

$$f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b).$$

Obrazem przekształcenia afinicznego jest odcinek euklidesowy łączący punkty $f(a)$ i $f(b)$.

Definicja 9.5.2.

1) Drogę $\omega\colon I \to A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy kawałkami afiniczną (lub kawałkami liniową) jeśli istnieje podział odcinka $0 = t_0 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ taki, że obcięcia $\omega|[t_i, t_{i+1}]$ są przekształceniami afinicznymi.

2) Drogę $\omega\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ nazywamy łamaną jeśli jest afiniczna i jest przekształceniem różnowartościowym (a więc homeomorfizmem $\omega\colon [0,1] \xrightarrow{\simeq} \omega([0,1])$).

Lemat 9.5.1. *Dla dowolnej drogi $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ i liczby $\epsilon > 0$ istnieje droga kawałkami afiniczna $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ taka, że $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$ oraz $d_{\sup}(\alpha, \beta) < \epsilon$.*

Dowód. Pokryjmy obraz $\alpha([0,1])$ kulami euklidesowymi o środkach $x \in \alpha([0,1])$ i promieniach ϵ: $\{B(x,\epsilon)\}_{x\in\alpha([0,1])}$ i rozpatrzmy pokrycie odcinka przeciwobrazami $\{\alpha^{-1}(B(x,\epsilon))\}_{x\in\alpha([0,1])}$. Niech $\lambda > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a tego pokrycia a $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ podziałem odcinka takim, że $|t_i - t_{i+1}| < \lambda$. Niech $\beta_i\colon [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}^n$ będzie drogą afiniczną łączącą punkt $\alpha(t_i)$ z $\alpha(t_{i+1})$. Definiujemy kawałkami afiniczną drogę $\beta(s) := \beta_i(s)$ jesli $t_i \leqslant s \leqslant t_{i+1}$. Oczywiście $d_{\sup}(\alpha, \beta) < \epsilon$. □

Twierdzenie 9.5.1. *Dla $n > 1$ sfera S^n jest jednospójna, a nawet dowolne odwzorowanie $S^k \to S^n$ gdzie $k < n$ jest ściągalne.*

Dowód. Niech $\alpha\colon I \to S^n$ będzie dowolną pętlą (tzn. $\alpha(0) = \alpha(1) = p_0$). Pokażemy, że jest ona homotopijna z pętlą, której obraz nie jest całą sferą, a więc zawartą w zbiorze ściągalnym $S^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^n$. Rozważmy naszą pętlę jako odwzorowanie w całą przestrzeń euklidesową $\alpha\colon I \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ i korzystając z Lematu 9.5.1 wybierzmy kawałkami afiniczną petlę zaczepioną w p_0 $\beta\colon I \to \mathbb{R}^{n+1}$ taką, że $d_{\sup}(\alpha, \beta) < 1$. Wynika stąd, że

$\beta\colon I \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ a także obraz homotopii afinicznej $F(s,t) : (1-t)\alpha(s) + t\beta(s)$ leży w $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Składając tę homotopię z retrakcją $r\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $r(x) := \frac{x}{||x||}$ otrzymujemy homotopię $H := r \circ F\colon I \times I \to S^n$ łączącą pętlę $\alpha\colon I \to S^n$ z pętlą $r \circ \beta\colon I \to S^n$. Zauważmy, że $r(\beta(I))$ jest suma mnogościową skończonej liczby łuków kół wielkich, a więc nie wypełnia sfery, skąd wynika, że $\alpha \sim \beta$ jest ściagalna. □

Sfera jednowymiarowa S^1 nie jest jednospójna – gdyby była, to każda przestrzeń byłaby jednospójna! W dalszych rozdziałach zajmiemy się zbadaniem zbioru klas homotopii odzworowań $[S^1, S^1]$ i wykazaniem szeregu wniosków dotyczących topologii powierzchni.

9.6 Odwzorowanie wykładnicze i logarytm

This is the most important function in mathematics.
Walter Rudin[1]

Opiszemy jedno z najważniejszych odwzorowań topologii i analizy zespolonej, mające daleko idące uogólnienia w geometrii różniczkowej. Od tej pory wygodnie nam będzie traktować płaszczyznę euklidesową $\mathbb{R}^2$ jako zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ i korzystać z dodawania i mnożenia liczb zespolonych. Płaszczyznę euklidesową traktowaną jako ciało liczb zespolonych nazywa się płaszczyną Gaussa[2]. Będziemy też oznaczać $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zbiór liczb zespolonych różnych od zera, który jest grupą abelową ze względu na mnożenie liczb zespolonych.

Definicja 9.6.1. Jeśli $z = x + iy$ jest liczbą zespoloną to definiujemy

$$\exp(z) := e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \in \mathbb{C}^*.$$

Część rzeczywistą liczby zespolonej $z = x + iy$ będziemy oznaczać $\Re(z) := x$ a część urojoną $\Im(z) := y$. Przez $\arg(z)$ argument liczby z, czyli liczbę $0 \leqslant \theta < 2\pi$ taką, że $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, gdzie $|z|$ jest modułem z.

Stwierdzenie 9.6.1 (Własności exp). *Odwzorowanie* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, *(oznaczane krócej* $p := \exp$*) ma następujące własności:*

1. $p(z_1 + z_2) = p(z_1)p(z_2)$, $p(0) = 1$, *czyli p jest homomorfizmem grupy addytywnej liczb zespolonych w grupę multyplikatywną.*

2. *p jest surjekcją oraz $p(z) = p(z')$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita $k \in \mathbb{Z}$ taka, że $z' = z + 2k\pi i$).*

3. *Dla ustalonego punktu $z_0 \in \mathbb{C}^*$ oznaczmy półprostą $L^*_{z_0} := \{tz_0 \colon t \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{C}^*$. Przeciwobraz pólprostej $p^{-1}(L^*_{z_0}) = \{z \in \mathbb{C} \colon \Im(z) = \arg(z) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, czyli jest sumą rozłączną przeliczalnie wielu prostych równoległych do osi rzeczywistej.*

[1] Walter Rudin *Real & Complex Analysis.* Second Edition.McGraw-Hill Series in Higher Mathematics 1966, Prologue.

[2] Carl Friedrich Gauß (Braunschweig 1777 – 1855 Göttingen) worked in a wide variety of fields in both mathematics and physics incuding number theory, analysis, differential geometry, geodesy, magnetism, astronomy and optics. His work has had an immense influence in many areas. [Mac Tutor]

4. *Przeciwobraz* $p^{-1}(\mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0})$ *jest sumą rozłączną otwartych pasów*

$$U_k(z_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon \arg(z_0) + 2k\pi < \Im(z) < \arg(z_0) + 2(k+1)\pi\}$$

a każdy z nich jest odwzorowywany przez p *homeomorficznie na* $\mathbb{C}^* \setminus L^*_z$, *a więc* p *jest otwartą surjekcją.*

5. *Przeciwobrazem okręgu o promieniu* $r > 0$, $S^1_r := \{z \in \mathbb{C}^*\colon |z| = r\}$ *jest prosta równoległa do osi urojonej* $x = \log r$.

Dowód. Ad 1,2. Równości wynikają z definicji funkcji wykładniczej przez szereg zespolony badź z własności rzeczywistych funkcji trygonometrycznych.

Ad 3. Z definicji funkcji exp wynika, że

$$p^{-1}(\mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0}) = \{z \in \mathbb{C}\colon \Im(z) \neq \arg(z_0) + 2k\pi i\}.$$

Żeby pokazać, że $p\colon U_k(z_0) \to \mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0}$ jest homeomorfizmem skonstruujemy odwzorowanie odwrotne $\log_k\colon \mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0} \to U_k(z_0)$ dane wzorem

$$\log_k(w) := \log|w| + (\arg(z_0) + \theta(w) + 2k\pi)i$$

gdzie $\theta(w)$ jest kątem między półprostą $L^*_{z_0}$ a wektorem $w \in \mathbb{C}^*$. Ciągłość tego odwzorowania wynika z ciągłości logarytmu rzeczywistego oraz funkcji $\theta\colon \mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0} \to (0, 2\pi)$. Ponieważ pasy $U_k(z_0)$ i dopełnienia półprostych $\mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0}$ są podzbiorami otwartymi, a więc p jest odwzorowaniem otwartym. $\square$

Definicja 9.6.2. Logarytmem odwzorowania ciagłego $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ będziemy nazywać dowolne odwzorowanie ciagłe $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$ takie, że $\exp \circ \tilde{f} = f$, czyli dla każdego $x \in X$ zachodzi równość $\exp(\tilde{f}(x)) = f(x)$ tzn. diagram przekształceń:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ X \arrow[ru, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Zauważmy, że identyczność $Id\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ nie posiada logarytmu, nawet na podzbiorze $A \subset \mathbb{C}^*$, o ile zawiera on okrąg okrążający zero.

Stwierdzenie 9.6.2 (Jednoznaczność logarytmu)**.**

1. *Niech* $f\colon X \to \mathbb{C}^*$. *Jeśli* $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$ *jest logarytmem* f, *to dla każdej liczby całkowitej* $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{f}_k(x) := \tilde{f}(x) + 2k\pi i$ *jest także logarytmem* f.

2. *Jeśli* X *jest spójna i* $\tilde{f}_k\colon X \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2$ *są logarytmami odwzorowania* $f\colon X \to \mathbb{C}^*$, *takimi, że dla pewnego punktu* $x_0 \in X$ $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0)$ *to* $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$

3. *Jeśli* X *jest spójna i* $\tilde{f}_k\colon X \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2$ *są logarytmami odwzorowania* $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ *to istnieje liczba całkowita* $k \in \mathbb{Z}$ *taka, że dla każdego* $x \in X$ $\tilde{f}_1(x) - \tilde{f}_2(x) = 2k\pi i$.

Dowód.

Ad 1. Wynika bezpośrednio z Tw. 9.6.1 pkt. 2.

Ad 2. Załóżmy, że X jest przestrzenią spójną. Wykażemy, że zbiór

$$\{x \in X : \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)\}$$

jest otwarto – domknięty. Domkniętość wynika stąd, że $\mathbb{C}$ jest przestrzenią Hausdorffa. Wykażemy, że jest także otwarty. Jeśli dla pewnego punktu $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = z_0$ to możemy wybrać pewien pas $U_k(z) \ni z_0$ oraz otoczenie $V \ni x$ takie, że $\tilde{f}_i(V) \subset U_k(z)$ dla $i = 1, 2$. Z definicji logarytmu zachodzą równości $p\tilde{f}_1 = p\tilde{f}_2 = f$. Ponieważ $p\colon U_k(z) \to \mathbb{C}^*$ jest różnowartościowe, więc stąd wynika, że $\tilde{f}_1(x') = \tilde{f}_2(x')$ dla $x' \in U$. Jedynym niepustym podzbiorem otwarto–domknietym przestrzeni spójnej jest cała przestrzeń, a więc $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ na X.

Ad 3. Niech $x_0 \in X$; z własności funkcji wykładniczej (Tw. 9.6.1) wynika istnienie liczby całkowitej $k \in \mathbb{Z}$ takiej, że $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0) + 2k\pi i$. Z punktów 1,2 wynika, że $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) + 2k\pi i$ dla wszystkich $x \in X$. □

Wniosek 9.6.1. *Niech $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Załóżmy, że istnieje pokrycie $X = A_1 \cup A_2$ gdzie oba zbiory są otwarte, albo oba sa domknięte, ich przecięcie $A_1 \cap A_2$ jest spójne, oraz obcięcie przekształcenia $f|A_i$ posiada logarytm dla $i = 1, 2$. Wtedy przekształcenie f posiada logarytm.*

Dowód. Niech $\tilde{f}_i\colon A_i \to \mathbb{C}$ dla $i = 1, 2$ będą logarytmami. Oznaczmy $A_{12} := A_1 \cap A_2$. Ze Stw. 9.6.2 wnioskujemy, że istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $\tilde{f}_1|A_{12} + 2k\pi i = \tilde{f}_2|A_{12}$. Stąd formuła

$$\tilde{f}(p) := \begin{cases} \tilde{f}_1|A_{12}(p) + 2k\pi i & \text{dla} \quad p \in A_1 \\ \tilde{f}_2|A_{12}(p) & \text{dla} \quad p \in A_2 \end{cases}$$

określa logarytm f na X. □

Twierdzenie 9.6.1 (S. Eilenberg[3]). *Niech X będzie przestrzenią zwartą.*

1) Odwzorowanie $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ jest ściągalne wtedy i tylko wtedy, gdy posiada logarytm.

2) Dwa odwzorowania $f, g\colon X \to \mathbb{C}^*$ są homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloraz f/g posiada logarytm.

Dowód. Ad 1. $\Longleftarrow$ Niech $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$ będzie logarytmem tzn. $p \circ \tilde{f} = f$. Ponieważ przestrzeń $\mathbb{C}$ jest ściągalna, a więc przekształcenie $\tilde{f}$ jest ściagalne, a zatem złożenie z dowolnym innym przekształceniem jest ściągalna. Nb. homotopia może być łatwo zapisana wzorem $H\colon X \times I \to \mathbb{C}^*$, $H(x, t) := p(t\tilde{f}(x))$.

Ad 2. Jeśli $f \sim g$ i $F\colon X \times I \to \mathbb{C}^*$ jest homotopią między nimi, to $H(x, t) := F(x, t)/g(x)$ jest homotopią między odwzorowanien stałym w $1 \in \mathbb{C}^*$ a f/g. Odwrotnie, jeśli $H(x, t)$ jest homotopia między f/g a odwzorowaniem stałym w $1 \in \mathbb{C}^*$, to iloczyn $H(x, t)g(x)$ jest homotopią między f i g. □

[3] Samuel Eilenberg (Warszawa 1913 – 1998 New York)

Dowód punktu 1 twierdzenia w przeciwną stronę, a więc że przekształcenie ściągalne posiada logarytm, poprzedzimy ciekawym lematem, w którym wykorzystuje się mnożenie liczb zespolonych.

Lemat 9.6.1. *Niech X będzie przestrzenią zwarta a $F\colon X \times I \to \mathbb{C}^*$ homotopią taką, że $F(x,0) = z_0$ dla wszystkich $x \in X$. Dla dowolnego otoczenia otwartego $1 \in U \subset \mathbb{C}^*$ istnieją funkcje $G_1, \dots G_n\colon X \times I \to U \subset \mathbb{C}^*$ takie, że dla każdego $x \in X$ zachodzi równość: $F(x,t) = z_0 G_1(x,t) \dots G_n(x,t)$.*

Dowód lematu.. Zbiory $\{zU\}_{z \in \mathbb{C}^*}$ tworzą otwarte pokrycie $\mathbb{C}^*$. Zatem dzięki zwartości X możemy wybrać liczbę $\epsilon > 0$ taką, że jeśli $|t - t'| < \epsilon$, to dla każdego $x \in X$, $F(x,t), F(x,t') \in zU$ dla pewnego $z \in \mathbb{C}^*$. Niech $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ będzie podziałem odcinka takim, że $|t_i - t_{i+1}| < \epsilon$. Dla $j = 0, .., n-1$ zdefiniujemy funkcje

$$G_j(x,t) := \frac{F(x, \frac{j+1}{n} t)}{F(x, \frac{j}{n} t)}$$

$\square$

Dowódu pkt. 1 Twierdzenia 9.6.1. $\Longrightarrow$ Niech $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ będzie ściągalne a $F\colon X \times I \to \mathbb{C}^*$ będzie jego ściagnięciem, a więc homotopią taką, że $F(x,0) = z_0$ oraz $F(x,1) = f(x)$. Korzystając z Lematu 9.6.1 rozłóżmy F na iloczyn: $F(x,t) = z_0 G_1(x,t) \dots G_n(x,t)$. w którym $G_j(x,t) \in \{z \in \mathbb{C}\colon \arg(z) \neq \pi\}$. Ze Stw. 9.6.1 pkt.4 wiemy, że obcięcie odwzorowania wykładniczego

$$p\colon \{z \in \mathbb{C}\colon -\pi < \Im(z) < \pi\} \xrightarrow{\cong} \{z \in \mathbb{C}\colon \arg(z) \neq \pi\}$$

jest homeomorfizmem i oznaczmy jego odwrotność

$$\log_0\colon \{z \in \mathbb{C}\colon \arg(z) \neq \pi\} \xrightarrow{\cong} \{z \in \mathbb{C}\colon -\pi < \Im(z) < \pi\}.$$

Niech w_0 będzie dowolnym punktem takim, że $p(w_0) = z_0$. Definiujemy logarytm F wzorem:

$$\tilde{F}(x,t) := w_0 + \log_0(G_1(x,t)) + \cdots + \log_0(G_n(x,t)).$$

Z tej definicji natychmiast widać, że $\tilde{F}$ jest odwzorowaniem ciągłym, a z własności przekształcenia wykładniczego, że $p\tilde{F} = F$. $\square$

9.7 Homotopijna klasyfikacja odwzorowań w $\mathbb{C}^*$.

Dla dowolnej przestrzeni X zbiór odwzorowań $\mathrm{Map}\,(X, \mathbb{C}^*)$ posiada strukturę grupy abelowej, wyznaczoną przez mnożenie liczb zespolonych – funkcje mnożymy mnożąc je w każdym punkcie. W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać zbiór klas homotopii odwzorowań $[X, \mathbb{C}^*] = [X, S^1]$, który tę strukturę grupową dziedziczy, bowiem jeśli $f_0 \sim f_1, g_0 \sim g_1\colon X \to \mathbb{C}^*$ to ich iloczyny też są homotopijne: $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$.

Definicja 9.7.1. Zbiór $H^1(X) := [X, \mathbb{C}^*] = [X, S^1]$ z wyżej zdefiniowanym działaniem będziemy nazywać (pierwszą) grupą kohomologii (lub kohomotopii) przestrzeni X.

Ponieważ mnożenie liczb zespolonych jest przemienne, więc dla dowolnej przestrzeni grupa $H^1(X)$ jest abelowa.

Stwierdzenie 9.7.1. *Przyporządkowanie przestrzeni topologicznej X grupy $H^1(X)$ ma następujące własności:*

1. *Dla dowolnego przekształcenia $\phi\colon X \to Y$ przekształcenie $\phi^*\colon H^1(Y) \to H^1(X)$ dane wzorem $\phi^*(f) := f \circ \phi$ jest homomorfizmem grup.*
2. *Jeśli przekształcenia $\phi_0, \phi_1\colon X \to Y$ są homotopijne, to $\phi_0^* = \phi_1^*$*
3. *Dla dowolnych dwóch przestrzeni $X_1 X_2$ włożenia zadają izomorfizm grup*

$$H^1(X_1 \sqcup X_2) \xrightarrow{\simeq} H^1(X_1) \times H^1(X_2).$$

Dowód.
Ad 1. $\phi^*(f \cdot g)(x) := (f \cdot g)(\phi(x)) = f(\phi(x) \cdot g(\phi(x)) = \phi^*(f) \cdot \phi^*(g)$.
Ad 2. To jest szczególny przypadek Wniosku 9.1.1.
Ad 3. Włożenia $\iota_1\colon X_1 \subset X_1 \sqcup X_2$ i $\iota_2\colon X_2 \subset X_1 \sqcup X_2$ zadają homorfizm grup

$$(\iota_1^\#, \iota_2^\#)\colon H^1(X_1 \sqcup X_2) \xrightarrow{\simeq} H^1(X_1) \times H^1(X_2).$$

Z definicji sumy prostej łatwo sprawdzić, że jest on bijekcją. □

Dla dowolnej przestrzeni ściągalnej $H^1(X) = 0$. Zajmiemy się więc obliczeniem grupy $H^1(S^1)$, czyli zbadaniem zbioru klas homotopii $[S^1, \mathbb{C}^*] = [S^1, S^1]$. Rozpoczniemy od zdefiniowania stopnia przekształcenia $S^1 \to \mathbb{C}^*$ (zwanego też indeksem pętli względem punktu 0). Korzystając z Stw.9.5.2 bedziemy utożsamiać odwzorowania $S^1 \to X$ z drogami zamkniętymi, czyli pętlami $[0,1] \to X$ i oznaczać je tą samą literą.

Niech $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ będzie drogą zamkniętą. Ponieważ odcinek jest przestrzenią ściągalną, na mocy Twierdzenia 9.6.1 odwzorowanie α posiada logarytm $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Zdefiniujemy stopień α:

$$\deg(\alpha) := \frac{1}{2\pi i}(\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)).$$

Stwierdzenie 9.7.2. *Przyporządkowanie pętli $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ jej stopnia $\deg(\alpha)$ ma następujące własności:*

1. *Wartość $\deg(\alpha)$ nie zależy od wyboru logarytmu $\tilde{\alpha}$ i jest liczbą całkowitą.*
2. *Jeśli $\alpha_0 \sim \alpha_1\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ są homotopijne, to $\deg(\alpha_0) = \deg(\alpha_1)$.*
3. *Dla dowolnych $\alpha, \beta\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ zachodzi: $\deg(\alpha\beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$.*
4. *Dla dowolnej liczby całkowitej $n \in \mathbb{Z}$ odwzorowanie $\phi_n\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$, $\phi_n(z) := z^n$, ma stopień n.*

Dowód.

Ad 1. Ponieważ odcinek jest przestrzenią spójną, więc na mocy Stw. 9.6.2 logarytm $\tilde{\alpha}$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do składnika $2k\pi i$, a więc $\deg(\alpha)$ nie zależy od wyboru logarytmu. Ponieważ $\alpha(0) = \alpha(1)$ więc $\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = 2d\pi i$, dla pewnej liczby całkowitej $d \in \mathbb{Z}$ skąd wynika, że $\deg(\alpha) = d$ jest liczbą całkowitą.

Ad 2. Skoro $\alpha_0 \sim \alpha_1$ to istnieje homotopia $H\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ taka, że $H(\cdot, 0) = \alpha_0$, $H(\cdot, 1) = \alpha_1$, $H(0,t) = H(1,t)$. Ponieważ kwadrat jest zwartą przestrzenią ściągalną więc na mocy Tw. 9.6.1 przekształcenie H posiada logarytm $\tilde{H}\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$. Rozważmy funkcję $d(t) := \frac{1}{2\pi i}(\tilde{H}(1,t) - \tilde{H}(0,t))$. Funkcja ta jest ciągła i na mocy pkt. 1 przybiera wartości całkowite, a więc jest stała. Wynika stąd, że $\deg(\alpha_0) = d(0) = d(1) = \deg(\alpha_1)$

Ad 3. Jesli $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ i $\tilde{\beta}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ są odpowiednio logarytmami α i β, to $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ jest logarytmem iloczynu $\alpha \cdot \beta$.

Ad 4. Logarytmem funkcji potęgowej $\phi_n(z) := z^n$ traktowanej jako odwzorowanie odcinka $\phi'_n\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$, $\phi'_n(t) = \exp(2n\pi i t)$ jest przekształcenie $\tilde{\phi}'_n(t) = 2n\pi i t$ a więc $\deg(\phi_n) = n$. □

Twierdzenie 9.7.1. *Stopień wyznacza izomorfizm grup* $\deg\colon [S^1, \mathbb{C}^*] \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$.

Dowód. Na mocy Stw. 9.7.2 $\deg\colon [S^1, \mathbb{C}^*] \to \mathbb{Z}$ jest dobrze zdefiniowanym homomorfizmem grup i jest epimorfizmem. Pozostaje zauważyć, że jest monomorfizmem. Niech $\deg(\alpha) = 0$; oznacza to, że dla pewnego logarytmu $\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = 0$, czyli logarytm jest drogą zamkniętą, a więc definiuje przekształcenie $\tilde{\alpha}\colon S^1 \to \mathbb{C}$ takie, że $\alpha = p\tilde{\alpha}$. Ponieważ $\mathbb{C}$ jest ściągalna, więc $\alpha \sim 1$. □

Ostatnie twierdzenie powiada, że dowolne odwzorowanie $\alpha\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ jest homotopijne z jednym z odwzorowań potęgowych ϕ_n i żadne dwa różne takie odwzorowania nie są homotopijne.

Wniosek 9.7.1. $[S^1 \vee \cdots \vee S^1, S^1] \simeq \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$

Sformułujemy kilka ważnych wniosków wypływających ze znajomości homotopijnej klasyfikacji odwzorowań $S^1 \to \mathbb{C}^*$.

Wniosek 9.7.2. *Okrąg* S^1 *nie jest ściągalny i nie jest retraktem dysku* $D^2 := \{z \in \mathbb{C}\colon ||z|| \leqslant 1\}$.

Dowód. Dla $n = 1$ twierdzenie wynika ze spójności odcinka oraz niespójności sfery S^0. Odwzorowanie identycznościowe $id : S^1 \to S^1$ ma stopień 1, zatem nie jest ściągalne. Jeśli istniałaby retrakcja $r\colon D^2 \to S^1$, to oznaczałoby to, że identyczność na S^1 jest ściągalna (p. Stw. 9.5.1). □

Uwaga 9.7.1. Sfera S^n nie jest ściągalna dla każdego $n \geqslant 0$. Zauważmy, że $S^0 = \{-1, 1\}$ nie jest spójna. Dowód dla $n > 1$ opiera się na konstrukcji stopnia dla odwzorowań $S^n \to S^n$.[4]. Poniższe słynne twierdzenie Brouwera[5] o punktach stałych także zachodzi dla dysków dowolnych wymiarów i jest wnioskiem z nieściągalności sfery.

[4] John W. Milnor *Topology from Differentiable Viewpoint* Tłum. polskie PWN 1969

[5] Luitzen Egbertus Jan Brouwer (Overschie, Rotterdam 1881 - 1966 Blaricum, Netherlands) best known for his topological fixed point theorem. He founded the doctrine of mathematical intuitionism, which views mathematics as the formulation of mental constructions that are governed by self-evident laws. [Mac Tutor]

Wniosek 9.7.3 (Twierdzenie Brouwera dla $n \leqslant 2$)**.** *Dowolne odwzorowanie $f\colon D^n \to D^n$, dla $n \leqslant 2$, ma punkt stały.*

Dowód. Jeśli $f\colon D^n \to D^n$ byłoby przekształceniem bez punktów stałych, to istniałaby retrakcja $r\colon D^n \to S^{n-1}$ zdefiniowana następująco: $r(x)$ jest punktem przecięcia półprostej $f(x)+t(x-f(x))$ dla $t \geqslant 1$ ze sferą S^n . Pokazaliśmy, że sfera S^{n-1} nie jest retraktem dysku D^n dla $n \leqslant 2$, więc dla tych wymiarów twierdzenie Brouwera jest w pełni udowodnione. □

Piekną ilustracją jedności matematyki jest to, że kurs topologii kończy się dowodem podstawowego twierdzenia algebry, powiadającego, że ciało liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte.

Wniosek 9.7.4 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Dowolny wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach zespolonych posiada pierwiastek zespolony.*

Dowód. Niech $w(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ będzie wielomianem takim, że $w(z) \neq 0$ dla $z \in \mathbb{C}$, zadaje więc odwzorowanie wielomianowe $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Ponieważ $\mathbb{C}$ jest przestrzenią ściągalną, więc odwzorowanie w obcięte do dowolnego jej podzbioru, w szczególności $S^1 \subset \mathbb{C}$, jest odwzorowaniem ściągalnym. Z drugiej strony fomuła

$$H(z,t) := z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + \cdots + t^{n-1}a_1 z + t^n a_0 = \begin{cases} t^n w(\frac{z}{t}) & \text{dla}\, t \neq 0 \\ z^n & \text{dla}\, t = 0 \end{cases}$$

zadaje homotopię $H\colon S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ między $H(z,0) = z^n := \phi_n(z)$ i $H(z,1) = w(z)$, a więc $\deg(w) = n > 0$, co oznacza, że otrzymaliśmy sprzeczność. □

Uwaga 9.7.2. Zasadnicze twierdzenie algebry oczywiście nie zachodzi dla ciała liczb rzeczywistych, natomiast zachodzi dla wielomianów o współczynnikach w ciele kwaternionów (które nie jest przemienne). Dowód opiera się na nieściągalności sfery $S^4 = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ gdzie $\mathbb{H}$ oznacza ciało kwaternionów.[6]

Wniosek 9.7.5 (Twierdzenie Borsuka[7] – Ulama[8] o antypodach dla $n \leqslant 2$)**.** *Dla dowolnego odwzorowania ciągłego $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$, gdzie $n \leqslant 2$, istnieje punkt $p \in S^n$ taki, że $f(p) = f(-p)$.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje odwzorowanie $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że dla każdego $p \in S^2$, $f(p) \neq f(-p)$. Zdefiniujmy odwzorowanie $g\colon S^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $g(p) := f(p) - f(-p)$. Sferę S^{n-1} można traltować jako podzbiór S^n ("równik") a obcięcie odwzorowania $g|S^{n-1}$ jest ściągalne (bowiem rozszerza się górną półsferę, czyli dysk) oraz spełnia warunek $g(-z) = -g(z)$.

Dla $n = 1$ jest to niemożliwe, bo odwzorowanie $S^0 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest homotopije ze stałym wtedy i tylko wtedy, gdy przyjmuje wartości stałego znaku, co warunek $g(-z) = -g(z)$ wyklucza.

---

[6] Samuel Eilenberg and Ivan Niven. *The "fundamental theorem of algebra" for quaternions.* Bull. Amer. Math. Soc. Volume 50, Number 4 (1944), pp. 246-248.

[7] Karol Borsuk (Warszawa 1905 - 1982 Warszawa) [Mac Tutor]

[8] Stanisław Ulam (Lwów 1909 - 1984 Santa Fe, New Mexico, USA) solved the problem of how to initiate fusion in the hydrogen bomb. He also devised the 'Monte-Carlo method' widely used in solving mathematical problems using statistical sampling.[Mac Tutor]

Niech teraz $n = 2$. Pokażemy, że odwzorowanie $g\colon S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ spełniające warunek $g(-z) = -g(z)$ nie może być ściągalne, bowiem musi mieć nieparzysty stopień. Rozważmy drogę zamkniętą $[0,1] \xrightarrow{p} S^1 \xrightarrow{g} \mathbb{C}^*$, którą będziemy oznaczać g_p i obliczymy jej stopień. Jeśli $g_p(0) = g(1) = z_0 = |z_0|\exp(i\theta_0)$ to

$$g_p(\frac{1}{2}) = g(-1) = -z_0 = |z_0|\exp(i(\theta_0 + (2k+1)\pi))$$

Niech $\tilde{g}_p'\colon [0,\frac{1}{2}] \to \mathbb{C}^*$ będzie logarytmem $g_p|[0,\frac{1}{2}]$. Z powyższego wzoru wynika, że dla pewnego $k \in Z$ zachodzi równość: $\tilde{g}_p'(\frac{1}{2}) = \tilde{g}_p'(0) + (2k+1)\pi i$. Warunek $g(-z) = -g(z)$ oznacza, że odwzorowanie g, a więc logarytm g_p jest wyznaczony przez wartości g na górnym półokręgu. Zdefiniujmy więc logarytm $\tilde{g}_p\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ wzorem:

$$\tilde{g}_p(t) := \begin{cases} \tilde{g}_p'(t) & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \tilde{g}_p'(t-\frac{1}{2}) + (2k+1)\pi i \quad \text{dla} & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Stąd $(2\pi i)\deg(g) = \tilde{g}_p(1) - \tilde{g}_p(0) = \tilde{g}_p'(\frac{1}{2}) + (2k+1)\pi i - \tilde{g}_p'(0) =$
$\tilde{g}_p'(0) + (2k+1)\pi i + (2k+1)\pi i - \tilde{g}_p'(0) = 2(2k+1)\pi i$, a więc $\deg(g) = 2k+1$ jest liczbą nieparzystą, czyli g nie jest ściągalne. □

Uwaga 9.7.3. Podobnie jak twierdzenie Brouwera, twierdzenie Borsuka – Ulama zachodzi dla dowolnrgo wymiaru n i także stanowi konsekwencję klasyfikacji homotopijnej odwzorowań $S^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ przez odpowiednio zdefiniowany stopień.