Rozdział 3

Wnętrze i domknięcie zbioru

Nie każdy podzbiór przestrzeni topologicznej jest otwarty lub domknięty. Dla danego podzbioru przestrzeni można jednak wskazać zarówno jego punkty wewnętrzne, jak też punkty leżące blisko tego zbioru, choć niekoniecznie do niego należące. Ta geometryczna intuicja jest sformalizowana w postaci definicj operacji wnętrza i domknięcia zbioru. Poniżej niech $(X, \mathcal{T})$ będzie ustaloną przestrzenią topologiczną.

3.1 Wnętrze zbioru

Definicja 3.1.1. *Wnętrzem zbioru* $A \subset X$ nazywamy maksymalny (ze względu na inkluzję) otwarty podzbiór w A, a więc sumę wszystkich podzbiorów otwartych zawartych w A:

$$\mathrm{Int}_{(X,\mathcal{T})}(A) := \bigcup\{U \mid U \subset A,\, U \in \mathcal{T}\}$$

Uwaga 3.1.1. Oznaczenie $\mathrm{Int}_{(X,\mathcal{T})}(A)$ podkreśla, że rozpatrujemy A jako podzbiór przestrzeni $(X, \mathcal{T})$. Jeśli jest jasne z kontekstu w jakiej przestrzeni topologicznej położony jest zbiór A stosowane są skrócone oznaczenia $\mathrm{Int}_X(A)$, $\mathrm{Int}(A)$ lub $\mathring{A}$.

Stwierdzenie 3.1.1. *Operacja brania wnętrza wyznacza odwzorowanie zbiorów potegowych* $\mathrm{Int}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *spełniające następujące warunki:*

1. $\forall A \subset X,\ \mathrm{Int}(A) \subset A$,
2. $U \in \mathcal{T} \iff \mathrm{Int}(U) = U$,
3. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$,
4. $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Int}(A \cap B)$.

$\square$

Stwierdzenie 3.1.2. *Punkt* $a \in \mathrm{Int}(A)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej bazy w punkcie* a *istnieje zbiór* U *z tej bazy taki, że* $U \subset A$. $\square$

3.2 Domknięcie zbioru

Definicja 3.2.1. *Domknięciem zbioru* $A \subset X$ nazywamy minimalny (ze względu na inkluzję) domknięty podzbiór zawierający A, a więc przecięcie wszystkich podzbiorów domkniętych zawierających A:

$$\mathrm{cl}_{(X,\mathcal{T})}(A) := \bigcap \{C \,|\, C \supset A,\, X \setminus C \in \mathcal{T}\}$$

Uwaga 3.2.1. Oznaczenie $\mathrm{cl}_{(X,\mathcal{T})}(A)$ podkreśla, że domykamy A jako podzbiór przestrzeni X. Jeśli jest jasne z kontekstu w jakiej przestrzeni topologicznej domykamy nasz zbiór, stosowane jest skrócone oznaczenie $\mathrm{cl}_X(A), \mathrm{cl}(A)$ lub $\bar{A}$.

Stwierdzenie 3.2.1. *Operacja domknięcie wyznacza odwzorowanie zbiorów potęgowych* $\mathrm{cl}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *spełniające następujące warunki:*

1. $\forall A \subset X,\ \mathrm{cl}(A) \supset A$,
2. $\mathrm{cl}(A) = A \iff X \setminus A \in \mathcal{T}$,
3. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$,
4. $\mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(A \cup B)$.

Stwierdzenie 3.2.2. $x \in \bar{A}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru otwartego* $U \ni x$ *(równoważnie dowolnego zbioru z pewnej bazy w punkcie* $x \in X$*) przecięcie ze zbiorem* A *jest niepuste:* $U \cap A \neq \emptyset$

Dowód. Niech $\mathcal{B}_x$ będzie ustaloną bazą w punkcie x. Rozpatrzmy zbiór

$$C := \{x \in X \,|\, \forall_{U \in \mathcal{B}_x}\, U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Z definicji wynika, że $A \subset C$ oraz $X \setminus C$ jest zbiorem otwartym, a więc C jest zbiorem domkniętym, a więc $\bar{A} \subset C$. Zauważmy, że także $C \subset \bar{A}$. Istotnie, jeśli $x \notin \bar{A}$ to znaczy, że istnieje podzbiór domknięty $B \supset A$ taki, że $x \notin B$, a więc zbiór otwarty $X \setminus B$ zawiera x i nie przecina się z A. □

3.3 Zbiory gęste, brzegowe i ośrodkowość

Definicja 3.3.1. Podzbiór $A \subset X$ nazywa się *gęsty* w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jeśli $\mathrm{cl}(A) = X$. Przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ nazywa się *ośrodkowa* jeśli posiada gęsty podzbiór przeliczalny.

Stwierdzenie 3.3.1. *Niech* $(X, \mathcal{T})$ *będzie przestrzenią topologiczną.*

1. *Podzbiór* $A \subset X$ *jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy ma niepuste przecięcie z dowolnym niepustym zbiorem otwartym (równoważnie: zbiorem z pewnej bazy).*
2. *Jeśli przestrzeń topologiczna spełnia II aksjomat przeliczalności (tzn. ma bazę przeliczalną), to jest ośrodkowa.*

3. *Jeśli metryzowalna przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest ośrodkowa, to spełnia II aksjomat przeliczalności.*

Dowód.
Ad 1. Wynika natychmiast ze Stw. 4.4
Ad 2. Wybierając z każdego zbioru bazy przeliczalnej po jednym punkcie otrzymujemy zbiór przeliczalny mający niepuste przecięcie z każdym zbiorem otwartym (bo każdy zbiór otwarty jest sumą zbiorów z bazy.)
Ad 3. Niech dla pewnej metryki d w X, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$. Jeśli $G \subset X$ jest zbiorem przeliczalnym gęstym, to rodzina zbiorów $\mathcal{B} := \{B(x, \frac{1}{n}) \mid x \in G,\, n \in \mathbb{N}\}$ jest przeliczalną bazą topologii $\mathcal{T}(d)$. □

Uwaga 3.3.1. "Założenie o metryzowalności przestrzeni topologicznej w ostatniej implikacji jest istotne, wystarczy rozpatrzeć prostą z topologią strzałki, która jest ośrodkowa, lecz nie spełnia II aksjomatu przeliczalności. "

3.4 Brzeg zbioru

Definicja 3.4.1. *Brzegiem* zbioru $A \subset X$ nazywamy zbiór

$$\mathrm{Fr}(A) := \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(X \setminus A).$$

Definicja 3.4.2. Podzbiór $A \subset X$ nazywa się *brzegowy* jeśli $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

Stwierdzenie 3.4.1. *Zachodzą następujące równości zbiorów:*

1. $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$.
2. $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Int}(A) = \emptyset$
3. $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)$
4. $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$ *i te zbiory są parami rozłączne.*

Uwaga 3.4.1. Zbiór jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{Fr}(A)$.

3.5 Wnętrze i domknięcie w terminach metryki

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz $A \subset X$. Opiszemy operacje wnętrza i domknięcie zbioru A w topologii $\mathcal{T}(d)$ w terminach metryki d .

Stwierdzenie 3.5.1. *Punkt $a \in \mathrm{Int}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $r > 0$ taka, że $B(a, r) \subset A$.* □

Stwierdzenie 3.5.2. *Punkt $x \in \mathrm{cl}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciag elementów $a_n \in A$ zbieżny do punktu x.*

Dowód. Jeśli $x \in \bar{A}$, to dla dowolnej kuli $B(x, \frac{1}{n})$ istnieje punkt $a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Ciąg $\{a_n\}$ jest więc zbieżny do x.

Odwrotnie, jeśli ciąg $a_n \to x$, to w dowolnym otoczeniu punktu x leżą punkty ze zbioru A, a więc $x \in \bar{A}$. $\square$

Domknięcie zbioru może być opisane w terminach intuicyjnej funkcji odstępu punktu od zbioru.

Stwierdzenie 3.5.3. *Funkcja odstępu punktu $a \in X$ od podzbioru $A \subset X$, $d(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$ określona wzorem $d(x, A) := \inf\{d(x.a) \,|\, a \in A\}$ jest ciągła oraz:*

$$d(x, A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{cl}(A).$$

Dowód. Sprawdzimy, że $d(\cdot, A)$ jest ciągła. Mamy oszacowanie: $|d(x, a) - d(y, a)| \leqslant d(x, y)$, a więc $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$, skąd z definicji wg Heine natychmiast wynika ciągłość $d(\cdot, A)$. Odstęp $d(x, A) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje podzbiór ciag $\{a_n\} \subset A \, \{a_n\} \to x$, a więc $x \in \bar{A}$. $\square$