Rozdział 10

Powierzchnie

W tym rozdziale zajmiemy się topologią zamkniętych powierzchni, a więc przestrzeni zwartych, lokalnie homeomorficznych z płaszczyzną $\mathbb{R}^2$. Dokładniej:

Definicja 10.0.2. Powierzchnią (lub rozmaitością 2-wymiarową) nazywamy przestrzeń Hausdorffa posiadającą przeliczalną bazę taka, że każdy jej punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z podzbiorem otwartym płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ (równoważnie z płaszczyzną $\mathbb{R}^2$). Powierzchnią zamkniętą nazywamy powierzchnię, która jest przestrzenią zwartą.

Nasze dalsze rozważania ograniczymy do poznanych przykładów powierzchni zwartych, czyli: sfery, torusa , płaszczyzny rzutowej , butelki Kleina i wykażemy, że żadne dwie z nich nie są homeomorficzne.

10.1 Sfera

Chociaż w tym rozdziale interesujemy się przede wszystkim powierzchniamy, to własności sfer przedyskutujemy dla dowolnego wymiaru. Przypomnijmy, że n-wymiarową sferą nazywamy podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, ||x|| = 1\}$, a n–wymiarowym dyskiem podprzestrzeń $D^n := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon ||\mathbf{v}|| \leqslant 1\}$, czyli domknięcie kuli euklidesowej o środku w 0 i promieniu 1. Zauważmy, że brzeg dysku jest sferą: $\partial D^n = S^{n-1}$.

Stwierdzenie 10.1.1. *Dla $n > 0$ następujące przestrzenie są homeomorficzne są homeomorficzne ze sferą S^n:*

1. *Zbiór $(\mathbb{R}^n)^+ := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ z topologią generowaną przez kule euklidesowe zawarte w $\mathbb{R}^n$ oraz zbiory $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x|| > r\} \cup \{\infty\}$;*

2. *Zbiór $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ z topologią generowaną przez podzbiory otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$ oraz zbiory postaci $\{\infty\} \cup (\mathbb{R}^n \setminus K)$ gdzie $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym;*

3. *Przestrzeń ilorazowa $D^n/\sim$ gdzie $x \sim y \iff x = y \text{ lub } x, y \in S^{n-1}$.*

Sfera jest przestrzenią zwartą, w której każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.

Dowód. Zaczniemy od zauważenia, że sfera jest przestrzenią zwartą, jako ograniczony i domknięty podzbiór $\mathbb{R}^{n+1}$. Także łatwo jest zauważyć, że każdy punkt posiada otocznie homeomorficzne z otwartą kulą $B(0,1) \in \mathbb{R}^n$ pokrywając sferę $2(n+1)$ półsferami. Homeomorfizmy półsfer z $B(0,1)$ są dane przez rzutowania na odpowiednie płaszczyzny. Dalej wykażemy, że sferę można pokryć dwoma zbiorami, z których każdy jest homeomorficzny z $\mathbb{R}^n$, a mianowicie wybrawszy dowolny punkt $p \in S^n$, $S^n = (S^n \setminus \{p\}) \cup (S^n \setminus \{-p\})$.

Zauważmy teraz , że topologie w zbiorze $(\mathbb{R}^n)^+ := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ opisane w pkt. 1 i 2 są identyczne. Oznaczmy je odpowiednio $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$. Ponieważ domknięcia kul euklidesowych są zbiorami zwartymi, więc $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Odwrotnie, dowolny zbiór zwarty jest podzbiorem pewnej kuli domknietej, a więc zachodzi inkluzja $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$, skąd topologie są równe.

Skonstruujemy ciągłą bijekcję $D^n/\sim \to (\mathbb{R}^n)^+$. Dla $n = 1$ wybierzmy homeomorfizm $h_1\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ np. $h_1(t) := \frac{t}{t^2-1}$ i rozszerzmy do odwzorowania $\bar{h}_1\colon D^1 \to (\mathbb{R}^1)^+$ kładąc $h_1(1) = h_1(-1) = \infty$ Odwzorowanie to jest ciagłe i definiuje odwzorowanie przestrzeni ilorazowej $\bar{h}_1\colon D^1/\sim \to (\mathbb{R}^1)^+$ które jest ciagłą bijekcją. Ponieważ $D^1/\sim$ jest przestrzenią zwartą, więc jest homemorfizmem. W przypadku sfery dowolnego wymiaru przeprowadzamy dokładnie takie samo rozumowanie, uciekając do nieskończoności poprostych przechodzących przez 0. Definiujemy homeomorfizm $h_n\colon B(0;1) \to \mathbb{R}^n$ wzorem $h_n(t\mathbf{v}) := h_1(t)\mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{v} \in S^{n-1}$ i $0 \leqslant t < 1$. Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym rozszerzamy to przekształcenie do $h_n\colon D^n \to (\mathbb{R}^n)^+$ kładąc $h_n(\mathbf{v}) = \infty$ dla $\mathbf{v} \in S^{n-1}$. Przekształcenie to definiuje ciagła bijekcję $\bar{h}_n\colon D^n/\sim \to (\mathbb{R}^n)^+$, która jest homeomorfizmem bo $(\mathbb{R}^n)^+$ jest oczywiście przestrzenią Hausdorffa.

Homeomorfizm $S^n \to (\mathbb{R}^n)^+$ można określić wykorzystując *rzut stereograficzny*, czyli homeomorfizm $h\colon S^n \setminus p \to \mathbb{R}^n$. Wybierzmy punkt $p := (0,\ldots,0,1) \in S^n$ i zdefiniujmy:

$$h(x_1,\ldots,x_{n+1}) := \frac{1}{x_{n+1}-1}(x_1,\ldots,x_n).$$

Łatwo się przekonać, że kładąc $h(p) = \infty$ otrzymujemy ciągłą bijekcję $\bar{h}\colon S^n \to (\mathbb{R}^n)^+$, a więc homeomorfizm. $\square$

Uwaga 10.1.1. Zauważmy, że model sfery opisany w punkcie 2) nie wymaga wyboru metryki w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a jest wyznaczony jedynie przez topologię tej przestrzeni!

Wniosek 10.1.1. *Dla dowolnego punktu $p \in S^n$ przekłuta sfera $S^n \setminus \{p\}$ jest homeomorficzna z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^n$.*

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych dwóch punktów $p_1, p_2 \in S^n$ sfery w tych punktach przekłute są homeomorficzne, bowiem istnieje homeomorfizm sfery $h\colon S^n \to S^n$ taki, że $h(p_1) = p_2$. Homeomorfizm p jest łatwo skonstruować metodami znanymi z algebry liniowej. Niech $P \in \mathbb{R}^2$ bedzie dwuwymiarową podprzestrzenią zawierającą punkty p_1, p_2. W tej płaszczyźnie można przeprowadzić punkt p_1 na p_2 przy pomocy obrotu, który jest izometrią liniową. Kładąc identyczność na podprzestrzeni prostopadłej $P^\perp$ otrzymujemy izometrię liniową $h\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, która oczywiście zachowuje sferę i przeprowadza p_1 na p_2. Korzystając 10.1.1 pkt. 2 i wyjmując punkt ∞ otrzymujemy tezę. $\square$

Twierdzenie 10.1.1. *Jeśli $n > 1$, to $H^1(S^n) := [S^n, S^1] = 0$.*

Dowód. Skorzystamy z Twierdzenia 9.6.1, pokazując , że dowone odwzorowanie $f\colon S^n \to \mathbb{C}^*$ posiada logarytm. Zauważmy, że rozkłada się na sumę dwóch podzbiorów domkniętych $S^n = S^n_+ \cup S^n_-$, z których każdy jest homeomorficzny z dyskiem D^n a ich przecięcie $S := S^n_+ \cap S^n_-$ jest homeomorficzne ze sferą S^{n-1}, a więc jest spójne. Ponieważ dyski są ściągalne, więc odwzorowanie f posiada na nich logarytmy. Z Wniosku 9.6.1 wynika istnienie logarytmu $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$, a więc odwzorowanie f jest ściągalne. □

10.2 Torus

Torusem nazywamy produkt dwóch okręgów $S^1 \times S^1$ [1]. Zauważmy, że tak zdefiniowany torus jest w naturalny sposób podprzestrzenią w 4-wymiarowej przestrzeni euklidesowej: $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Można go jednak zanurzyć w $\mathbb{R}^3$ oraz przedstawić jako przestrzeń ilorazową kwadratu.

Zauważmy też, że torus jest grupą (mnożenie po współrzędnych) oraz działanie a także branie elementu odwrotnego są odwzorowaniami ciągłymi.

Stwierdzenie 10.2.1. *Następujące przestrzenie są homeomorficzne z torusem:*

a) T' – powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ otrzymaną przez obrót wokół osi x_3 okręgu położonego w płaszczyźnie $x_2 = 0$, który nie przecina osi x_3.

b) T'' – przestrzeń ilorazowa $[-1,1] \times [-1,1]/\sim$ gdzie $(-1,t) \sim (1,t)$, $(s,1) \sim (s,-1)$ a pozostałe klasy abstrakcji są jednopunktowe.

Torus jest przestrzenią zwartą, w której każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.

Dowód. Torus jest zwarty jako produkt kartezjański dwóch przestrzeni zwartych. Dla dowolnego punktu torusa (z_1, z_2) zbiór $(S^1 \setminus \{z_1\}) \times (S^1 \setminus \{z_2\})$ jest zbiorem otwartym, homeomorficznym z $\mathbb{R}^2$ i zbiory tej postaci oczywiście pokrywają torus.

Homeomorfizm $[-1,1]\times[-1,1]/\sim \to S^1 \times S^1$ jest zadany przez odwzorowanie $p(s,t) := (\exp \pi t, \exp \pi s)$. Zanurzenie torusa w przestrzeń $\mathbb{R}^3$ jest opisane w skrypcie z Analizy Matematycznej[2] . □

Stwierdzenie 10.2.2. *Dla dowolnych dwóch punktów torusa (z_1, z_2) i (w_1, w_2) istnieje homeomorfizm $h\colon T \to T$ taki, że $h(z_1, z_2) = (w_1, w_2)$.*

Dowód. Definiujemy $h(u_1, u_2) := (u_1, u_2)(z_1, z_2)^{-1}(w_1, w_2) = (u_1 z_1^{-1} w_1, u_2 z_2^{-1} w_2)$. □

Stwierdzenie 10.2.3. *Niech $p \in T$ będzie dowolnym punktem. Przekłuty torus $T \setminus \{p\}$ jest homotopijnie równoważny z bukietem okręgów $S^1 \vee S^1$, a więc*

$$H^1(T \setminus \{p\}) = [S^1 \vee S^1, S^1] \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

[1] Wizualizacja p. Neil Strickland web page
[2] Michał Krych *'AM 2, Funkcje wielu zmiennych - ciągłość'*

Dowód. Wybierzmy model torusa jako przestrzeni ilorazowej kwadratu i punkt $p := (0,0) \in [-1,1] \times [-1,1] =: J^2$. Odwzorowanie $[-1,1] \times [-1,1] \setminus \{p\} \to T$ pozostaje ilorazowe. Oczywista retrakcja przekłutego kwadratu na jego (euklidesowy) brzeg $r\colon J^2 \setminus \{p\} \to \partial J^2$ wyznacza odwzorowanie retrakcję $\bar{r}\colon (J^2 \setminus \{p\})/\sim \to (\partial J^2)/\sim$. Odwzorowanie $\bar{r}\colon (J^2 \setminus \{p\})/\sim \to (\partial J^2)/\sim \subset (J^2 \setminus \{p\})/\sim$ jest homotopijne z identycznością; homotopia jest wyznaczona przez afiniczną homotopię $r\colon J^2 \setminus \{p\} \to \partial J^2 \subset J^2 \setminus \{p\}$ z identycznością. Z definicji bukietu wnika, że $(\partial J^2)/\sim \subset J^2/\sim$ jest bukietem okręgów. □

Uwaga 10.2.1. Teza Stw. 10.2.2 pozostaje prawdziwa jeśli zamiast punktu wyjmiemy z torusa mały dysk lub kwadrat wokół niego np. $\bar{B}(0;\epsilon)$ lub $[-\epsilon,\epsilon] \times [-\epsilon,\epsilon]$ gdzie $0 < \epsilon < 1$.

Twierdzenie 10.2.1. *Włożenie $j\colon S^1 \vee S^1 \subset S^1 \times S^1$ definiuje izomorfizm*

$$j^*\colon [S^1 \times S^1, S^1] \xrightarrow{\simeq} [S^1 \vee S^1, S^1] \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Dowód. Homomorfizm j^* jest epimorfizmem. Jeśli $f\colon S^1 \vee S^1 \to S^1$ jest pewnym odwzorowaniem, to definiujemy jego rozszerzenie na cały torus wzorem: $\bar{f}(z_1,z_2) := f(z_1,1)f(1,z_2)$. Wykażemy, że j^* jest monomorfizmem. Załóżmy więc, że obcięcie przekształcenia $g\colon S^1 \times S^1 \to S^1$ do bukietu $S^1 \vee S^1$ jest homotopijne z przekształceniem stałym. Podobnie jak w dowodzie Tw. 10.1.1, stosując Tw. 9.6.1, dla takiego g skonstruujemy jego logarytm $\tilde{g}\colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{C}$. Niech $p = (-1,-1) \in T$ i rozłóżmy torus na sumę dwóch podzbiorów otwartych $T = U_1 \cup U_2$ gdzie $U_1 := (T \setminus \{p\})$ a $U_2 := ((S^1 \setminus \{1\}) \times (S^1 \setminus \{1\}))$. Zbiór U_2 jest oczywiście homeomorficzny z otwartym kwadratem $(-1,1) \times (-1,1)$, a więc jest ściągalny. Na mocy Stw. 10.2.2 włożenie $S^1 \vee S^1 \subset T \setminus \{p\}$ jest homotopijną równoważnością. Stąd wynika, że dla $i = 1,2$ obcięcie $g|U_i$ posiada logarytm. Ponieważ przecięcie $U_1 \cap U_2$ jest spójne (homeomorficzne z przekłutym kwadratem), a więc na mocy Wniosku 9.6.1, g posiada logarytm, czyli na mocy Tw. 9.6.1 jest odwzorowaniem ściągalnym. □

Wniosek 10.2.1. *Torus nie jest homeomorficzny ze sferą.*

Dowód. Jeśli $h\colon T \to S^2$ byłoby homeomorfizmem (a nawet tylko homotopijną równoważnością), to $h^*\colon 0 = H^1(S^2) \to H^1(T) \neq 0$ byłoby bijekcją, co jest niemozliwe. □

10.3 Płaszczyzna rzutowa i wstęga Möbiusa

Bardzo ważną i interesującą powierzchnią jest płaszczyzna rzutowa. Jak pokazaliśmy sferę można sobie wyobrażać jako płaszczyznę z dodanym jednym punktem w nieskończoności. Płaszczyzna rzutowa to płaszczyzna do której dodano po jednym punkcie w nieskończoności dla każdej prostej przechodzącej przez 0, lub równoważnie dla każdej klasy prostych równoległych (jedna przechodzi przez 0). Ponieważ o dysku $D(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ można mysleć jako o przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (wnętrze dysku) do której dodano po jednym punkcie w nieskończoności dla każdej półprostej, a więc naturalne jest zdefiniowanie płaszczyzny rzutowej jako przestrzeni iloraowej dysku, w której antypodyczne punkty na jego brzegu są utożsamione:

$$P := D(0,1)/\sim \quad \text{gdzie} \quad p_1 \sim p_2 \iff p_1 = p_2 \quad \text{lub} \quad p_1, p_2 \in S^1 \quad \text{oraz} \quad p_1 = -p_2$$

Definicja ta i intuiucja bez trudu uogólnia się na wyższe wymiary.

Stwierdzenie 10.3.1. *Następujące przestrzenie są homeomorficzne z płaszczyzną rzutową P:*

1) *Przestrzeń ilorazowa* $P' := [-1,1]\times[-1,1]/\sim$ *gdzie* $(t_1,t_2)\sim(s_1,s_2) \iff (t_1,t_2) = (s_1,s_2)$ *lub* $(t_1,t_2) = -(s_1,s_2)$ *gdzie* $t_1 \in \{-1,1\}$ *lub* $t_2 \in \{-1,1\}$

2) *Przestrzeń ilorazowa* $P'' := S^2/\sim$ *gdzie* $p_1 \sim p_2 \iff p_1 = p_2$ *lub* $p_1 = -p_2$.

3) *Przestrzeń ilorazowa* $P''' := (\mathbb{R}^3\setminus\{0\})/\sim$ *gdzie* $p_1\sim p_2 \iff p_1 = p_2$ *lub* $p_1 = \lambda p_2$ *dla pewnej liczby* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Płaszczyzna rzutowa jest zwarta, a każdy jej punkt posiada otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$*.*

Dowód. Żeby sprawdzić zwartość płaszczyzny rzutowej wystarczy wykazać, że jest przestrzenią Hausdorffa, co jest łatwo sprawdzić bezpośrednio z definicji P, P', P'', P'''. To, ze każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$ najłatwiej jest zauważyć w modelu P'': odwzorowanie ilorazowe $q\colon S^2 \to P''$ odwzorowuje homeomorficznie otwarte półsfery na podzbiory otwarte płaszczyzny rzutowej.

Kanoniczny homeomorfizm dysku i kwadratu (”po promieniach”) zachowuje antypodyczność punktów, a więc definiuje homeomorfizm $P \to P'$. Z kolei włożenie $S^2 \subset \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ definiuje ciągłą bijekcję $P'' \to P'''$, a ponieważ P'' jest przestrzenią zwartą, jest więc ona homeomorfizmem. Pozostaje wskazać homeomorfizm $P'' \to P$. Niech $p\colon S^2 \to D^2$ będzie projekcją na pierwsze dwie współrzędne: $p(x_0,x_1,x_2) := (x_0,x_1)$. Łatwo zauważyć, że zadaje ona bijekcję na klasach równoważności, a więc ciągłą bijekcję $P'' \to P$, która wobec zwartości P'' jest homeomorfizmem. □

Uwaga 10.3.1. Przestrzeń P'' jest przestrzenią orbit działania grupy $\mathbb{Z}_2 = \{-1,1\}$ na sferze S^2, a przestrzeń P''' jest przestrzenią orbit działania grupy multyplikatywnej liczb rzeczywistych $\mathbb{R}^*$ na $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$.

Uwaga 10.3.2. Zanurzenie płaszczyzny rzutowej w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^4$ opisane jest w BCPP (p. BCPP[3] Przykład 5.1.3.)

Wniosek 10.3.1. *Dla dowolnych dwóch punktów* $p_1, p_2 \in P$ *istnieje homeomorfizm* $h\colon P \to P$ *taki, że* $h(p_1) = p_2$*.*

Dowód. Skorzystamy z interpertacji płaszczyzny rzutowej jako przestrzeni ilorazowej sfery S^2 oraz homeomorfizmu sfery skonstruowanego w dowodzie Wniosku 10.1.1. Niech $p_1 = [\mathbf{v}_1]$, $p_2 = [\mathbf{v}_2]$ liniowa izometria $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taka, że $h(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ zadaje homeomorfizm płaszczyny rzutowej $\bar{h}\colon P'' \to P''$ taki, że $\bar{h}(p_1) = p_2$). □

Stwierdzenie 10.3.2. *Niech* $p_0 \in P$*. Przekłuta płaszczyzna rzutowa* $P\setminus\{p_0\}$ *jest homeomorficzna z otwartą wstęgą Möbiusa. Istnieje rozkład płaszczyzny rzutowej na sumę dwóch podzbiorów domkniętych* $P = M \cup K$ *gdzie* M *jest domkniętą wstęgą Möbiusa,* K *– zbiorem homeomorficznym z dyskiem a* $M \cap K$ *ich wpólnym brzegiem, czyli podzbiorem homeomorficznym z okręgiem.*

[3] BCPP = S. Betley, J. Chaber, E.Pol, R.Pol TOPOLOGIA I, wykłady i zadania, wrzesień 2012

Dowód. Rozpatrzmy odwzorowanie ilorazowe $q\colon S^2 \to P''$ i jego obcięcie do przeciwobrazu przekłutej płaszczyzny rzutowej $q\colon S^2 \setminus \{\mathbf{v}_0, -\mathbf{v}_0\} \to P'' \setminus \{p_0\}$ gdzie $p_0 = [\mathbf{v}_0] = [-\mathbf{v}_0]$. Sfera z wykłutymi punktami antypodycznymi jest homeomorficzna z otwartym walcem $W := S^1 \times (-1, 1)$, przy czym punkty antypodyczne na sferze przechodzą na punkty antypodyczne na walcu, skąd otrzymujemy homeomorfizm $W/\sim \simeq P'' \setminus \{p_0\}$, a jak wiemy (otwarty) walec z utożsamieniem antypodycznych punktów jest homeomorficzny z (otwartą) wstęgą Möbiusa.

Rozkład przestrzeni rzutowej na sumę dwóch podzbiorów domkniętych $P = M \cup D$ gdzie M jest domkniętą wstęgą Möbiusa, D – dyskiem a $M \cap D$ ich wspólnym brzegiem otrzymujemy rozkładając ”duży” dysk $D^2 = \bar{B}(0, \frac{1}{2}) \cup (D^2 \setminus B(0, \frac{1}{2}))$. □

Twierdzenie 10.3.1. $H^1(P) := [P, S^1] = 0.$

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem traktującym o homotopijnych własnościach wstęgi Möbiusa. Domkniętą wstęgę będziemy utożsamiać z przestrzenią ilorazową domkniętego walca $S^1 \times [-1, 1]$ otrzymaną przez utożsamienie punktów antypodycznych: $(z, t) \sim (-z, -t)$.

Twierdzenie 10.3.2. *Rzutowanie wstegi Möbiusa na jej równik $p\colon M \to S^1$ zdefiniowane $p([z, t]) := z^2$ jest homotopijną równoważnością. Jeśli $\iota_1\colon S^1 \to M$, $\iota_1(z) := [z, 1]$ (włożenie okręgu na brzeg wstęgi) to złożenie $S^1 \xrightarrow{\iota_1} M \xrightarrow{p} S^1$ jest odwzorowaniem stopnia 2. Włożenie $\iota_1\colon S^1 \to M$ definiuje monomorfizm $\iota_1^*\colon [M, S^1] \to [S^1, S^1]$, którego obrazem jest podgrupa generowana przez odwzorowanie stopnia 2.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że punkty $M_0 := \{[z, 0] \in M\colon z \in S^1\}$ tworzą równik wstęgi, a odwzorowanie $p|M_0\colon M_0 \to S^1$ jest homeomorfizmem. Oznaczmy odwzorowanie odwrotne $\iota_0\colon S^1 \to M_0 \subset M$. Złożenie $p\iota_0 = id_{S^1}$. Złożenie $\iota_0 \circ p\colon M \to M$ jest homotopijne z $id\colon M \to M$ poprzez homotopię $H([z, t], s) := [z, st]$. Z definicji wynika, że $(p \circ \iota_1)(z) = p([z, 1]) = z^2$ jest więc odwzorowaniem stopnia 2, a więc złożenie $\mathbb{Z} \simeq [S^1, S^1] \xrightarrow{p^*} [M, S^1] \xrightarrow{\iota_1^*} [S^1, S^1] \simeq Z$ przeprowadza $id\colon S^1 \to S^1$ na $\phi_2\colon S^1 \to S^1$, a więc jest monomorfizmem. Ponieważ p jest homotopijną równoważnością, p^* jest izomorfizmem, a stąd wynika, że ι_1^* jest różnowartościowe a jego obraz jest generowany przez odwzorowanie stopnia 2. □

Dowód Tw. 10.3.1. Tak jak w przypadku sfery i torusa skorzystamy z Tw. 9.6.1, konstruujac logarytm dla dowolnego odwzorowania $g\colon P \to \mathbb{C}^*$. Skorzystamy z rozkładu przestrzeni rzutowej skonstruowanego w Stw.10.3.2 $P = M \cup K$ i pokażemy, że g posiada logarytm na obu skladnikach, a stąd wobec spójności przecięcia $M \cap K$, na całej płaszczyźnie rzutowej, a więc g jest ściągalne (p.Wniosek 9.6.1). Ponieważ K jest zbiorem ściągalnym, więc $g|K$ posiada logarytm, skad wynika, że $g|\partial K$ jest odwzorowaniem ściągalnym. Żeby pokazać, że $g|M$ posiada logarytm, wykażemy że jest ściągalne. Ponieważ brzeg dysku $\partial K = \partial M$, a więc g obcięte do brzegu wstęgi Möbiusa jest ściągalne. Z Tw. 10.3.2 wynika, że $g|M$ jest ściągalne. □

Wniosek 10.3.2. *Płaszczyzna rzutowa nie jest homeomorficzna ani ze sferą, ani z torusem.*

Dowód. Nie istnienie homeomorfizmu płaszczyzny rzutowej z torusem jest natychmiastowe, bowiem $H^1(P) = 0$, a $H^1(T) \neq 0$. Jesli istniałby homeomorfizm $h\colon P \to S^2$, to dawałby homeomorfizm przekłutych przestrzeni. To jest jednak niemozliwe, bo przekłuta sfera jest ściagalna, a przekłuta płaszczyzna rzutowa jest homotopijnie równoważna z okręgiem, a więc ściągalna nie jest. □

10.4 Butelka Kleina

Butelkę Kleina[4] zazwyczaj definiuje się jako przestrzeń powstała z następujących utożsamień na bokach kwadratu $J^2 = [-1,1] \times [-1,1]$: $(1,t) \sim (-1,-t)$ oraz $(s,1) \sim (s,-1)$. Podobnie jak sfera, torus i płaszczyzna rzutowa butelka Kleina posiada także inne użyteczne modele.

Uwaga 10.4.1. Zanurzenie butelki Kleina w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^4$ opisane jest w BCPP (p. BCPP Zad. 5.8)

Stwierdzenie 10.4.1. *Nastepujące przestrzenie są homeomorficzne z butelką Kleina.*

1) *B' – przestrzeń ilorazowa walca $S^1 \times [-1,1]$ w którym utożsamiamy punkty $(z,1) \sim (\bar{z},-1)$,*

2) *B'' – przestrzeń ilorazowa torusa $S^1 \times S^1$ w którym utożsamiamy punkty $(z_1,z_2) \sim (\bar{z}_1,-z_2)$, gdzie $\bar{z}$ oznacza sprzężenie zespolone.*

3) *B''' – przestrzeń ilorazowa sumy prostej dwóch domkniętych wstęg Möbiusa $M_1 \sqcup M_2$ w której utożsamiamy punty $([z,1],1) \sim ([z,1],2)$ – czyli dwie wstęgi Möbiusa sklejone wzdłuż brzegów.*

Butelka Kleina jest przestrzenią zwarta, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.

Dowód. W celu sprawdzenia zwartości, wystarczy zauważyć, że butelka Kleina jest przestrzenią Hausdorffa. Odwzorowanie ilorazowe $q\colon T \to B''$ jest homeomorfizmem na górnych i dolnych "ćwiartkach" torusa, które są homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$. Czytelnik, który dobrnął do tego miejsca bez trudu wyobrazi sobie i zapisze powyższe homeomorfizmy ;). □

Uwaga 10.4.2. Podobnie jak poprzednio rozważane powierzchnie, butelka Kleina jest topologicznie jednorodna, a przekłuta butelka Kleina jest homotopijnie równoważna z bukietem dwóch okręgów.

Twierdzenie 10.4.1. *Przekształcenie okręgu na wspólny brzeg wstęg $\iota\colon S^1 \to B'''$, $\iota(z) := [[z,1],1] = [[-z,-1],1] = [[z,1],2] = [[-z,-1],2]$ (dwukrotne nawinięcie) definiuje monomorfizm $\iota^*\colon H^1(B''') \to H^1(S^1)$, którego obrazem jest podgrupa cykliczna generowana przez klasę homotopii odwzorowanie stopnia 2, a więc $H^1(B) \simeq \mathbb{Z}$.*

[4] Felix Christian Klein (Duesseldorf 1849 - Goettingen 1925) is best known for his work in non-euclidean geometry, for his work on the connections between geometry and group theory, and for results in function theory. [Mac Tutor]

Dowód. Oznaczmy $E := \iota(S^1) = M_1 \cap M_2$ i nazwijmy ten zbiór, homeomorficzny z okręgiem, równikiem butelki Kleina. Niech $g\colon B \to S^1$ będzie odwzorowaniem, które po obcięciu do równika jest ściągalne. Z Tw. 10.3.2 wynika, że jest ono ściągalne na obu wstęgach Möbiusa, a więc na obu można określić jego logarytm. Ponieważ przecięcie tych wstęg jest spójne, wieć na mocy Wniosku 9.6.1 istnieje logarytm g określony na całej butelce, a więc g jest ściągalne. □

Wniosek 10.4.1. *Butelka Kleina nie jest homeomorficzna (a nawet homotopijnie równoważna) ze sferą, torusem, ani płaszczyzną rzutową.*

Dowód. Grupy kohomologii wymienionych przestrzeni nie są izomorficzne, a więc nie są one homotopijnie równoważne. □