Rozdział 5

Spójność i łukowa spójność

5.1 Spójność

Definicja 5.1.1 (Spójność)**.** Przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest *spójna* jeśli nie istnieją niepuste zbiory $U, V \in \mathcal{T}$ takie, że $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$.

Podzbiór $A \subset X$ nazywa się *spójny* jeśli podprzestrzeń $(A, \mathcal{T}|A)$ jest spójna.

Przykład 5.1.1. Przestrzeń dyskretna zawierająca więcej niż jeden element jest niespójna. Przestrzeń antydyskretna jest zawsze spójna.

Stwierdzenie 5.1.1. *Przestrzeń jest niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy jest homeomorficzna z sumą prostą dwóch niepustych przestrzeni.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli przestrzeń jest niespójna, to $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ gdzie $U, V \in \mathcal{T}$. Oczywiste odwzorowanie $U \coprod V \to X$ jest homeomorfizmem, bowiem jest ciagłą bijekcją i przeprowadza zbiory otwarte na otwarte.

$\Longleftarrow$ Jeśli $h\colon (X_1 \coprod X_2, \mathcal{T}_*) \to (X, \mathcal{T})$ jest homeomorfizmem, to $X = h(X_1) \cup h(X_2)$ jest rozkładem X na sumę dwóch niepustych rozłącznych podzbiorów otwartych, a więc $(X, \mathcal{T})$ nie jest spójna. □

Stwierdzenie 5.1.2 (Kryteria spójności)**.** *Następujące warunki dla przestrzeni $(X, \mathcal{T})$są równoważne:*

1) $(X, \mathcal{T})$ jest spójna.

2) Jedynymi zbiorami otwartymi i domkniętymi są $\emptyset, X$.

3) Każde odwzorowanie ciągłe $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_\delta)$ jest stałe.

Dowód. (1) $\Longrightarrow$ (2) Jeśli $U \subset X$ jest niepustym otwarto - domkniętym podzbiorem różnym od X, to $X = U \cup (X \setminus U)$ jest rozkładem na sumę rozłącznych, niepustych podzbiorów otwartych, a więc $(X, \mathcal{T})$ nie jest spójna.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Przestrzeń nie jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją niepuste zbiory $U, V \in \mathcal{T}$ takie, że $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ a zatem U, V są zbiorami otwartymi i domkniętymi różnymi od $\emptyset, X$.

(2) $\implies$ (3) Jeśli $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_\delta)$ jest ciągłe, to przeciwobrazy $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ są rozłącznymi zbiorami otwarto – domkniętymi, a zatem jeden z nich musi być zbiorem X a drugi zbiorem pustym. A to oznacza, że f jest stałe.

(2) $\impliedby$ (3) Jeśli $U \subset X$ jest podzbiorem otwarto-domkniętym różnym od $\emptyset, X$ to definujemy funkcję ciagłą $f(x) := \begin{cases} 1 \,\mathrm{dla}\, x \in U \\ 0 \,\mathrm{dla}\, x \notin U \end{cases}$, która nie jest stała. □

Wniosek 5.1.1 (Podzbiory spójne)**.**

1. *Jeśli $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą surjekcją określoną na spójnej przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ to $(Y, \mathcal{T}_Y)$ też jest spójna.*

2. *Jeśli $C \subset X$ jest zbiorem spójnym to dowolny podzbiór A taki, że $C \subset A \subset \mathrm{cl}(C)$ jest też spójny.*

3. *Jeśli $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ jest suma spójnych podzbiorów C_i oraz istnieje zbiór C_{i_0} taki, że dla każdego $i \in I$, $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$, to X jest przestrzenią spójną.*

Dowód.

Ad 1. Jeśli $(Y, \mathcal{T}_Y)$ nie jest spójna, to istnieje rozkład się na sumę niepustych, otwartych rozłącznych podzbiorów $Y = V_1 \cup V_2$. Wtedy $X = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$ jest rozkładem przestrzeni X na sumę niepustych, otwartych rozłącznych podzbiorów, a więc $(X, \mathcal{T})$ nie byłaby spójna.

Ad 2. Niech $f \colon A \to \{0,1\}$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Skoro C jest zbiorem spójnym, to $f|A$ jest stała. Ponieważ $\mathrm{cl}_A(C) = \mathrm{cl}_X(C) \cap A = A$, więc funkcja f jest stała na zbiorze A.

Ad 3. Niech $f \colon X \to \{0,1\}$ będzie funkcją ciągłą. Z założenia $f \colon C_i \to \{0,1\}$ jest stała, wystarczy więc zauważyć, że jej wartość nie zależy od i. Wynika to stąd, że $\forall_{i \in I} C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$ a więc na każdym zbiorze C_i funkcja f_i przybiera tę sama wartość co na C_{i_0}. □

Przy pewnych dodatkowych założeniach zachodzi twierdzenie odwrotne do 5.1.1 pkt.1:

Stwierdzenie 5.1.3. *Niech $p : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie odwzorowaniem ilorazowym*[1] *na przestrzeń spójną $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Jeśli przeciwobraz $f^{-1}(y)$ dowolnego punktu $y \in Y$ jest zbiorem spójnym, to $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią spójną.*

Dowód. Niech $\phi : (X, \mathcal{T}_X) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_\delta)$ będzie odwzorowaniem ciagłym. Dla dowolnego $y \in Y$ obcięcie $\phi \colon f^{-1}(y) \to \{0,1\}$ jest stałe, a więc odwzorowanie $\bar{\phi} \colon Y \to \{0,1\}$, $\bar{\phi}(y) := \phi(x)$ gdzie $p(x) = y$ jest dobrze zdefiniowane. Jest także ciągłe, bo złożenie $p \circ \bar{\phi} = \phi$ jest ciągłe, a p jest ilorazowe. Ponieważ $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest spójna, więc odwzorowanie $\bar{\phi}$ jest stałe, a zatem ϕ jest stałe, co dowodzi spójności $(X, \mathcal{T}_X)$. □

Stwierdzenie 5.1.4. *Niech dane będzie pokrycie przestrzeni spójnej $(X, \mathcal{T})$ zbiorami otwartymi $\mathcal{U} := \{U_t\}_{t \in T}$ Każde dwa punkty $a, b \in X$ dają się połączyć skończonym łańcuchem złożonym ze zbiorów z rodziny $\mathcal{U}$, tzn. istnieją wskaźniki $t_0, \ldots, t_n \in T$ takie, że $a \in U_{t_0}$, $b \in U_{t_n}$ oraz $U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}} \neq \emptyset$ dla $i = 0, \ldots n-1$.*

[1] Odwzorowanie nazywa się ilorazowe jeśli jest surjekcją oraz $\mathcal{T}_Y = p_* \mathcal{T}_X$

Dowód. Jesli dla punktów a i b spełniona jest teza twierdzenia, to będziemy mówili w skrócie, że dają się połączyć łańcuchem w pokryciu $\mathcal{U}$. Ustalmy punkt $a \in X$ i rozpatrzmy zbiór

$$C(a) := \{x \in X \mid \exists \text{ łańcuch w pokryciu } \mathcal{U} \text{ łączący } a \text{ z } x\}.$$

Zauważmy, że ten zbiór jest otwarty: jeśli $x \in C(a)$ i $x \in U_t$, to $U_t \subset C(a)$. Jest takze domknięty, bo jego dopełnienie jest zbiorem otwartym: jeśli $x \notin C(a)$ oraz $x \in U_t$ to $U_t \subset X \setminus C(a)$. Ponieważ $a \in C(a)$ więc ze spójności przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ wnioskujemy, ze $C(a) = X$. □

Wniosek 5.1.2. *Jeśli (X; d) jest przestrzenią metryczną spójną, to dla dowolnych* $a, b \in X$ *i dla każdego* $\epsilon > 0$ *istnieją punkty* $x_1, \dots, x_n \in X$ *takie, że* $x_1 = a$, $x_n = b$ *oraz* $d(x_i; x_{i+1}) < \epsilon$ *dla* $i = 1, \dots, n-1$.

Dowód. Wystarczy zastosować Stw. 5.1.4 do pokrycia przestrzeni X kulami o promieniu $\epsilon/2$ i z kul wystepujących w łańcuchu wybrać po jednym punkcie. □

Spójne podzbiory prostej euklidesowej

Definicja 5.1.2. Podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywa się przedziałem jeśli stąd, że $a \leqslant c \leqslant b$ i $a, b \in A$ wynika $c \in A$, czyli dowolna liczba leżąca między dwoma liczbami należącymi do A też należy do A.

Twierdzenie 5.1.1 (Klasyfikacja spójnych podzbiorów prostej)**.**

1) *Dowolny przedział na prostej euklidesowej jest homeomorficzny z jednym ze standardowych przedziałów: zbiorem jednopunktowym* $\{0\}$ *lub odcinkiem* $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$, *przy czym żadne dwa z nich nie są homeomorficzne.*

2) *Podzbiór prostej euklidesowej* $(A, \mathcal{T}_e|A) \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ *jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przedziałem.*

Dowód. Dowolny niepusty przedział jest zbiorem jednopunktowym lub zbiorem postaci (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ gdzie $a < b$, a otwarty koniec odcinka może być $\pm\infty$ i ławto znaleźć wśród funkcji znanych z Analizy Matematycznej I homeomorfizmy z odpowiednimi przedziałami standardowymi. Dowód, że żadne dwa rózne przedziały standardowe nie są homeomorficzne wykażemy po udowodnieniu punktu 2).

Wykażemy, że przedziały standardowe są spójne. Ponieważ każdy przedział jest suma wstępujacej rodziny odcinków domkniętych, wystarczy wykazać spójność odcinka $[0,1]$. Niech $f\colon [0,1] \to \{0,1\}$ jest funkcją ciągłą i załóżmy, że $f(0) = 0$. Jeśli funkcja nie jest stała, zdefiniujmy
$t_1 := \inf\{t \in [0,1] \mid f(t) = 1\} > 0$. W punkcie t_1 funkcja nie byłaby ciągła, bowiem $f(t_1) = 1$, natomiast $f(t) = 0$ dla $t < t_1$.

Jeśli podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ nie jest przedziałem, to istnieje liczba $r \notin A$ taka, że $\{a \in A \mid a < r\} \cup \{a \in A \mid a > r\} = A$ jest rozkładem zbioru A na sumę dwóch niepustych, rozłącznych podzbiorów otwartych.

Pokażemy teraz, że odcinki $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$, nie są parami homeomorficzne. Załóżmy, że istniałby homeomorfizm $h\colon [0,1) \to (0,1)$. Wtedy po usunieciu początku odcinka $[0,1)$

mielibysmy homeomorfizm $h\colon (0,1) \to (0,1) \setminus h(0)$. Jest to jednak niemożliwe, bo odcinek $(0,1)$ jest spójny, a po usunęciu dowolnego punktu staje się niespójny. Podobnie rozumujemy w przypadku pozostałych par odcinków, korzystając z tego, że końce odcinka mogą być scharakteryzowane jako jedyne punkty, których usunięcie nie narusza spójności. $\square$

Wniosek 5.1.3 (Uogólniona własność Darboux)**.** *Jeśli $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ jest odzworowaniem ciągłym i $(X, \mathcal{T})$ jest spójna, to $f(X) \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem.* $\square$

Spójność a operacje na przestrzeniach

Zauważmy jak zachowuje się spójność przy poznanych operacjach na przestrzeniach topologicznych. Następujące własności są oczywiste:

1) Podprzestrzeń przestrzeni spójnej może nie być spójna.

2) Przestrzeń ilorazowa przestrzeni spójnej jest spójna na mocy Stw. 5.1.1 pkt. 1.

3) Suma prosta niepustych przestrzeni topologicznych nie jest spójna.

Trudniejsze do wykazania jest następujące:

Twierdzenie 5.1.2. *Iloczyn kartezjański rodziny przestrzeni topologicznych jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie przestrzenie są spójne.*

Dowód.

$\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenia spójną, to wszystkie czynniki $(X_s, \mathcal{T}_s)$ też są przestrzeniami spójnymi ponieważ rzutowania na czynniki $p_t\colon \prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \to (X_t, \mathcal{T}_t)$ są ciagłymi surjekcjami.

$\Longleftarrow$ Zaczniemy od wykazania tezy dla skończonych rodzin przestrzeni. Dzięki indukcji wystarczy pokazać, że iloczyn dwóch spójnych przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest spójny. W tym celu rozłożymy $X \times Y$ na sumę spójnych podprzestrzeni spełniających założenia Stw. 5.1.1 pkt. 3. Wybierzmy punkt $x_0 \in X$ i przedstawmy $X \times Y = (\{x_0\} \times Y) \cup \bigcup_{y\in Y} X \times \{y\}$ Poziomice są zbiorami spójnymi oraz $\forall_{y\in Y}\, (\{x_0\} \times Y) \cap (X \times \{y\}) = \{(x_0, y)\} \neq \emptyset$. Z Stw. 5.1.1 pkt. 3 wynika, że $X \times Y$ jest przestrzenią spójną.

Niech teraz $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ będzie produktem dowolnej rodziny przestrzeni spójnych. Wybierzmy punkt $x^0 := \{x_s^0\}_{s\in S}$ i rozpatrzmy zbiór

$$D := \{\{x_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s \,|\, x_s = x_s^0 \,\text{poza skończenie wieloma}\, s \in S\}$$

Zbiór D jest sumą podzbiorów homeomorficznych ze skończonymi iloczynami: jeśli $F \subset S$ jest zbiorem skończonym, to podzbiór:

$$D_F := \{\{x_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s \,|\, x_s = x_s^0 \, s \in S \setminus F\}$$

jest homeomorficzny z $\prod_{s\in F}(X_s, \mathcal{T}_s)$ a więc spójny oraz $D = \bigcup_{F\subset S} D_F$. W przecięciu zbiorów D_F leży punkt x^0, więc D jest zbiorem spójnym.

Pozostaje zauważyć, że D jest gęstym podzbiorem $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$. Dowolny zbiór z bazy topologii produktowej $\langle U_{s_1}, \dots U_{s_n}\rangle$ przecina zbiór D_F gdzie $F = \{s_1, \dots s_n\}$:

$$\langle U_{s_1}, \dots U_{s_n}\rangle \cap D_F = \prod_{s\in S} A_s \quad \text{gdzie } A_s = \begin{cases} U_s \text{ dla } s \in F \\ x_s^0 \text{ dla } s \notin F \end{cases}.$$

Dowód kończy przywołanie Stw. 5.1.1 pkt. 2, bowiem $\mathrm{cl}(D) = \prod_{s\in S} X_s$. □

Składowe spójne

Definicja 5.1.3. *Składową spójną* przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ nazywamy maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór spójny w X. *Składową punktu* $x \in X$ nazywamy składową spójną zawierającą punkt x, a więc maksymalny zbiór spójny zawierający punkt x.

Stwierdzenie 5.1.5. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną.*

1. *Jeśli $C_1, C_2 \subset X$ są składowymi spójnymi, to $C_1 = C_2$ lub $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ oraz $X = \bigcup C$.*
2. *Składowe spójne są zbiorami domkniętymi.*

Dowód.
Ad 1. Jeśli $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ to $C_1 \cup C_2$ jest zbiorem spójnym, zawierającym C_1 oraz C_2, a więc $C_1 = C_1 \cup C_2 = C_2$. Każdy punkt $x \in X$ należy do pewnej składowej spójnej, zwanej składową tego punktu i oznaczanej C_x.
Ad 2. Jeśli $C \subset X$ jest składową, to ponieważ $C \subset \mathrm{cl}(C)$ i na mocy Stw. 5.1.1 pkt. 2 domknięcie $\mathrm{cl}(C)$ jest zbiorem spójnym, musi zachodzić równość $C = \mathrm{cl}(C)$. □

Uwaga 5.1.1. Składowe spójne nie muszą być podzbiorami otwartymi. Np. składowymi zbioru $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ są zbiory jednopunktowe, a $\{0\}$ nie jest zbiorem otwartym. Natomiast składowe spójne dowolnego otwartego podzbioru $\mathbb{R}^n$ są otwarte, bowiem punkty w $\mathbb{R}^n$ posiadają dowolnie małe otoczenia spójne.

Stwierdzenie 5.1.6. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest odwzorowaniem ciągłym, a $C \subset X$ jest składową spójną, to zbiór $f(C)$ jest zawarty w pewnej składowej przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Jeśli f jest homeomorfizmem, to dla dowolnej składowej $C \subset X$, $f|C : C \to f(C)$ jest homeomorfizmem na składową $(Y, \mathcal{T}_Y)$.* □

Dowód. Teza wynika bezpośrednio z Stw. 5.1.1, bowiem obraz składowej musi być zbiorami spójnymi, a więc są zawarty w pewnym maksymalnym zbiorze spójnym. □

Zbiór składowych spójnych

Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Rozbicie zbioru X na sumę składowych, które są zbiorami rozłącznymi, wyznacza w X relację równoważności. Zbiór jej klas abstrakcji (czyli zbiór składowych) oznaczmy $\pi_0'(X)$.

Uwaga 5.1.2. W zbiorze $\pi_0'(X)$ można wprowadzić topologię ilorazową z przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ (p. BCPP Zad. 5.9 – 5.11), ale w zastosowaniach do rozstrzygania pytania, czy dwie przestrzenie są homeomorficzne rozpatruje się jedynie zbiór $\pi_0'(X)$, ignorując topologię.

Bardzo ważna własność przypisania przestrzeni X zbioru $\pi_0'(X)$ polega na tym, że przekształceniom ciągłym między przestrzeniami mozna w "naturalny" sposób przypisać odwzorowania zbiorów. Dokładniej:

Stwierdzenie 5.1.7. *Dowolne odwzorowanie ciągłe $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ definiuje odwzorowanie zbiorów:*

$$f_\#\colon \pi_0'(X) \to \pi_0'(Y),\ f_\#(C) := \textit{składowa zawierająca}\, f(C)$$

przy czym $(Id_X)_\# = Id$ oraz jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z.\mathcal{T}_Z)$ to zachodzi równość $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$.

Dowód. Odwzorowanie $f_\#(C) :=$ składowa zawierająca $f(C)$ jest dobrze zdefiniowane, bowiem $f(C)$ jest zbiorem spójnym, a więc istnieje dokładnie jedna składowa przestrzeni X, która go zawiera.

Sprawdzimy, że $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$. Z definicji

$$(g \circ f)_\#(C) = g(\text{składowa zawierająca}\, f(C)),$$

a więc jest maksymalnym zbiorem spójnym $E_1 \supset g(D) \supset g(f(C))$, gdzie $D \supset f(C)$ jest składową przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Z drugiej strony

$$(gf)_\#(C) = \{\text{składowa zawierająca}\, g(f(C))\} := E_2,$$

przy czym $E_1 \cap E_2 \supset g(f(C))$ Suma zbiorów spójnych $E_1 \cup E_2$ jest więc zbiorem spójnym, a z maksymalności E_1 i E_2 wynika, że $E_1 = E_2$. □

Wniosek 5.1.4. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to $\pi_0'(X) \xrightarrow{f_\#} \pi_0'(Y)$ jest bijekcją .*

Dowód. Niech $(Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (X, \mathcal{T}_X)$ będzie odwzorowaniem odwrotnym, czyli $g \circ f = Id_X$ oraz $f \circ g = Id_Y$. Z Stw. 5.1.7 otrzymujemy, że $g_\# \circ f_\# = (g \circ f)_\# = Id_X$ oraz $f_\# \circ g_\# = (f \circ g)_\# = Id_Y$, a więc $f_\#$ i $g_\#$ są bijekcjami. □

Wniosek 5.1.5. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{h} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to dla dowolnego podzbioru $A \subset X$, obcięcie $h\colon X \setminus A \to Y \setminus h(A)$ też jest homeomorfizmem, a więc definiuje bijekcję zbiorów $\pi_0'(X \setminus A) \xrightarrow{h_\#} \pi_0'(Y \setminus h(A))$.* □

Uwaga 5.1.3. Skorzystaliśmy z tego argumentu w szczególnym przypadku w dowodzie Tw. 5.1.1, wykazując że różne przedziały standardowe na prostej nie są homeomorficzne.

5.2 Łukowa spójność

Często łatwiejsze niż bezpośrednie wykazanie spójności jest sprawdzenie silniejszej, lecz bardziej geometrycznej własności przestrzeni, zwanej łukową spójnością.

Definicja 5.2.1. Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest łukowo spójna jeśli dla dowolnych punktów $x_0, x_1 \in X$ istnieje odwzorowanie ciągłe (zwane drogą) $\omega : [0,1] \to X$: $\omega(0) = x_0$, $\omega(1) = x_1$.

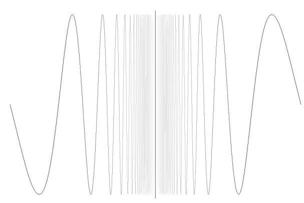
Stwierdzenie 5.2.1. *Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest łukowo spójna to jest spójna.*

Dowód. Wybierzmy punkt $x_0 \in X$ oraz dla każdego innego punktu $x \in X$ drogę $\omega_x : [0,1] \to X$: $\omega_x(0) = x_0$, $\omega_x(1) = x$. Wtedy $X = \bigcup_{x \in X} \omega_x([0,1])$, czyli jest sumą zbiorów spójnych o niepustym przecięciu: $x_0 \in \bigcap_{x \in X} \omega_x([0,1])$, a więc na podstawie Stw. 5.1.1 X jest przestrzenią spójną. □

Przykład 5.2.1. Dowolny wypukły podzbiór $W \subset \mathbb{R}^n$ przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jest łukowo spójny. Dla punktów $p_0, p_1 \in W$ definiujemy drogę je łączącą w zbiorze W, $\omega(t) := (1-t)p_0 + tp_1$. W szczególności kule euklidesowe są łukowo spójne, a więc także spójne.

Przykład 5.2.2. Podzbiór płaszczyzny euklidesowej

$$S = \{\, (x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2\pi},\, x \neq 0\} \cup \{\, (0,y) : |y| \leqslant 1\,\}$$



jest spójny, lecz nie jest łukowo spójny (BCPP 4.2.3). Zauważmy, że $S = \overline{\{\, (x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2\pi},\, x \neq 0\}}$

Stwierdzenie 5.2.2. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Relacja R w zbiorze X:*

$$R := \{(x_0, x_1) \in X \times X \mid \exists_{\omega:[0,1]\to X}\, \omega(0) = x_0,\, \omega(1) = x_1\}.$$

(czyli dwa punkty są w relacji R jeśli istnieje droga je łącząca) jest relacją równoważności.

Dowód. Relacja R jest zwrotna, droga stała $c_x(t) = x$ łączy x z x. R jest także symetryczna: jeśli $\omega : [0,1] \to X$ łączy x_0 z x_1 to droga $\bar{\omega}(t) := \omega(1-t)$ łączy x_1 z x_0. Pozostaje wykazać przechodniość. Niech $\omega_1 : [0,1] \to X$ łączy x_0 z x_1 a $\omega_2 : [0,1] \to X$ łączy x_1 z x_2. Zdefiniujemy drogę ω jako złożenie dróg

$$\omega(t) := (\omega_1 \star \omega_2)(t) = \begin{cases} \omega_1(2t) \text{ dla } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \omega_2(2t-1) \text{ dla } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$

Droga ω łączy x_0 z x_2. □

Przykład 5.2.3. Podzbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy gwiaździstym jeśli istnieje punkt $p_0 \in G$ taki, że dla dowolnego $p \in G$ odcinek $[p_0, p] \subset G$. Dowolny zbiór gwiaździsty jest łukowo spójny. Dowolny punkt $x \in G$ można połączyć z x_0 drogą afiniczną $\omega(t) := (1-t)x + tx_0$.

Wlasność łukowej spójności zachowuje się podobnie jak spójność (por. Stw. 5.1.1), z tym że domknięcie zbiorów łukowo spójnych nie musi być zbiorem łukowo spójnym (np. Przykład 5.2.2 - wykres dla $x > 0$).

Stwierdzenie 5.2.3.

1. *Jeśli $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą surjekcją określoną na łukowo spójnej przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ to $(Y, \mathcal{T}_Y)$ też jest spójna.*

2. *Jeśli $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ gdzie dla każdego $i \in I$ zbiór C_i jest łukowo spójny oraz istnieje $i_0 \in I$ taki, że dla każdego $i \in I$ $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$, to X jest przestrzenią łukowo spójną.*

Dowód.
Ad 1. Aby znaleźć drogę łączącą $y_0, y_1 \in Y$ wybierzmy punkty $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, $x_1 \in f^{-1}(y_1)$. Ponieważ X jest łukowo spójna, istnieje droga $\omega : [0, 1] \to X$ $\omega(0) = x_0$, $\omega(1) = x_1$. Drogę łączącą $y_0, y_1 \in Y$ definiujemy jako złożenie odwzorowań $\eta(t) := f(\omega(t))$.

Ad 2. Każdy punkt $x \in X$ można połączyć drogą z pewnym (zależnym *a priori* od $x \in X$!) punktem $x_0 \in C_0$, a dowolne dwa punkty w C_0 można też połączyć drogą. Stąd wynika, że dowolne dwa punkty w X można połączyć drogą. □

Łukowa spójność a operacje na przestrzeniach

Zauważmy jak zachowuje się łukowa spójność przy poznanych operacjach na przestrzeniach topologicznych. Nastepujące własności są oczywiste:

1) Podprzestrzeń przestrzeni łukowo spójnej może nie być łukowo spójna.

2) Przestrzeń ilorazowa przestrzeni spójnej jest spójna na mocy Stw. 5.2.3 pkt. 1.

3) Suma prosta niepustych przestrzeni topologicznych nie jest łukowo spójna (bo nie jest spójna).

Dla iloczynu kartezjańskiego dowód twierdzenia analogicznego do Twierdzenia 5.1.2 jest znacznie prostszy.

Twierdzenie 5.2.1. *Iloczyn kartezjański rodziny przestrzeni topologicznych jest przestrzenią łukowo spójny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki iloczynu są spójne.*

Dowód.
$\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s \in S} (X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenia łukowo spójną, to wszystkie czynniki $(X_s, \mathcal{T}_s)$ też są przestrzeniami łukowo spójnymi na mocy Stw. 5.2.3 pkt.1, ponieważ rzutowania $p_t \colon \prod_{s \in S} (X_s, \mathcal{T}_s) \to (X_t, \mathcal{T}_t)$ są ciagłymi surjekcjami.
$\Longleftarrow$ Jeśli $x^0 := \{x^0_s\}_{s \in S}$ i $x^1 := \{x^1_s\}_{s \in S}$ są dwoma punktami w iloczynie kartezjańskim, to wybierzmy dla każdego $s \in S$ drogę $\omega_s : [0, 1] \to X_s$ łączącą x^0_s z x^1_s. Droga $\omega \colon [0, 1] \to \prod_{s \in S} X_s$, $\omega(t) := \{\omega_s(t)\}_{s \in S}$ jest ciagła na mocy Stw. 4.4.2 i łączy x^0 z x^1. □

Składowe łukowo spójne

Analogicznie do pojęcia składowej spójnej przestrzeni topologicznej definiujemy składowe łukowo spójne.

Definicja 5.2.2. Składową łukowo spójną przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ nazywamy maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór łukowo spójny w X.

Zauważmy, że składowe łukowo spójne są dokładnie klasami równoważności relacji "istnienia drogi łączącej punkty", zdefiniowanej w Stw. 5.2.2. Wynika stąd natychmiast:

Stwierdzenie 5.2.4. *Jeśli $C_1, C_2 \subset X$ są składowymi łukowo spójnymi przestrzni $(X, \mathcal{T}_X)$, to $C_1 = C_2$ lub $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ a zbiór $X = \bigcup C$ jest sumą składowych łukowych.*

Stwierdzenie 5.2.5. $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$, $C \subset X$ *– składowa łukowo spójna, to $f(C)$ jest zawarty w pewnej składowej łukowo spójnej $(Y, \mathcal{T}_Y)$.*

Dowód. Teza wynika natychmiast z Stw. 5.2.3 pkt.1. □

Zbiór składowych łukowo spójnych

Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór jej składowych łukowych, a więc klas abstrakcji relacji opisanej w Stw. 5.2.2, oznaczamy $\pi_0(X)$.

Uwaga 5.2.1. W zbiorze $\pi_0(X)$ można wprowadzić topologię ilorazową z przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, ale w zastosowaniach do rozstrzygania pytania, czy dwie przestrzenie są homeomorficzne rozpatruje się jedynie zbiór $\pi_0(X)$, ignorując topologię.

Bardzo ważny aspekt przypisania przestrzeni X zbioru $\pi_0(X)$ polega na tym, że przekształceniom ciągłym między przestrzeniami mozna w "naturalny" sposób przypisać odwzorowania zbiorów. Dokładniej:

Stwierdzenie 5.2.6. *Dowolne odwzorowanie ciągłe $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ definiuje odwzorowanie zbiorów:*

$$f_\#\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y),\ f_\#(C) := \textit{składowa łukowa zawierająca}\, f(C)$$

przy czym $(Id_X)_\# = Id$ oraz dla dwóch odwzorowań $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z.\mathcal{T}_Z)$ zachodzi równość $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$. □

Wniosek 5.2.1. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to $\pi_0(X) \xrightarrow{f_\#} \pi_0(Y)$ jest bijekcją .*

Wniosek 5.2.2. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{h} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to dla dowolnego podzbioru $A \subset X$, obcięcie $h\colon X \setminus A \to Y \setminus h(A)$ też jest homeomorfizmem, a więc definiuje bijekcję zbiorów $\pi_0(X \setminus A) \xrightarrow{h_\#} \pi_0(Y \setminus h(A))$.* □

5.3 Spójność i łukowa spójność w przestrzeniach euklidesowych

W przykładach 5.2.1 i 5.2.3 pokazaliśmy, że zbiory gwiaździste w przestrzeniach euklidesowych, są łukowo spójne, a więc także spójne. Poniżej dyskutujemy związki pojęć łukowej spójności i spójności dla otwartych podzbiorów przestrzeni euklidesowych.

Stwierdzenie 5.3.1 (Składowe spójne podzbiorów otwartych)**.** *Składowe spójne dowolnego otwartego podzbioru* $\mathbb{R}^n$ *są zbiorami otwartymi.*

Dowód. Niech $C \subset U$ będzie składową spójną oraz $x \in C \subset U$. Ponieważ zbiór U jest otwarty możemy wybrać promień $r > 0$ taki,że $B(x, r) \subset U$. Zbiór $C \cup B(x, r)$ jest spójny, a więc z maksymalności U wynika, że $B(x, r) \subset C$, czyli C jest zbiorem otwartym. □

Stwierdzenie 5.3.2 (Spójność i łukowa podzbiorów otwartych)**.** *Otwarty, spójny podzbiór przestrzeni euklidesowej* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ *jest łukowo spójny. Składowe spójne takiego zbioru są identyczne ze składowymi łukowo spójnymi.*

Dowód. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie spójnym podzbiorem otwartym. Wybierzmy punk $x_0 \in U$ i rozważmy zbiór: $U_{x_0} := \{x \in U \,|\, \exists_{\omega:[0,1]\to X}\, \omega(0) = x_0,\, \omega(1) = x\}$, który oczywiście jest łukowo spójny. Pokażemy, że U_{x_0} jest zbiorem otwarto-domkniętym w U. Niech $x \in U_{x_0}$, wówczas istnieje $r > 0$ takie, że $B(x, r) \subset U_{x_0}$. Ponieważ kula euklidesowa jest łukowo spójna, więc dowolny punkt $x' \in B(x, r)$ można połączyć drogą z x, a zatem na mocy Stw. 5.2.2 także z punktem x_0. Taki sam argument pokazuje, że dopełnienie zbioru U_{x_0} jest zbiorem otwartym, a więc $U_{x_0} = U$. □

Składowe spójne grupy liniowej

Zajmiemy się teraz zbadaniem spójności ważnego podzbioru otwartego w przestrzeni macierzy kwadratowych $n\times n$ o współczynnikach rzeczywistych, a mianowicie grupy liniowej

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(n, n; \mathbb{R}) \,|\, \det A \neq 0\} \subset M(n, n; \mathbb{R}) = \prod_{i,j=1}^{n} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$$

- $\det\colon M(n, n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem ciągłym, a więc $GL(n, \mathbb{R})$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni macierzy $M(n, n; \mathbb{R})$.
- Mnożenie macierzy $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ jest odwzorowaniem ciągłym.
- $\det\colon GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest ciągłą surjekcją, a więc $GL(n; \mathbb{R}) = GL^+(n, \mathbb{R}) \cup GL^-(n, \mathbb{R})$ jest sumą dwóch rozłącznych podzbiorów otwartych składających sie odpowiednio z macierzy o wyznaczniku dodatnim i ujemnym.
- mnożenie przez dowolna macierz $A \in GL^-(n, \mathbb{R})$ zadaje homeomorfizm $h_A\colon GL^+(n, \mathbb{R}) \to GL^-(n, \mathbb{R})$.

Twierdzenie 5.3.1. *Zbiór macierzy* $GL^+(n, \mathbb{R})$ *jest łukowo spójny.*

Dowód. Na mocy Stw. 5.3.2 wystarczy pokazać, że $GL^+(n,\mathbb{R})$ jest zbiorem spójnym. Będziemy postepować indukcyjnie ze wzgledu na wymiar macierzy: $GL^+(1,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > 0\}$ a więc jest to zbiór spójny. Załóżmy, że $GL^+(k,\mathbb{R})$ jest spójna dla $k < n$ i rozważmy rzutowanie $p\colon GL^+(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ przypisujące każdej macierzy jej ostatnia kolumnę. Jako obcięcie rzutowania w produkcie kartezjańskim do otwartego podzbioru jest to odwzorowanie otwarte, a więc ilorazowe. Zauważmy, że odwzorowanie p polega na mnożeniu macierzy z prawej strony przez pionowo zapisany wektor bazy kanonicznej $\mathbf{e}_n := (0,..,0,1)$

Do odwzorowania p chcemy zastosować Stw. 5.1.3. Dla $n > 1$ przestrzeń $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jest łukowo spójna, a więc spójna. Należy więc zbadać przeciwobrazy $p^{-1}(\mathbf{v})$ gdzie $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zauważmy przede wszystkim, że dla dowolnych dwóch wektorów $p^{-1}(\mathbf{v})$ i $p^{-1}(\mathbf{w})$ są homeomorficzne. Istotnie, jeśli $C \in GL^+(n,\mathbb{R})$ jest macierzą taka, ze $C(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, to mnozenie przez C z lewej strony zadaje homeomorfizm $C\cdot\colon p^{-1}(\mathbf{v}) \to p^{-1}(\mathbf{w})$ – przekształcenie odwrotne jest mnożeniem przez C^{-1}.

Rozpatrzmy więc $p^{-1}(\mathbf{e}_n)$. Jest to zbiór macierzy postaci zapisanych blokowo

$$M = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{c} & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie $A \in GL^+(n-1,\mathbb{R})$ a $\mathbf{c} = (c_{n,1}, ..., c_{n,n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Taką macierz można w połaczyć drogą $\omega\colon [0,1] \to GL^+(n,\mathbb{R})$z macierzą dla której $\mathbf{c} = 0$:

$$\omega(t) := \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ t\mathbf{c} & 1 \end{pmatrix}$$

Zbiór macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \in GL^+(n,\mathbb{R})$$

jest homeomorficzny z $GL^+(n-1,\mathbb{R})$, a więc na mocy założenia indukcyjnego jest spójny, a zatem zbiór $p^{-1}(\mathbf{e}_n)$ jest spójny, co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 5.3.1. *Rozkład $GL(n;\mathbb{R}) = GL^+(n,\mathbb{R}) \cup GL^-(n,\mathbb{R})$ jest rozkładem na sumę dwóch homeomorficznych ze sobą składowych spójnych.* □

Uwaga 5.3.1. Korzystając z rozkładu macierzy na iloczyn macierzy elementarnych można podać bezpośrednią konstrukcję drogi łączącej daną macierz z macierzą identycznościową. Szkic dowodu jest następujący:

1. $\forall\, A \in GL^+(n,\mathbb{R})$ jest iloczynem macierzy elementarnych.

2. $\forall$ macierzy elementarnej $E_{ij}(\lambda)$ istnieje droga $[0,1] \xrightarrow{\omega} GL(n,\mathbb{R})$ taka, że $\omega_{ij}(0) = E_{ij}(\lambda)$ oraz $\omega(1) = Id_{n-1} \oplus [\pm 1]$.

3. Jeśli $A = E^1_{i_1 j_1}(\lambda_1) \circ \cdots \circ E^k_{i_k j_k}(\lambda_k)$ i ω_r droga łącząca $E^r_{i_r j_r}(\lambda_r)$ z $Id_{n-1} \oplus [\pm 1]$. Wtedy droga $\omega(t) := \omega_1(t) \circ \cdots \circ \omega_k(t)$ łączy macierz A z $Id_{n-1} \oplus [\pm 1]$. Jeśli $\det A > 0$, to $\omega(0) = Id$.