Rozdział 8

Przestrzenie odwzorowań ciągłych

8.1 Topologia zbieżności punktowej

Przez Map (X, Y) będziemy oznaczać zbiór przekształceń ciągłych $(X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, który można utożsamiać z podzbiorem produktu kartezjańskiego $Y^X = \prod_{x \in X} Y_s$ gdzie $\forall_{x \in X} Y_x = Y$. Zbiór Map (X, Y) można więc rozpatrywać z topologią podprzestrzeni produktu kartezjańskiego. Topologia ta nazywa się topologią zbieżności punktowej, bo jak wiadomo zbieżność ciągu elementów iloczynu kartezjańskiego jest równoważna zbieżności wszystkich ciągów współrzędnych. Topologię tę oznaczamy $\mathcal{T}_p$ i nazywamy *topologią zbieżności punktowej.* Topologia ta jest całkowicie wyznaczona przez topologię w Y, a topologia w X określa jedynie jakie funkcje należą do Map (X, Y).

8.2 Topologia zwarto-otwarta

Definicja 8.2.1 (Topologia zwarto – otwarta)**.** $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ – przestrzenie Hausdorffa. *Topologią zwarto – otwartą*, oznaczaną $\mathcal{T}_{co}$ nazywamy topologię w zbiorze Map (X, Y) generowaną przez rodzinę zbiorów

$$\{\langle A, W\rangle \mid A \subset X \text{ zwarty, } W \subset Y \text{otwarty}\},$$

gdzie $\langle A, W\rangle := \{f \in \text{Map}\,(X, Y) \mid f(A) \subset W\}$.

Z definicji topologii generowanej przez rodzinę podzbiorów wynika, że bazą topologii zwarto – otwartej są skończone przecięcia zbiorów postaci $\langle A, W\rangle$: $\langle A_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle A_n, W_n\rangle$ gdzie $A_i \subset X$ są podzbiorami zwartymi, a $W_i \subset Y$ podzbiorami otwartymi.

Stwierdzenie 8.2.1. *Dla dowolnych przestrzeni Hausdorffa zachodzi inkluzja topologii* $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_{co}$*, a jeśli* $(X, \mathcal{T})$ *jest przestrzenią dyskretną, to* $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{co}$.

Dowód. Podzbiory skończone przestrzeni Hausdorffa są zbiorami zwartymi. □

Wniosek 8.2.1. $(\text{Map}\,(X, Y), \mathcal{T}_{co})$ *jest przestrzenią Hausdorffa.*

Zanim przejdziemy do dokładniejszej analizy topologii zwarto-otwartej odnotujmy teoriomnogościowe własności konstrukcji zbiorów postaci $\langle A, W\rangle$.

Lemat 8.2.1. *Niech X, Y będą dowolnymi zbiorami, a dla ich podzbiorów $A \subset X$, $W \subset W$ $\langle A, W\rangle := \{f \in \operatorname{Map}(X,Y) \mid f(A) \subset W\}$. Dla rodzin podzbiorów zachodzą następujące równości i inkluzje zbiorów:*

$$1)\ \bigcap_{i\in J}(A_i, W) = (\bigcup_{i\in J} A_i, W) \quad 2)\ \bigcap_{i\in J}(A, W_i) = (A, \bigcap_{i\in J} W_i)$$

$$3)\ \bigcap_{i\in J}(A_i, W_i) \subset (\bigcup_{i\in J} A_i, \bigcup_{i\in J} W_i)$$

Dowód. Dowody 1), 2), 3) wynikają natychmiast z definicji. □

Okazuje się, że rodzinę zbiorów potrzebną do generowania topologii zwarto–otwartej można istotnie ograniczyć, korzystając z rodziny generującej topologię w $(Y, \mathcal{T}_Y)$, np. z jej bazy.

Lemat 8.2.2. *Jeśli $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ to rodzina $\{(A, W) \mid A \subset X$ zwarty, $W \in \mathcal{F}\}$ generuje topologię zwarto-otwartą na* $\operatorname{Map}(X,Y)$.

Dowód. Oczywiście rodzina $\mathcal{F}_{\mathrm{Map}} := \{(A, W) \mid A \subset X \text{ zwarty}, W \in \mathcal{F}\}$ jest zawarta w rodzinie generujacej topologię zwarto – otwartą (Def. 8.2.1). Trzeba więc pokazać, że dowolny zbiór postaci $\langle A, W\rangle$ gdzie $A \subset X$ jest zwarty, a $W \subset Y$ jest otwarty jest zawarty w topologii generowanej przez rodzinę $\mathcal{F}_{\mathrm{Map}}$.

Z definicji topologii generowanej wynika, że dowolny zbiór $W \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ jest sumą skończonych przecięć zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$. Zauważmy najpierw, że jeśli $W = W_1 \cap \cdots \cap W_n$ gdzie $W_i \in \mathcal{F}$, to

$$\langle A, W\rangle = \langle A, \bigcap_1^n W_i\rangle = \bigcap_1^n \langle A, W_i\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}}).$$

Pokażemy teraz, że jeśli $W = \bigcup_{s\in S} W_s$ oraz dla każdego zwartego podzbioru $A \subset X$ oraz każdego $s \in S$, $\langle A, W_s\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$ to $\langle A, W\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$. W tym celu trzeba pokazać, że dla dowolnego $f \in \langle A, W\rangle$ istnieje zbiór taki, że $f \in \langle A_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle A_n, W_n\rangle \subset \langle A, W\rangle$ gdzie $A_i \subset X$ są podzbiorami zwartymi oraz $\langle A_i, W_i\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$.

Dla dowolnego punktu $a \in A$ istnieje $s(a) \in S$ taki, że $f(a) \subset W_{s(a)}$, a więc z ciągłości f wynika, ze istnieje otoczenie $a \in \mathrm{cl}_A(V_a) \subset A$ takie, że $f(\mathrm{cl}_A(V_a)) \subset W_{s(a)}$. Zbiory $\{(V_a\}_{a\in A}$ tworzą otwarte pokrycie zbioru zwartego A, można więc wybrać skończone podpokrycie $V_{a_1} \cup \cdots \cup V_{a_n} = A$. Przecięcie zbiorów $\bigcap_{i=1}^n \langle A_{a_i}, W_{a_i}\rangle$ spełnia nasze wymagania:

$$f \in \langle A_{a_1}, W_{a_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle A_{a_n}, W_{a_n}\rangle \subset (\bigcup_{i=1}^n A_{a_i}, \bigcup_{i=1}^n W_{a_i}) \subset \langle A, W\rangle.$$

□

Pożyteczne bywa też ograniczenie klasy zbiorów zwartych używanych do generowania topologii zwarto – otwartej:

Lemat 8.2.3. *Niech* $\mathcal{C} = \{C_s\}_{s\in S}$ *będzie rodziną zwartych zbiorów w* $(X, \mathcal{T}_X)$ *z następującą własnością: dla każdego zbioru zwartego* $A \subset X$ *i otwartego* $U \supset A$ *istnieje skończenie wiele* $C_i \in \mathcal{C}$ *spełniających* $A \subset \bigcup_1^n C_i \subset U$. *Niech* $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Y$ *będzie pewną bazą. Wtedy rodzina*

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) := \{\langle C, W\rangle \mid C \in \mathcal{F}, W \in \mathcal{B}\}$$

generuje topologię zwarto – otwartą w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$.

Dowód. Na mocy Lematu 8.2.2 wiemy, że $\mathcal{T}(\mathcal{F}_{co}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}(All, \mathcal{B}))$ gdzie All oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zwartych, baza generuje topologię. Ponieważ $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{F}(All, \mathcal{B}))$ więc podobnie jak w poprzednim lemacie, wystarczy wykazać że dla każdego elementu zbioru $f \in \langle C, W\rangle$ istnieją zbiory zwarte $C_{s_1}, ..., C_{s_n} \in \mathcal{C}$ oraz otwarte $W_1, \ldots, W_n \in \mathcal{B}$ takie, że $f \in \langle A_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle A_n, W_n\rangle \subset \langle C, W\rangle$. Rozważmy zbiór otwarty $U := f^{-1}(W) \supset C$, z założenia istnieje skończona rodzina zbiorów $C_{s_1}, \ldots, C_{s_n} \in \mathcal{C}$ taka, że $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_{s_i} \subset U$. Przecięcie zbiorów $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle C_{s_i}, W_{a_i}\rangle$ spełnia nasze wymagania:

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle C_{s_i}, W\rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{n} C_{s_i}, W\rangle \subset \langle C, W\rangle.$$

□

Zbadamy przekształcenia ciągłe przestrzeni $\mathrm{Map}\,(X, Y)$ pochodzące od odwzorowań $X \to X'$ i $Y \to Y'$.

Stwierdzenie 8.2.2. $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (X', \mathcal{T}_{X'})$, $g\colon (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Y', \mathcal{T}_{Y'})$ *– odwz. ciągłe. Odwzorowania*

$$f^* : \mathrm{Map}\,(X', Y) \to \mathrm{Map}\,(X, Y),\ f^*(\phi) := \phi \circ f$$

$$g_* : \mathrm{Map}\,(X, Y) \to \mathrm{Map}\,(X, Y')\ g_*(\psi) := g \circ \psi$$

są ciągłe w topologii zwarto-otwartej oraz zachodzą równości $(f_1 \circ f_2)_* = f_2^* \circ f_1^*$, $(g_1 \circ g_2)_* = g_{1*} \circ g_{2*}$, $Id_X^* = Id$, $Id_{Y*} = Id$.

Dowód. Ciągłość wynika łatwo z teorio-mnogościowych własności zbiorów generujących topologię. Żeby sprawdzić, iż f^* jest ciągłe wystarczy zauważyć, że dla zbiorów generujących topologię w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$ zachodzi: $(f^*)^{-1}(\langle C, W\rangle) = \langle f(C), W\rangle$, a więc jest zbiorem otwartym w $\mathrm{Map}\,(X', Y)$. Podobnie $(g_*)^{-1}(\langle C, W'\rangle) = (\langle C, g^{-1}(W')\rangle)$ jest zbiorem otwartym w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$. □

Uwaga 8.2.1. Jeśli $Y = Y' = \mathbb{R}^n$, to odwzorowanie f^* jest liniowe. Jeśli Y, Y' skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe i $g : Y \to Y'$ jest odwzorowaniem liniowym, to g_* też jest liniowe.

8.3 Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a produkt kartezjański

Stwierdzenie 8.3.1. *Rzutowania na współrzędne* $p_i\colon Y_1 \times Y_2 \to Y_i$, $i = 1, 2$ *zadają homeomorfizm:*

$$(p_{1*}, p_{2*})\colon\ \mathrm{Map}\,(X, Y_1 \times Y_2) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}\,(X, Y_1) \times \mathrm{Map}\,(X, Y_2)$$

Dowód. Ciągłość odwzorowania (p_{1*}, p_{2*}) wynika z Stw. 8.2.2 a z definicji produktu kartezjańskiego iż jest bijekcją. Wystarczy więc pokazać iż jest otwarte. Na mocy Lematu 8.2.2 topologia w $\mathrm{Map}\,(X, Y_1 \times Y_2)$ jest generowana przez zbiory postaci $\langle C, p_i^{-1}(W_i)\rangle$ gdzie $i = 1, 2$, $W_i \in \mathcal{T}_{Y_i}$, $C \subset X$ – zwarty. Dla $i = 1$ zachodzi równość zbiorów $(p_{1*}, p_{2*})(\langle C, p_1^{-1}(W_1)\rangle) = \langle C, W_1\rangle \times \mathrm{Map}\,(X, Y_2)$ i podobnie dla $i = 2$, a więc obrazy zbiorów generujących topologię w $\mathrm{Map}\,(X, Y_1 \times Y_2)$ generują topologię w produkcie $\mathrm{Map}\,(X, Y_1) \times \mathrm{Map}\,(X, Y_2)$. □

Stwierdzenie 8.3.2. *Włożenia* $\iota_k \colon X_k \to X_1 \coprod X_2$, $k = 1, 2$ *definiują homeomorfizm*

$$(\iota_1^*, \iota_2^*) \colon\ \mathrm{Map}\,(X_1 \coprod X_2, Y) \to \mathrm{Map}\,(X_1, Y) \times \mathrm{Map}\,(X_2, Y).$$

Dowód. Dowód, że odwzorowanie (ι_1^*, ι_2^*) jest ciągłą bijekcją jest identyczny jak Stw. 8.3.1. Dowód, że rodzina generująca bazę w $\mathrm{Map}\,(X_1 \coprod X_2, Y)$ przechodzi na rodzinę generującą topologię w produkcie wynika natychmiast z Lematu 8.2.3 oraz faktu, że dowolny zwarty podzbiór $C \subset X_1 \coprod X_2$ jest sumą rozłącznych zwartych zbiorów $C = (C \cap X_1) \cup (C \cap X_2)$. □

Interesujace jest, że w terminach przestrzeni funkcyjnych można opisać odwzorowania dwóch zmiennych $f \colon X \times Y \to Z$ jako rodziny odwzorowań jednej zmiennej $f_x \colon Y \to Z$, $f_x(y) := F(x, y)$ parametryzowanie w sposób ciągły przestrzenią X. O przestrzeni Y musimy jednak poczynić dodatkowe założenie:

Definicja 8.3.1. Przestrzeń Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywa się lokalnie zwarta jeśli każdy punkt $y \in Y$ posiada otoczenie $V \ni y$ takie, że jego domknięcie $\mathrm{cl}_Y(V)$ jest zbiorem zwartym.

Uwaga 8.3.1. Przestrzenie zwarte są lokalnie zwarte. Przestrzenie euklidesowe nie są zwarte, lecz są lokalnie zwarte, bowiem domknięcia kul euklidesowych sa zbiorami domknętymi i ograniczonymi, a więc zwartymi.

Twierdzenie 8.3.1. *Jeśli Y jest jest lokalnie zwarta, to przekształcenie*

$$\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z) \xrightarrow{e} \mathrm{Map}\,(X, \mathrm{Map}\,(Y, Z))$$

$$e(h)(x)(y) := \hat{h}(x)(y) := h(x, y)$$

jest bijekcją, a nawet homeomorfizmem przestrzeni odwzorowań z topologią zwarto-otwartą.

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem opisującym topologię w przestrzeni $\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z)$.

Lemat 8.3.1. *Zbiory postaci $\langle A \times B, W\rangle$ gdzie $A \subset X$, $B \subset Y$ są podzbiorami zwartymi, a $W \subset Z$ jest podzbiorem otwartym generują topologię zwarto-otwartą w* $\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z)$.

Dowód. Sprawdzimy, że rodzina zbiorów

$$\{A \times B \subset X \times Y \colon A \subset X,\ B \subset Y \text{ zbiory zwarte}\}$$

spełnia założenia Lematu 8.2.3. Niech $X \times Y \supset U \supset C$ będzie otoczeniem podzbioru zwartego. Dla każdego punktu $c \in C$ istnieją zbiory otwarte $U_c \subset X$, $V_c \subset Y$ takie, że $U_c \times V_c \subset U$, a ze zwartości C można wybrać skończone przykrycie otwarte $U \supset (U_{c_1} \times V_{c_1}) \cup \cdots \cup (U_{c_n} \times V_{c_n}) \supset C$. Ponieważ C jest zbiorem zwartym, w to przykrycie można wpisac pokrycie C zbiorami domknietymi $C_i \subset U_{c_i} \times V_{c_i}$. Zachodzą inkluzje

$$\bigcup_{i=1}^{n} p_1(C_i) \times p_2(C_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{c_i} \times V_{c_i} \subset U$$

a zatem znaleźliśmy przykrycie zbioru C produktami zbiorów zwartych, zawartymi w danym otoczeniu $U \supset C$. □

Dowód Twierdzenia 8.3.1. Dowód składa się z trzech kroków.

Najpierw musimy wykazać, że przekształcenie e jest dobrze zdefiniowane tzn. dla odwzorowania ciągłego $f : X \times Y \to Z$ przyporządkowane mu odwzorowanie $\hat{h}(x)(y) := h(x,y)$ jest odwzorowaniem ciągłym $X \to \mathrm{Map}\,(Y,Z)$. Zauważmy najpierw, że $\forall_{x \in X} \hat{h}(x) \in \mathrm{Map}\,(Y,Z)$, jest to bowiem obcięcie h do poziomicy $\{x\} \times Y$. Teraz sprawdzimy ciagłość $\hat{h}\colon X \to \mathrm{Map}\,(Y,Z)$. Załóżmy, że $\hat{h}(x) \in \langle C, W\rangle$ co oznacza, że $h(\{x\} \times C) \subset W$. Z ciągłości h wynika, że istnieje biór otwarty $G \supset \{x\} \times C$ taki, ze $h(G) \subset W$, a ze zwartości C wynika (p.Lemat o tubie), ze istnieje otoczenie $U \ni x$ takie, że $U \times C \subset G$, a więc $\hat{h}(U) \subset \langle C, W\rangle$. Zauważmy, że dla poprawnego zedfiniowania przekształcenia e założenie lokalnej zwartości Y nie jest potrzebne.

Przyporządkowanie $h \rightsquigarrow \hat{h}$ jest oczywiście róznowartościowe. Pokażemy, że jest bijekcją tzn. jeśli odwzorowanie $\hat{h}\colon X \to \mathrm{Map}\,(Y,Z)$ jest ciągłe, to odpowiadające mu odwzorowanie $h(x,y) := \hat{h}(x)(y)$ jest ciągłe. Niech $h(x_0, y_0) \in W$ tzn. $\hat{h}(x_0) \in \langle\{y_0\}, W\rangle$, a z ciągłości $\hat{h}(x_0)$ i lokalnej zwartości Y wynika istnienie otoczenia $V \ni y_0$ takiego, że $\bar{V}$ jest zbiorem zwartym i $\hat{h}(x_0) \in \langle\bar{V}, W\rangle$. Z ciągłości $\hat{h}$ wynika, ze istnieje otoczenie $U \ni x_0$ dla którego $\hat{h}(U) \in \langle\bar{V}, W\rangle$, a więc $h(U \times V) \subset W$ co kończy dowód, że przyporządkowanie $h \rightsquigarrow \hat{h}$ jest bijekcją.

Pozostaje sprawdzić, że jest homoeomorfizmem. W tym celu wystarczy zauważyc, że obraz rodziny zbiorów generujących topologię w $\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z)$, opisany w Lemacie 8.3.1 generuje topologię w $\mathrm{Map}\,(X, \mathrm{Map}\,(Y,Z))$. □

8.4 Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a zbieżność jednostajna

Niech (Y,d) będzie przestrzenią metryczną. Rozważając zbiór przekształceń ciągłych $(X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}(d))$ zauważamy, że metrykę $d_{\sup}$ można zdefiniować sensownie jedynie w podzbiorze składającym się z przekształceń ograniczonych, podczas gdy topologia zwarto – otwarta określona jest w całym zbiorze $\mathrm{Map}\,(X,Y)$. Zajmiemy się obecnie porównaniem topologii $\mathcal{T}(d_{\sup})$ w zbiorze ograniczonych przekształceń ciągłych $\mathrm{Map}_b(X,Y)$ oraz topologii podprzestrzeni pochodzącej z topologii zwarto – otwartej w $\mathrm{Map}\,(X,Y)$.

Stwierdzenie 8.4.1. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ i przestrzeni metrycznej (Y,d) w zbiorze $\mathrm{Map}_b(X,Y)$ zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_{co} \subset \mathcal{T}(d_{\sup})$. Jeśli X jest zwarta, to $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\sup})$.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że dowolny zbiór generujący topologię $\mathcal{T}_{co}$ należy do topologii $\mathcal{T}(d_{\sup})$. Na mocy Lematu 8.2.2 wystarczy sprawdzić to dla zbiorów postaci $\langle C, B_d(y_0, r)\rangle$

gdzie $C \subset X$ jest podzbiorem zwartym, a $B(y_0, r)$ kulą w przestrzeni (Y, d). Niech $f \in \langle C, B(y_0, r)\rangle$ Odwzorowanie $d(y_0, f(-))\colon X \to \mathbb{R}$ jest ciągłe, zatem ze zwartości C wynika, że przyjmuje swoje kresy; kres górny oznaczmy $0 < r_0 < r$, a przez $r_1 := \frac{1}{2}(r - r_0) > 0$. Twierdzimy, że kula $B_{d_{\sup}}(f, r_1) \subset \langle C, B_d(y_0, r)\rangle$.

Niech $g \in B_{d_{\sup}}(f, r_1)$. Dla dowolnego $x \in C$ zachodzą nierówności:

$$d(y_0, g(x)) \leqslant d(y_0, f(x)) + d(f(x), g(x)) \leqslant r_0 + r_1 = r_0 + \frac{1}{2}(r - r_0) < r$$

a więc dla dowolnego elementu $f \in \langle C, B_d(y_0, r)\rangle$ istnieje kula w metryce $d_{\sup}$ o środku w tym punkcie, zawarta w $\langle C, B_d(y_0, r)\rangle$.

Wykażemy teraz równość topologii $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\sup})$, gdy X jest przestrzenią zwartą. W tym celu trzeba pokazać, że dla dowolnej kuli $B_{d_{\sup}}(f, r)$ istnieje zbiór postaci $\langle C_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle C_n, W_n\rangle$ taki, że

$$f \in \langle C_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle C_n, W_n\rangle \subset B_{d_{\sup}}(f, r)$$

Dla każdego $x \in X$ wybierzmy otoczenie $U_x \ni x$ takie, że $f(\bar{U}_x) \subset B_d(f(x), \frac{r}{3}) =: B_x$. Na mocy zwartości X z pokrycia $\{U_x\}_{x\in X}$ można wybrać pokrycie skończone $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} = X$. Pokażemy, że dowolny element $g \in \langle \bar{U}_{x_1}, B_{x_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle \bar{U}_{x_n}, B_{x_n}\rangle$ należy do kuli $B_{d_{\sup}}(f, r)$. Dla dowolnego $x \in X$ wybierzmy $U_i \ni x$. Zachodzą nierówności:

$$d(f(x), g(x)) \leqslant d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), g(x)) \leqslant \frac{r}{3} + \frac{r}{3} < r$$

oraz z definicji $f \in \langle \bar{U}_{x_1}, B_{x_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle \bar{U}_{x_n}, B_{x_n}\rangle \subset B_{d_{\sup}}(f, r)$. □

Topolgia zwarto – otwarta jest nazywana także topologią zbieżności niemal jednostajnej. Żeby wyjaśnić skojarzenie z nazwą znaną z Analizy Matematycznej udowodnimy najpierw ogólny fakt dotyczący obcinania przekształceń do podzbiorów zwartych. Niech $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ będą dowolnymi przestrzeniami Hausdorffa. Dla dowolnego zwartego podzbioru $C \subset X$ inkluzja definiuje ciagłe odwzorowanie $\iota_C^*\colon \operatorname{Map}(X, Y) \to \operatorname{Map}(C, Y)$.

Stwierdzenie 8.4.2. *Niech $\mathcal{C}$ oznacza rodzinę wszystkich zwartych podzbiorów przestrzeni X. Przekątna rodziny odwzorowań $\{\iota_C^*\}_{C\in\mathcal{C}}$*

$$\iota_{\mathcal{C}}^*\colon \operatorname{Map}(X, Y) \to \prod_{C\in\mathcal{C}} \operatorname{Map}(C, Y) \quad \iota_{\mathcal{C}}^*(f) := \{f|_C\}_{C\in\mathcal{C}}$$

jest zanurzeniem homeomorficznym.

Dowód. Odwzorowanie $\iota_{\mathcal{C}}^*$ jest oczywiście różnowartościowe, bo zbiory jednopunktowe są zwarte. Topologia w produkcie $\prod_{C\in\mathcal{C}} \operatorname{Map}(C, Y)$ jest generowana przez zbiory $p_C^{-1}(\langle K, W\rangle)$ gdzie $K \subset C$, $W \in \mathcal{T}_Y$, a więc topologia podprzestrzeni jest generowana przez przecięcia tych zbiorów z obrazem $\iota_{\mathcal{C}}(\operatorname{Map}(X, Y))$. Z definicji zachodzi równość zbiorów

$$\iota_{\mathcal{C}}(\operatorname{Map}(X, Y)) \cap p_C^{-1}(\langle K, W\rangle) = \iota_{\mathcal{C}}(\langle K, W\rangle)$$

a więc topologia podprzestrzeni jest generowana przez obrazy zbiorów generujących topologię w $\operatorname{Map}(X, Y)$. □

Wniosek 8.4.1. *Ciąg odwzorowań $f_n \in \mathrm{Map}\,(X,Y)$ jest zbieżny w topologii zwarto-otwartej do odwzorowania $f \in \mathrm{Map}\,(X,Y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru zwartego $C \subset X$, ciąg $f_n|_C \in \mathrm{Map}\,(C,Y)$ jest zbieżny do $f|_C \in \mathrm{Map}\,(C,Y)$.*

Z ostatniego wniosku wynika, że jeśli (Y,d) jest przestrzenią metryczną to zbieżność w sensie topologii zwarto-otwartej w $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ jest dokładnie znaną z Analizy Matematycznej zbieżnością niemal jednostajną (czyli na zbiorach zwartych).

Na zakończenie podsumujmy związki między trzema topologiami w przestrzeniach odwzorowań: zbieżności punktowej, zwarto-otwartą i zbieżności jednostajnej.

Twierdzenie 8.4.1. *Dla dowolnych przestrzeni Hausdorffa $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ w zbiorze $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_{co}$.*

1) Jeśli $(X,\mathcal{T})$ jest przestrzenia dyskretną, to $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{co}$.

2) Jeśli (Y,d) jest przestrzenią metryczną i $\mathrm{Map}_b(X,Y)$ zbiorem ograniczonych, ciągłych odwzorowań, to zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_{co}|\,\mathrm{Map}_b(X,Y) \subset \mathcal{T}(d_{\sup})$.

3) Jeśli przestrzeń $(X,\mathcal{T}_X)$ jest zwarta, to $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\sup})$.

□

8.5 Twierdzenie Stone'a – Weierstrassa

Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(Y,\mathcal{T}_Y)$ oznaczmy $\mathcal{C}(Y) := \mathrm{Map}\,(Y,\mathbb{R})$ z topologią zwarto – otwartą.

Stwierdzenie 8.5.1. *Dodawanie i mnożenie funkcji definiuje w $\mathcal{C}(Y)$ strukturę pierścienia, przy czym oba działania są ciagłe. Zerem jest funkcja stała równa zero; a jednością funkcja stała równa jeden. Mnożenie przez funkcje stałe i dodawanie określają w $\mathcal{C}(Y)$ strukturę rzeczywistej przestrzeni wektorowej.* □

Definicja 8.5.1. Podzbiór $A \subset \mathcal{C}(Y)$ nazywamy $\mathbb{R}$-podalgebrą jeśli podprzestrzenią liniową oraz jest zamknięty ze względu na iloczyn funkcji.

Stwierdzenie 8.5.2. *Dla dowolnego podzbioru $D \subset \mathcal{C}(Y)$ istnieje minimalna ze względu na inkluzję $\mathbb{R}$-podalgebra $A(D) \supset D$, którą nazywamy $\mathbb{R}$-podalgebrą generowaną przez D.*

Dowód. Przecięcie dowolnej rodziny $\mathbb{R}$-podalgebr jest oczywiście $\mathbb{R}$-podalgebrą. Podalgebrę $A(D)$ definiujemy więc jako przekrój rodziny $\mathbb{R}$-podalgebr zawierających zbiór D. □

Twierdzenie 8.5.1 (M. Stone[1]-K. Weierstrass[2])**.** *Niech $(Y,\mathcal{T}_Y)$ będzie dowolną przestrzenią Hausdorffa. Jeśli $D \subset \mathcal{C}(Y)$ jest podzbiorem zawierającym niezerową funkcję stałą takim, że funkcje z D rozdzielają punkty w Y tzn. dla dowolnych $y_1 \neq y_2$ istnieje funkcja $f \in D$ taka, że $f(y_1) \neq f(y_2)$, to zbiór $A(D)$ jest gęsty w $\mathcal{C}(Y)$.*

[1] Marshall Harvey Stone (New York 1903 - 1989 Madras, India) is best known for the Stone-Weierstrass theorem on uniform approximation of continuous functions by polynomials. [Mac Tutor]

[2] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, Westphalia 1815 - 1897 Berlin) is best known for his construction of the theory of complex functions by means of power series. [Mac Tutor]

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia, przypomnimy jego klasyczne zastosowania.

Przykład 8.5.1 (Klasyczne Twierdzenie Weierstrassa.). Niech $(Y, \mathcal{T}_Y) = ([0,1], \mathcal{T}_e)$ i rozpatrzmy $D := \{1, j\colon j(t) = t\}$. $\mathbb{R}$–podalgebra generowana przez D to po prostu algebra funkcji wielomianowych zmiennej t. Ponieważ topologia zwarto – otwarta w $\mathcal{C}([0,1])$ to topologia wyznaczona przez metrykę $d_{\sup}$, a więc tw. Stone'a – Weierstrassa w tym przypadku powiada, że każda funkcja ciagła jest granicą jednostajną ciagu wielomianów. Zauważmy, że funkcję identycznościową możemy zastapić dowolną funkcją róznowartosciową! Jeśli zamiast odcinka rozpatrzyć całą prosta otrzymujemy wniosek, że każda funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest granicą niemal jednostajnie zbieżnego ciagu wielomianów. (przestrzeń $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ jest metryzowalna!).

Przykład 8.5.2 (Wielomiany trygonometryczne). Zauważmy, że funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie 2π można utożsamiać z funkcjami określonymi na okręgu S^1. Punkty okręgu będziemy parametryzować kątem ϕ między dodatnim kierunkiem osi $y = 0$ oraz półprostą wyznaczoną przez dany wektor. Rozpatrzmy $D := \{\sin n\phi, \cos n\phi\colon n = 0, 1, 2, ..\} \subset \mathcal{C}(S^1)$. Ze wzorów na cosinus i sinus sumy kątów łatwo wynika, że przestrzeń liniowa rozpięta na zbiorze D jest zamknieta ze względu na mnożenie, czyli jest $\mathbb{R}$–podalgebrą. A z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa wynika, że dowolna funkcja okresowa jest granicą jednostajną ciagu funkcji postaci:

$$f_n(\phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \sin n\phi + b_n \cos n\phi)$$

Dowód twierdzenia poprzedzimy ważnym lematem:

Lemat 8.5.1. *Niech $A \subset \mathcal{C}(Y)$ będzie podalgebrą. Jeśli $f \in A$, to $|f| \in \bar{A}$. Dla dowolnych funkcji $f, g \in \bar{A}$ funkcje $\min(f, g)$ i $\max(f, g)$ też należą do $\bar{A}$.*

Dowód. Ponieważ $|f| = \sqrt{f^2}$ kluczowym kluczowym elementem dowodu będzie obserwacja, że funkcja $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := \sqrt{t}$ jest granicą jednostajną ciagu wielomianów $p_n(t)$, co można pokazać bezpośrednio bądź powołać się na klasyczne tw. Weierstrassa zastosowane do funkcji $\phi(t) := \sqrt{t}$.

Niech $f \in A$ oraz $|f| \in \bigcap\limits_1^n \langle C_i, W_i \rangle$. Pokażemy, że to otoczenie zawiera pewną funkcję $g \in A$. Niech $\epsilon := \min\{d_e(|f|(C_i), Y \setminus W_i)\colon i = 1, \ldots, n\} > 0$. Wystarczy znaleźć $g \in A$ taką, że $||f|(c) - g(c)| < \epsilon$ dla $c \in C := \bigcup_1^n C_i$. Ponieważ C jest zwarty, funkcja f jest ograniczona, a więc istnieje $M > 0$ takie, że $|f(c)| \leqslant M$ dla $c \in C$. Stąd wynika, że $|f|$ jest na C granicą jednostajną ciągu wielomianów od funkcji f: $p_n(f^2/B^2) \to \sqrt{f^2/M^2} = |f|/M$.

Teza dla $\min(f, g)$ i $\max(f, g)$ łatwo wynika ze wzorów:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}((f + g) + |f - g|), \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}((f + g) - |f - g|).$$

□

Dowód tw. Stone'a – Weierstrassa. Bedziemy dowodzić, że zbiór $\overline{A(D)}$ jest gęsty, a zatem ponieważ jest domknięty, musi być równy $\mathcal{C}(X)$. W tym celu trzeba sprawdzić, że dowolny zbiór z bazy topologii zwarto–otwartej $\bigcap\limits_1^n \langle A_i, W_i \rangle$ przecina się z $\overline{A(D)}$. Ustalmy zbiór bazowy i funkcję $f \in \bigcap_1^n \langle A_i, W_i \rangle$. Będziemy konstruować funkcję $g \in \overline{A(D)} \cap \bigcap_1^n \langle A_i, W_i \rangle$. Oznaczmy zbiór zwarty $Z := \bigcup_1^n A_i \subset Y$ oraz $\epsilon := \min\{d_e(f(A_i), Y \setminus W_i) \colon i = 1, \dots, n\} > 0$. Dowód składa się z trzech kroków.

Krok 1. Dla dowolnych punktów w $y_1 \neq y_2$ w Z oraz $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ istnieje $f \in A(D)$ taka, że $f(y_1) = a_1,\ f(y_2) = a_2$.

Niech g będzie funkcją rozdzielającą y_1, y_2. Ponieważ funkcje stałe należą do $A(D)$, a więc funkcja

$$f(y) := a + \frac{b-a}{g(y_1) - g(y_2)}[g(y) - g(y_1)]$$

należy do $A(G)$ i przyjmuje żądane wartości w punktachy_1, y_2.

Krok 2. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(X)$ oraz $z_0 \in Z$ istnieje $g \in \overline{A(D)}$ taka, że: $g(z_0) = f(z_0)$ oraz $g(z) < f(z) + \epsilon$ dla $z \in Z$.

Z Kroku 1. dla każdego $z \in Z$ istnieje funkcja $h_z \in A(D)$ taka, że $h_z(z_0) = f(z_0)$ oraz $h_z(z) < f(z) + \frac{\epsilon}{2}$. (Jeśli $z \neq z_0$ można znaleźć funkcję taką, że $h_z(z) = f(z) + \frac{\epsilon}{4}$, w przypadku $z = z_0$, $h_{z_0} = f$.) Z ciągłości h_z i f wynika, że istnieje otoczenie $W(z) \ni z$ takie, że $h_z(y) < f(y) + \epsilon$ dla $y \in V(z)$. Zbiory $\{W(z)\}_{z \in Z}$ tworzą otwarte przykrycie Z, a więc można z niego wybrać przykrycie skończone $W(z_1) \cup \dots \cup W(z_m) \supset Z$. Niech $g := \min\{h_{z_1}, \dots, h_{z_m}\}$ Z Lematu 8.5.1 wynika, że $g \in \overline{A(D)}$. Ponieważ dowolny punkt $z \in Z$ należy do pewnego zbioru $W(z_i)$, więc zachodza nierówności: $g(z) \leqslant h_{z_i}(z) < f(z) + \epsilon$.

Krok 3. Istnieje $g \in \overline{A(D)}$ taka, że: $\sup_{z \in Z} |f(z) - g(z)| < \epsilon$, a zatem $g \in \overline{A(D)} \cap \bigcap_1^n \langle A_i, W_i \rangle$.

Dla dowolnego $z \in Z$ niech g_z bedzie funkcją skonstruowaną w Kroku 2. Istnieje otoczenie $V(z) \ni z$ takie, że dla $y \in V(z)$ zachodzi nierówność: $g_z(y) > f(y) - \epsilon$. Zbiory $\{V(z)\}_{z \in Z}$ przykrywają Z a więc można spośród nich wybrać przykrycie skończone $V(z_1), \dots, V(z_k)$ i zdefiniować $g := \max\{g_{z_1}, \dots, g_{z_k}\}$. Podobnie jak w Kroku 2. $g \in \overline{A(D)}$ oraz $f(z) - \epsilon < g_{z_i}(z) \leqslant g(z) < f(z) + \epsilon$, czyli $\sup_{z \in Z} |f(z) - g(z)| < \epsilon$ co należało dowieść. $\square$

8.6 Funkcje na przestrzeniach metryzowalnych

Dla przestrzeni metryzowalnych (i ogólniej *normalnych*) zachodzi ważne twierdzenie o rozszerzaniu funkcji ciągłych ze zbiorów domknietych, pokzaujace że na takich przestrzeniach jest "duzo" funkcji ciagłych o wartościach rzeczywistych.

Twierdzenie 8.6.1 (Tietze[3]). *Jeśli $A \subset X$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T}(d))$ to dowolne przekształcenie ciągłe $f \colon (A, \mathcal{T}(d)|A) \to ([0,1], \mathcal{T}_e)$ rozszerza się na całą przestrzeń tzn. istnieje $\bar{f} \colon (X, \mathcal{T}(d)) \to ([0,1], \mathcal{T}_e)$ takie, że $\bar{f}(a) = f(a)$ dla każdego $a \in A$.*

Dowód twierdzenia Tietze znajduje się w BCPP Podrozdział 1.6.

[3] Heinrich Franz Friedrich Tietze (Schleinz, Austria 1880 - 1964 München) [Mac Tutor]

Wniosek 8.6.1. *W tw. Tietze odcinek* $[0, 1]$ *mozna zastąpić przez kostkę* $[0, 1]^n$. □

Wniosek 8.6.2. *Odwzorowanie obcięcia* $i^* : C_b(X) \to C_b(A)$ *jest epimorfizmem.* □