Rozdział 4

Konstrukcje przestrzeni topologicznych

Mając daną przestrzeń topologiczną lub rodzinę przestrzeni można poprzez pewne standardowe konstrukcje budować nowe przestrzenie. Cztery konstrukcje (zwane także operacjami), które opisujemy w tym rozdziale to: podprzestrzeń, przestrzeń ilorazowa, produkt kartezjański i suma prosta. Nowe przestrzenie powstają przez wykonanie najpierw odpowiedniej konstrukcji na zbiorach, a potem zdefiniowanie w nich "naturalnej" topologii. Analogiczne konstrukcje występują w wielu innych teoriach matematycznych m.in. w algebrze liniowej i w teorii grup. Pierwszy podrozdział poświęcony jest definiowaniu topologii w zbiorze poprzez żądanie, aby były ciągłe przekształcenia należace do danej rodziny przekształceń określonych na tym zbiorze (lub prowadząca do tego zbioru). W następnych podrozdziałach omawiamy kolejno wspomniane wyżej konstrukcje.

4.1 Przeciąganie i popychanie topologii

Przeciąganie topologii

Niech X będzie ustalonym zbiorem a $\mathfrak{f} = \{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ rodziną przekształceń określonych na X o wartościach w przestrzeniach topologicznych $(Y_i, \mathcal{T}_i)$.

Definicja 4.1.1. $\mathcal{T}^*(\mathfrak{f})$ najmniejsza topologia w X, w której ciągłe są wszystkie odwzorowania

$$\{f_i \colon (X, \mathcal{T}^*(\mathfrak{f})) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}.$$

Stwierdzenie 4.1.1. *Topologia $\mathcal{T}^*(\mathfrak{f})$ jest generowana przez rodzinę zbiorów*

$$\{f_i^{-1}(U_i) \,|\, U_i \in \mathcal{T}_i,\, i \in I\}.$$

Bazą topologii $\mathcal{T}^*(\mathfrak{f})$ są zbiory $\{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\}$, gdzie $U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$, $k \in \mathbb{N}$. □

Stwierdzenie 4.1.2. *Odwzorowanie $g : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X, \mathcal{T}^*(\mathfrak{f}))$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i \in I$ złożenie przekształceń $(Z, \mathcal{T}_Z) \xrightarrow{g} (X, \mathcal{T}^*(\mathfrak{f})) \xrightarrow{f_i} (Y_i, \mathcal{T}_i)$ jest ciągłe.* □

Popychanie topologii

Niech teraz Y będzie ustalonym zbiorem a $\mathfrak{g} := \{g_j : X_j \to Y\}_{j\in J}$ rodziną przekształceń określonych na przestrzeniach topologicznych $(X_j, \mathcal{T}_j)$ o wartościach w zbiorze Y.

Definicja 4.1.2. $\mathcal{T}_*(\mathfrak{g})$ największa topologia w Y, w której wszystkie odwzorowania $\{g_j : X_j \to Y\}_{j\in J}$ są ciągłe.

Stwierdzenie 4.1.3. $\mathcal{T}_*(\mathfrak{g}) = \{U \subseteq Y : \forall_{j\in J}\, g_j^{-1}(U) \in \mathcal{T}_j\}$ □

Stwierdzenie 4.1.4. *Odwzorowanie* $(Y, \mathcal{T}_*(\mathfrak{g})) \xrightarrow{f} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $j \in J$ *złożenie* $(X_j, \mathcal{T}_j) \xrightarrow{g_j} (Y, \mathcal{T}_*(\mathfrak{g})) \xrightarrow{f} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *jest ciągłe.* □

4.2 Podprzestrzeń

Rozpatrujemy przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ i jej podzbiór $A \subset X$. Chcemy określić topologię $\mathcal{T}|A$ w tym zbiorze, wyznaczoną przez topologię w całej przestrzeni. Naturalnym żądaniem jest aby odwzorowanie włożenia $\iota\colon A \subset X$, $\iota(a) := a$ było ciągłe, a z drugiej strony topologia ta była jak najbliższa topologii w X. Definiujemy więc topologię $\mathcal{T}|A$ jako przeciagnięcie topologii $\mathcal{T}$ przez włożenie ι:

$$\mathcal{T}|A := \mathcal{T}^*(\iota) = \{\iota^{-1}(U) \,|\, U \in \mathcal{T}\} = \{U \cap A \,|\, U \in \mathcal{T}\}$$

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$, to rodzina $\mathcal{B}|A := \{U \cap A\colon U \in \mathcal{B}\}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}|A$ – podobnie dla bazy w punkcie.

Podobnie jak w przypadku zbiorów otwartych w $\mathcal{T}|A$, zbiory domknięte w topolgii podprzestrzeni to przecięcia zbiorów domkniętych w całej przestrzeni z tą podprzestrzenią: $\mathcal{F}_{\mathcal{T}|A} = \{B \cap A \subset A\colon B \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}\}$.

Stwierdzenie 4.2.1. *Dla dowolnego podzbioru* $B \subset A$ *zachodzi równość* $\mathrm{cl}_{(A,\mathcal{T}|A)}(B) = \mathrm{cl}_{(X,\mathcal{T})}(B) \cap A$. □

Podobna równość *nie zachodzi* dla wnętrza zbioru!

Stwierdzenie 4.2.2.

1. *Odwzorowanie* $(X', \mathcal{T}') \to (A, \mathcal{T}|A)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy złożenie* $(X', \mathcal{T}') \xrightarrow{f} (A, \mathcal{T}|A) \xrightarrow{\iota} (X, \mathcal{T})$ *jest ciągłe.*

2. *Jeśli odwzorowanie* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest ciągłe oraz* $A \subset X$*, to obcięcie* $f|A : (A, \mathcal{T}_X|A) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *też jest ciągłe.* □

Odnotujmy zachowanie poznanych własności topologii przy przechodzeniu do podprzestrzeni (tzw. dziedziczność własności):

Stwierdzenie 4.2.3.

1. *Podprzestrzeń przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa.*

2. *Jeśli przestrzeń topologiczna spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności), to dowolna jej podprzestrzeń też spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności).*

3. *Dowolna podprzestrzeń przestrzeni metryzowalnej jest metryzowalna. Jeśli* (X, d) *jest przestrzenią metryczną oraz* $A \subset X$*, to zachodzi równość topologii* $\mathcal{T}(d)|A = \mathcal{T}(d|A)$*.*

4. *Dowolna podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metryzowalnej jest ośrodkowa.* □

Przykład 4.2.1. Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej nie musi być ośrodkowa (np. oś $y = 0$ na płaszczyźnie Niemyckiego). Wynika stąd także, że topologia płaszczyzny Niemyckiego nie jest metryzowalna.

4.3 Przestrzeń ilorazowa

Niech X będzie zbiorem, $R \subset X \times X$ relacją równoważności w tym zbiorze, a $q : X \to X/R$ odwzorowaniem przypisującym każdemu elementowi x jego klasę abstrakcji $[x]_R := \{y \in X : (x, y) \in R\}$. Zbiór klas abstrakcji jest podzbiorem zbioru potęgowego $\mathcal{P}(X)$. Odwzorowanie $q : X \to X/R \subset \mathcal{P}(X)$ jest oczywiście surjekcją. Odwrotnie, dowolna surjekcja zbiorów $p : X \to Y$ definiuje relację równoważności $R_p := \{(x', x'') \in X \times X \,|\, p(x') = p(x'')\}$ i odwzorowanie p wyznacza bijekcję $\bar{p}\colon X/R_p \xrightarrow{\simeq} Y$. Będziemy więc niżej rozpatrywać surjekcje zbiorów; rzutowanie na zbiór klas abstrakcji będzie szczególnym przypadkiem poniższej konstrukcji, dwoistej w pewnym sensie do poprzedniego przypadku, gdy rozważaliśmy injekcje (włożenia podzbiorów).

Definicja 4.3.1. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną, a $p\colon X \to Y$ surjekcją na zbiór Y. Definiujemy topologię $\mathcal{T}_*(p)$ w zbiorze Y jako największą topologię, w której p jest ciągłe:

$$\mathcal{T}_*(p) = \{V \subset Y \,|\, p^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$$

Stwierdzenie 4.3.1. *Odwzorowanie* $f\colon (Y, \mathcal{T}_*(p)) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy złożenie* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{p} (Y, \mathcal{T}_*(p)) \xrightarrow{f} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *jest ciągłe.* □

Spośród poznanych własności topologii jedynie ośrodkowość zachowuje się przy konstrukcji przestrzeni ilorazowej. Zachodzi nawet nieco silniejsze twierdzenie:

Stwierdzenie 4.3.2. *Jeśli* $p\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest ciągłą surjekcją oraz* $(X, \mathcal{T}_X)$ *jest przestrzenią ośrodkową, to* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *też jest przestrzenią ośrodkową.*

Przykład 4.3.1 (Odcinek z rozdwojonym punktem). Przestrzeń ilorazowa przestrzeni Hausdorffa nie musi mieć własności Hausdorffa. Niech $X := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x_1 \leqslant 1,\, x_2 = 0 \,\text{lub}\, 1\}$ z topologią euklidesową, $Y = [-1, 1] \cup \{0'\}$ będzie *zbiorem*, $p : X \to Y$, $p(x_1, x_2) := x_1$ jeśli $(x_1, x_2) \neq (0, 1)$, $p(0, 1) := 0'$. W przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_*(p))$ punkty $0, 0'$ nie posiadają rozłącznych otoczeń (a wszystkie inne pary różnych punktów mają).

Przykład 4.3.2. Przestrzeń ilorazowa przestrzeni metryzowalnej nie musi być metryzowalna, nawet jeśli jest Hausdorffa. Rozpatrzmy przestrzeń $\mathbb{R}/\sim$ gdzie $t_1 \sim t_2 \iff t_1 = t_2 \,\text{lub}\, t_1, t_2$ są liczbami całkowitymi. Przestrzeń $\mathbb{R}/\sim$ jest przestrzenią Hausdorffa nie ma jednak bazy przeliczalnej w punkcie $[0] \in \mathbb{R}/\sim$, a więc nie spełnia I aksjomatu przeliczalności. Wszystkie inne punkty mają przeliczalną bazę otoczeń, homeomorficznych z otoczeniami euklidesowymi.

Odwzorowania ilorazowe

Mając daną ciągłą surjekcję $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ chcielibysmy czasem wiedzieć, czy topologia $\mathcal{T}_Y$ jest zdefiniowana przez odwzorowanie f, co może ułatwić konstruowanie odwzorowań ciągłych określonych na przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Definicja 4.3.2. Odwzorowanie ciągłe $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywa się *ilorazowe* jeśli jest surjekcją oraz jeśli przeciwobraz $f^{-1}(V)$ podzbioru $V \subset Y$ jest otwarty w $(X, \mathcal{T}_X)$, to $V \in \mathcal{T}_Y$.

Ponieważ ciągłość przekształcenia oznacza, że przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte, więc warunek na to, aby surjekcja $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ była przekształceniem ilorazowym mozna wyrazić następująco: $V \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ lub w terminach zbiorów domkniętych: $B \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_Y} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_X}$.

Definicja 4.3.3. Przekształcenie ciagłe $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywa się *otwarte* (odp. *domknięte*) jeśli obraz dowolnego zbioru otwartego w $(X, \mathcal{T}_X)$ jest otwarty (odp. domknięty) w $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Stwierdzenie 4.3.3. *Jeśli* $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest otwartą lub domkniętą surjekcją, to* f *jest przekształceniem ilorazowym.*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z równości $f(f^{-1}(A)) = A$, która zachodzi dla dowolnego podzbioru $A \subset Y$. □

4.4 Produkt kartezjański

Niech dana będzie rodzina przestrzeni topologicznych $\{(X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s \in S}$. Zaczniemy od przypomnienia definicji produktu (iloczynu) kartezjańskiego zbiorów.

Definicja 4.4.1. *Produktem (lub iloczynem) kartezjańskim* rodziny zbiorów $\{X_s\}_{s\in S}$ nazywamy zbiór:

$$\prod_{s\in S} X_s := \{\phi : S \to \bigcup_{s\in S} X_s \,|\, \forall_{s\in S}\, \phi(s) \in X_s\}$$

wraz z rodziną rzutowań na współrzędne $\mathfrak{p} := \{\prod_{s\in S} X_s \xrightarrow{p_t} X_t\}_{t\in S}$ gdzie $p_t(\{x_s\}_{s\in S}) := x_t$

Formalnie, punkty produktu kartezjańskiego są funkcjami określonymi na zbiorze indeksów S. Funkcję ϕ można zapisać jako rodzinę jej wartości $\{\phi(s)\}_{s\in S}$, tak więc punkty w iloczynie kartezjańskim to indeksowane rodziny $\{x_s\}_{s\in S}$ gdzie $x_s \in X_s$, co nawiązuje do dobrze znanego zapisu elementów iloczynu kartezjańskiego indeksowanego liczbami naturalnymi jako ciągów $(x_1, x_2, ..)$.

Definicja 4.4.2. *Produktem (lub iloczynem) kartezjańskim* rodziny przestrzeni topologicznych nazywamy zbiór $\{X_s\}_{s\in S}$ wyposażony w topologię $\mathcal{T}^*(\mathfrak{p})$ przeciągniętą przez rodzinę projekcji $\mathfrak{p}$

$$\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) := (\prod_{s\in S} X_s, \mathcal{T}^*(\mathfrak{p}))$$

wraz z (ciągłymi) odwzorowaniami $(\prod_{s\in S} X_s, \mathcal{T}^*(\mathfrak{p})) \xrightarrow{p_t} (X, \mathcal{T}_t)$.

Z definicji topologii generowanej przez rodzinę przekształceń wynika natychmiast następujące:

Stwierdzenie 4.4.1.

1) *Topologia iloczynu kartezjańskiego jest generowana przez zbiory postaci*

$$p_t^{-1}(U_t) = \prod_{s\in S} U_s \subset \prod_{s\in S} X_s$$

gdzie $U_s = X_s$ *dla* $s \neq t$ *oraz* $U_t \in \mathcal{T}_t$*.*

2) *Jeśli dla każdego* $s \in S$ *wybrana jest baza* $\mathcal{B}_s$ *topologii* $\mathcal{T}_s$*, to bazę iloczynu kartezjańskiego tworzą zbiory postaci*

$$\langle U_{s_1}, .., U_{s_n}\rangle := p_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \cap \ldots p_{s_n}^{-1}(U_{s_n}) = \prod_{s\in S} U_s \subset \prod_{s\in S} X_s$$

gdzie $U_s = X_s$ *dla* s *poza pewnym skończonym zbiorem indeksów* $\{s_1, .., s_n\}$ *oraz* $U_{s_i} \in \mathcal{B}_{s_i}$*.* □

Wniosek 4.4.1. *Rzutowania* $(\prod_{s\in S} X_s, \mathcal{T}^*(\mathfrak{p})) \xrightarrow{p_t} (X, \mathcal{T}_t)$ *są odwzorowaniami otwartymi tzn. obrazy zbiorów otwartych są otwarte.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że obrazy zbiorów z pewnej bazy topologii $\mathcal{T}^*(\mathfrak{p})$ są otwarte, co wynika ze Stw. 4.4.1 oraz faktu, że $p_t(\prod_{s\in S} U_s) = U_t$. □

Stwierdzenie 4.4.2 (Produkty kartezjańskie odwzorowań)**.**

1) Odwzorowanie $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to \prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy współrzędne odwzorowania* f*, czyli zdefiniowane dla każdego* $t \in S$ *złożenia* $(Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{f} \prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{p_t} (X_t, \mathcal{T}_t)$ *są ciągłe.*

2) Dla rodziny odwzorowań ciągłych $\{(Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{f_s} (X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ *istnieje dokładnie jedno odwzorowanie ciągłe* $(Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{f} \prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ *takie, że dla każdego* $s \in S$ *współrzędna* $p_s \circ f = f_s$.

Dowód. Dowód wynika natychmiast z definicji topologii iloczynu kartezjańskiego i Stw. 4.1.2. □

Wykorzystamy Stw. 4.4.2 aby wykazać iż przestrzenie $(X_s, \mathcal{T}_s)$ są homeomorficzne z podprzestrzeniami produktu kartezjańskiego $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$. Wybierając punkt dowolny punkt $x^0 \in \prod X_s$ dla każdego $t \in S$ definiujemy odwzorowanie zbiorów $\iota_t \colon X_t \to \prod_{s\in S} X_s$:

$$\iota_t(x_t)_s = \begin{cases} x_t \,\text{jeśli}\, s = t \\ x^0_s \,\text{jeśli}\, s \neq t \end{cases}$$

Lemat 4.4.1. *Odwzorowanie* $\iota_t \colon (X_t, \mathcal{T}_t) \to \prod(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest ciągłe i zadaje homeomorfzim* $\iota_t \colon (X_t, \mathcal{T}_t) \xrightarrow{\simeq} (i_t(X_t), \mathcal{T}|i_t(X_t))$*, gdzie* $\mathcal{T}$ *oznacza topologię produktową w* $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$.

Dowód. Żeby sprawdzić, że odwzorowanie jest ciągłe wystarczy sprawdzić, że złożenia z rzutowaniami $\prod(X_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{p_s} (X_s, \mathcal{T}_s)$ są ciągłe. Istotnie z definicji: $p_t \circ \iota_t = id_{X_t}$ natomiast dla $s \neq t$, $p_s \circ \iota_t = x^0_s$ jest odwzorowaniem stałym. Odwzorowaniem odwrotnym do ι_t jest obcięcie rzutowania $p_t \colon \iota(X_t) \to X_t$. □

Podobnie jak poprzednio zbadamy zachowanie poznanych własności topologii ze wzgledu na produkty kartezjańskie.

Stwierdzenie 4.4.3. *Produkt kartezjański* $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ *przestrzeni Hausdorffa spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s \in S$ *przestrzeń* $(X_s, \mathcal{T}_s)$ *spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności) oraz wszystkie zbiory* X_s*, poza przeliczalną liczbą są jednopunktowe.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności) to dowolna podprzestrzeń, a zatem przestrzenie $(X_s, \mathcal{T}_s)$ spełniają I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności). Jeśli zbiór S jest nieprzeliczalny oraz $|X_s| > 2$, to stosując Lemat 2.2.1 stwierdzamy, że z bazy w punkcie (odp. bazy) opisanej w Stw. 4.4.1 nie da się wybrać bazy przeliczalnej.

$\Longleftarrow$ Niech $(X_i, \mathcal{T}_i)$ będzie przeliczalną rodziną przestrzeni spełniajacych II (odp. I) aksjomat przeliczalności. Wybierając bazy przeliczalne $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{T}_i$ w przestrzeniach, wykonując konstrukcję opisaną w Stw. 4.4.1 otrzymujemy przeliczalną bazę produktu kartezjańskiego (odp. bazę w punkcie). □

Stwierdzenie 4.4.4. *Produkt kartezjański* $\prod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ *przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią ośrodkową wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s\in S$ *przestrzeń* $(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest ośrodkowa oraz co najwyżej* $2^{\aleph_0}$ *spośród przestrzeni* $(X_s,\mathcal{T}_s)$ *ma więcej niż jeden punkt.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ jest ośrodkowa to dla każdego $s\in S$ przestrzeń $(X_s,\mathcal{T}_s)$ jest ośrodkowa jako obraz ciągły przestrzeni ośrodkowej (p. Stw. 4.3.2).

Niech teraz $T := \{t\in S\,|\,|X_t|\geqslant 2\}$ i dla każdej przestrzeni X_t niech $U_t, V_t\in\mathcal{T}_t$ będą rozłącznymi niepustymi podzbiorami otwartymi. Wykażemy, że $|T|\leqslant 2^{\aleph_0}$. Niech $G\subset\prod_{s\in S}X_s$ będzie przeliczalnym podzbiorem gęstym; $\forall_{t\in T}\, G^t := G\cap\langle U_t\rangle$. Wykażemy, iż $G^t\neq G^r$ jesli $r\neq t$. Istotnie, dla dowolnych $r,t\in T$ wybierzmy element $d(r,t)\in G\cap\langle U_r,V_t\rangle = D\cap\langle U_r\rangle\cap\langle V_t\rangle$. Z definicji wynika, że $d(r,t)\in G^r$, ale $d(r,t)\notin G^t$. Wynika stąd, że przyporządkowanie $T\ni t\rightsquigarrow G^t\in\mathcal{P}(G)$ jest injekcją, a więc $|T|\leqslant|\mathcal{P}(G)|\leqslant 2^{\aleph_0}$.

$\Longleftarrow$ Załóżmy, że mamy rodzinę przestrzeni ośrodkowych indeksowanych liczbami rzeczywistymi $\{(X_r,\mathcal{T}_r)\}_{r\in\mathbb{R}}$ i niech $\forall_{r\in\mathbb{R}}\,\iota_r\colon(\mathbb{N},\mathcal{T}_\delta)\to(X_r,\mathcal{T}_r)$ będzie przekształceniem przeliczalnej przestrzeni dyskretnej (liczb naturalnych) na przeliczalny podzbiór gęsty w X_r. Obraz produktu kartezjańskiego tych odwzorowań $\prod_{r\in\mathbb{R}}\iota_r\colon\prod_{r\in\mathbb{R}}\mathbb{N}\to\prod_{r\in\mathbb{R}}X_r$ jest podzbiorem gęstym. Wystarczy zatem wskazć przeliczalny podzbiór gęsty w przestrzeni $\prod_{r\in\mathbb{R}}(\mathbb{N},\mathcal{T}_\delta)$. Przypomnijmy, że elementy iloczynu kartezjańskiego to odwzorowania $\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{N}$. Wybierając dowolną rodzinę rozłącznych odcinków domkniętych o końcach wymiernych $[p.,q.] := \{[p_1,q_1],..,[p_k,q_k]\}$ i ciąg liczb naturalnych $n. := \{n_1,...,n_k\}$ definiujemy funkcję:

$$\phi_{([p.,q.],n.)}(r) = \begin{cases} n_i \text{ jeśli } r\in[p_i,q_i] \\ 0 \text{ jeśli } r\notin\bigcup[p_i,q_i] \end{cases}$$

Zbiór funkcji postaci $\phi_{([p.,q.],n.)}$ jest przeliczalny oraz jest gęsty w $\prod_{r\in\mathbb{R}}(\mathbb{N},\mathcal{T}_\delta)$. Wystarczy wykazać, że dowolny zbiór bazowy zawiera taką funkcję. Zbiory bazowe opisane w Stw. 4.4.1 są postaci $U(r_1,..,r_k;n_1,...,n_k) := \{\psi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{N}\,|\,\psi(r_i)=n_i\}$ gdzie $r_i\in\mathbb{R}$ są różnymi liczbami rzeczywistymi oraz $n_i\in\mathbb{N}$. Wybierając odcinki rozłączne o końcach wymiernych $[p_i,q_i]\ni r_i$ otrzymujemy funkcję $\phi_{([p.,q.],n.)}\in U(r_1,..,r_k;n_1,...,n_k)$. $\square$

Stwierdzenie 4.4.5. *Produkt kartezjański* $\prod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią Hausdorffa wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego* $s\in S$ *przestrzeń* $(X_s,\mathcal{T}_s)$ *ma wlasność Hausdorffa.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli dwa punkty $x=\{x_s\}_{s\in S}$, $y=\{y_s\}_{s\in S}$ są różne to istnieje $t\in S$ takie, że $x_t\neq y_t$. Wybierzmy w przestrzeni X_t otoczenia rozłączne $U_{x_t}\ni x_t$ oraz $U_{y_t}\ni y_t$. Zbiory $\langle U_{x_t}\rangle\ni x$ oraz $\langle U_{y_t}\rangle\ni y$ są rozłącznymi otoczeniami x,y (oznaczenia p. 4.4.1).

$\Longleftarrow$ Odwrotnie, jeśli produkt kartezjański jest przestrzenią Hausdorffa, to dowolna podprzestrzeń jest przestrzenią Hausdorffa, a zatem dla każdego $s\in S$ przestrzeń $(X_s,\mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią Hausdorffa. $\square$

Twierdzenie 4.4.1. *Produkt kartezjański niepustych przestrzeni* $\prod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią metryzowalną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s\in S$ *przestrzeń* $(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest metryzowalna i wszystkie one, poza przeliczalną liczbą są jednopunktowe.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli $\prod(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią metryzowalna, to dowolna jej podprzestrzeń, a zatem każda przestrzeń $(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest metryzowalna.

Jeśli nieprzeliczalnie wiele przestrzeni występujących w rodzinie $\{(X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ ma więcej niż jeden punkt, to na mocy Stw. 4.4.3 $\prod\limits_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ nie ma bazy przeliczalnej w żadnym punkcie, a więc nie jest metryzowalna, bowiem dowolna przestrzeń metryzowalna spełnia I aksjomat przeliczalności (p. Przykład 2.2.1).

$\Longleftarrow$ Niech $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ będzie przeliczalną rodziną przestrzeni metrycznych. W zbiorze $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ definiujemy metrykę:

$$d'(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d'(x_i, y_i)$$

gdzie $d'_i(x_i, y_i) := \min(d_i(x_i, y_i), 1)$. Zauważmy, że "obcięcie" metryk d_i jest konieczne, aby zapewnić zbieżność szeregu. W przypadku skończonego produktu $(X_1, d_1) \times \cdots \times (X_k, d_k)$, można metrykę zdefiniować prościej:

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{k} d(x_i, y_i)$$

Trzeba wykazać, że topologia zdefiniowana w $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ przez metrykę d' jest identyczna z topologią produktową. Patrz BCPP Tw. 1.5.2. $\square$

4.5 Suma prosta

Zdefiniujemy konstrukcję sumy prostej rodziny zbiorów , dwoistą w pewnym sensie do konstrukcji iloczynu kartezjańskiego .

Definicja 4.5.1. *Sumą prostą* (zwaną też koproduktem lub sumą rozłączną) rodziny zbiorów $\{X_s\}_{s\in S}$ nazywamy zbiór zbiór $\coprod\limits_{s\in S} X_s := \bigcup\limits_{s\in S} X_s \times \{s\}$ wraz z rodziną przekształceń (włożeń): $\mathfrak{j} := \{X_t \xrightarrow{j_t} \coprod\limits_{s\in S} X_s\}_{t\in S}, \quad j_t(x_t) := (x_t, t)$.

Zauważmy, że dla $s \neq t, (X_s \times \{s\}) \cap (X_t \times \{t\}) = \emptyset$.

Definicja 4.5.2. Sumą prostą (koproduktem) rodziny przestrzeni topologicznych $\{(X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ nazywamy przestrzeń

$$\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) := (\coprod_{s\in S} X_s, \mathcal{T}_*(\mathfrak{j}))$$

gdzie $\mathcal{T}_*(\mathfrak{j}$ jest topologią wprowadzoną przez rodzinę odwzorowań $\mathfrak{j}$, wraz z (ciągłymi) odwzorowaniami $j_t : (X_t, \mathcal{T}_t) \xrightarrow{j_t} \coprod\limits_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_*(\mathfrak{j}))$.

Utożsamiając za pomocą j_s zbiór X_s z $X_s \times \{s\}$ możemy powiedziec, że podzbiór $U \subset \coprod\limits_{s\in S} X_s$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie przecięcia $U \cap X_s \in \mathcal{T}_s$, czyli są otwarte w $(X_s, \mathcal{T}_s)$. Zauważmy, że włożenia $j_t \colon (X_t, \mathcal{T}_t) \to \coprod\limits_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ są zanurzeniami homeomorficznymi.

Stwierdzenie 4.5.1 (Sumy proste odwzorowań).

1) Odwzorowanie $f : \coprod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $t \in S$ *złożenie* $(X_t,\mathcal{T}_t) \xrightarrow{j_t} \coprod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s) \xrightarrow{f} (X_t,\mathcal{T}_t)$ *jest odwzorowaniem ciagłym.*

2) Dla dowolnej rodziny odwzorowań ciągłych $\{(X_s,\mathcal{T}_s) \xrightarrow{f_s} (Y,\mathcal{T}_Y)\}_{s\in S}$ *istnieje dokładnie jedno odwzorowanie ciągłe* $\coprod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{T}_Y)$ *takie, że dla każdego* $s \in S$ *zachodzi równość* $f \circ j_s = f_s$.

Podobnie jak w przypadku iloczynów kartezjańskich zbadamy zachowanie poznanych własności topologii ze wzgledu na sumy proste. Jest to jednak dużo łatwiejsze.

Stwierdzenie 4.5.2.

1. *Suma prosta* $\coprod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s \in S$ *przestrzeń* $(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią Hausdorffa.*
2. *Suma prosta rodziny przestrzeni spełnia I aksjomat przeliczalności wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki spełniają I aksjomat przeliczalności.*
3. *Suma prosta rodziny przestrzeni spełnia II aksjomat przeliczalności wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki spełniają I aksjomat przeliczalności i co najwyzej przeliczalnie wiele jest niepustych.*
4. *Suma prosta rodziny przestrzeni jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki są przestrzeniami ośrodkowymi i co najwyzej przeliczalnie wiele jest niepustych.*
5. *Suma prosta* $\coprod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią metryzowalną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s \in S$ *przestrzeń* $(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest metryzowalna.*

Dowód. Dowody punktów 1-4 jako bardzo łatwych pomijamy.

Ad 5. $\Longrightarrow$ Jeśli $\coprod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią metryzowalną to dowolna jej podprzestrzeń, zatem także $(X_s,\mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią metryzowalną.

$\Longleftarrow$ Jeśli dana jest rodzina przestrzeni metrycznych $\{(X_s,d_s)\}_{s\in S}$ to w zbiorze $\coprod_{s\in S} X_s$ określamy metrykę:

$$d(((x,s),(x',t)) = \begin{cases} d'_s(x,x') & \text{jeśli} \quad s=t \\ 1 \quad \text{jeśli} & s \neq t \end{cases}$$

gdzie $d'_s(x,x') := \min(d_s(x,x'),1)$. W tej metryce kule o środku w punkcie $(x,s) \in \coprod_{s\in S} X_s$ i promieniu < 1 są identyczne jak kule w metryce d_s w zbiorze X_s. Stąd wynika, że metryka d' definiuje topologię $\mathcal{T}_*(\mathrm{j})$. □

Zauważmy, że tak jak w przypadku metryki w produkcie kartezjańskim musielismy "obciąć" metryki d_i (nawet w przypadku sumy dwóch przestrzeni!), tym razem po to, aby spełniona była nierówność trójkąta.