Rozdział 6

Zwartość

6.1 Przestrzenie zwarte

Definicja 6.1.1. Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ nazywa się zwarta jeśli jest przestrzenią Hausdorffa oraz z dowolnego pokrycia przestrzeni X zbiorami otwartymi można wybrać pokrycie skończone. Podzbiór $A \subset X$ nazywa się zwarty jeśli przestrzeń $(A, \mathcal{T}|A)$ jest zwarta.

Korzystając z wzorów de Morgana zwartość można także określić w terminach zbiorów domkniętych.

Stwierdzenie 6.1.1. *Przestrzeń Hausdorffa jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna rodzina zbiorów domkniętych $\{F_s\}_{s\in S}$ taka, że dla dowolnego skończonego zbioru wskaźników $s_1, \ldots, s_k \in S$ przecięcie zbiorów $F_{s_1} \cap \cdots \cap F_{s_k} \neq \emptyset$ (zwana wtedy rodziną scentrowaną) cała ma niepuste przecięcie $\bigcap\limits_{s\in S} F_s \neq \emptyset$.*

Dowód. Będziemy dowodzić, że przestrzeń jest niezwarta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rodzina scentrowana o pustym przecięciu. Rzeczywiście, przestrzeń jest niezwarta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jej pokrycie otwarte $\mathcal{U}$ z którego nie można wybrać podpokrycia skończonego tzn. rodzina zbiorów domkniętych $\{X \setminus U \,|\, U \in \mathcal{U}\}$ ma puste przecięcie i jest scentrowana. Odwrotnie, mając rodzinę scentrowaną zbiorów domkniętych o pustym przecięciu $\{F_s\}_{s\in S}$ otrzymujemy pokrycie otwarte $\{X \setminus F_s\}_{s\in S}$ którego nie można wybrać pokrycia skończonego. □

Zwartość, podobnie jak spójność jest zachowywana przez przekształcenia ciągłe.

Stwierdzenie 6.1.2. *Jeśli $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą surjekcją z przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa, to $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przestrzenią zwartą.*

Uwaga 6.1.1. Założenie o tym, że $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przestrzenią Hausdorffa jest konieczne, bowiem obraz ciągły (a nawet iloraz) przestrzeni zwartej nie musi być przestrzenią Hausdorffa (p. Przykład 4.3.1).

6.2 Zwartość a operacje na przestrzeniach

Podprzestrzenie

Twierdzenie 6.2.1.

1. *Jeśli podprzestrzeń w przestrzeni Hausdorffa $(A, \mathcal{T}|A) \subset (X, \mathcal{T})$ jest zwarta to $A \subset X$ jest podzbiorem domkniętym.*

2. *Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią zwartą i $A \subset X$ podzbiorem domknietym, to przestrzeń $(A, \mathcal{T}|A)$ jest zwarta.*

Dowód. Ad 1. Załóżmy, że $(A, \mathcal{T}|A) \subset (X, \mathcal{T})$ jest zwarta i niech $x \notin A$. Wtedy dla każdego punktu $a \in A$ istnieją rozłączne otoczenia $U_a \ni a$ oraz $V_a \ni x$. Zbiory $\{U_a \cap A\}_{a \in A}$ tworzą otwarte pokrycie A, a więc można z niego wyjąć pokrycie skończone $U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n} \supset A$. Przecięcie $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_n}$ jest rozłączne z $U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}$, a zatem $x \in V \subset X \setminus A$.

Ad 2. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią zwartą, a $A \subset X$ jesj podzbiorem domkniętym. Z Stw. 4.2.3 wiemy, że $(A, \mathcal{T}|A)$ jest przestrzenią Hausdorffa. Rozpatrzmy więc pokrycie otwarte $\{V_s\}_{s \in S}$ przestrzeni $(A, \mathcal{T}|A)$. Z definicji topologii podprzestrzeni wynika, ze istnieją zbiory $U_s \in \mathcal{T}$ takie, że $V_s = U_s \cap A$. Rozpatrzmy pokryciem otwarte przestrzeni X zbiorami $\{V_s\}_{s \in S} \cup \{X \setminus A\}$. Ponieważ $(X, \mathcal{T})$ jest zwarta z tego pokrycia można wybrać pokrycie skończone, a więc skończoną liczbe zbiorów $U_{s_1} \cup \cdots \cup U_{s_n} \supset A$ co kończy dowód. □

Z ostatniego twierdzenia wynikaja wnioski bardzo uzyteczne przy sprawdzaniu, czy dwie przestrzenie są homeomorficzne.

Wniosek 6.2.1. *Niech $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie odwzorowaniem ciagłym określonym na przestrzeni zwartej $(X, \mathcal{T}_X)$ o wartościach w przestrzeni Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Wtedy:*

1) f jest odwzorowaniem domkniętym (a więc ilorazowym).

2) jeśli f jest bijekcją, to jest homeomorfizmem. □

Wniosek 6.2.2. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_1)$ jest przestrzenią zwartą a $\mathcal{T}_2$ topologią Hausdorffa w X taką, że $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$, to $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$.* □

Iloczyn kartezjański

Twierdzenie 6.2.2 (A.N. Tichonow[1])**.** *Iloczyn kartezjański przestrzeni topologicznych $\prod_{s \in S} (X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki $(X_s, \mathcal{T}_s)$ są przestrzeniami zwartymi.*

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia Tichonowa sformułujemy bardzo ważny, mający wiele zastosowań lemat o tubie.

[1] Andrei Nikolaevich Tikhonov (Gzhatska, Smoleńsk 1906 – 1993 Moskwa) – matematyk rosyjski [Mac Tutor]

Lemat 6.2.1 (Lemat o tubie)**.** *Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ bedzie dowolną przestrzenią topologiczną, a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ przestrzenią zwartą. Dla dowolnego punktu $x_0 \in X$ i zbioru otwartego w iloczynie kartezjańskim $W \supset \{x_0\} \times Y$ istnieje otocznie otwarte $U \ni x_0$ takie, że $W \supset U \times Y \supset \{x_0\} \times Y$.*

Dowód. Dla każdego punktu $(x_0, y) \in \{x_0\} \times Y$ istnieją otoczenia $U_y \ni x_0$ oraz $V_y \ni y$ takie, że $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset W$. Zbiory $\{V_y\}_{y \in Y}$ tworzą otwarte pokrycie przestrzeni Y, a więc mozna zeń wyjąć pokrycie skończone: $V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} = Y$. Zbiór $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ jest otoczeniem x_0 i oczywiście dla każdego y_i, $U \times V_{y_i} \subset W$ a zatem $U \times Y \subset W$. $\square$

Wniosek 6.2.3. *Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ bedzie dowolną przestrzenią topologiczną, a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ przestrzenią zwartą. Wtedy projekcja $p_X : (X \times Y, \mathcal{T}^*) \to (X, \mathcal{T}_X)$ jest przekształceniem domkniętym.*

Dowód. Niech $A \subset X \times Y$ będzie zbiorem domkniętym. Żeby wykazać, że $p_X(A) \subset X$ jest domknięty trzeba sprawdzic, że dla każdego $x \notin p_X(A)$ istnieje otoczenie $U \ni x$ takie, że $U \cap p_X(A) = \emptyset$ tzn. $p_X^{-1}(U) \cap A = \emptyset$. Oczywiście $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, a więc wystarczy zastosować Lemat o tubie 6.2.1 do zbioru otwartego $X \times Y \setminus A$ oraz punktu $x \notin p_X(A)$. $\square$

Kolejne twierdzenie jest analogiczne do udowodnionego wcześniej Twierdzenia 5.1.3 dotyczącego spójności.

Twierdzenie 6.2.3. *Jeśli $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przekształceniem domkniętym takim, że $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią Hausdorffa, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest zwarta i dla każdego $y \in Y$ przeciwobraz $f^{-1}(y)$ jest zbiorem zwartym, to przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest zwarta.*

Dowód. Niech $\{U_s\}_{s \in S}$ będzie pokryciem otwartym X. Dla każdego punktu $y \in Y$ istnieje skończony podzbiór $S_y \subset S$ taki, że $\bigcup_{s \in S_y} U_s \supset f^{-1}(y)$. Ponieważ f jest domkniete, więc istnieje $V_y \ni y$ takie, że $f^{-1}(V_y) \subset \bigcup_{s \in S_y} U_s$. Zbiory $\{V_y\}_{y \in Y}$ tworzą pokrycie przestrzeni Y, zatem można z niego wybrać pokrycie skończone $V_{y_1}, \dots V_{y_n}$. Zbiory $\{U_s\}_{s \in S'}$ gdzie $S' := S_{y_1} \cup \dots \cup S_{y_n}$ tworzą pokrycie skończone X. $\square$

Wywnioskujemy teraz tezę twierdzenia Tichonowa dla skończonych rodzin przestrzeni.

Wniosek 6.2.4. *Iloczyn kartezjański skończonej rodziny przestrzeni topologicznych $\prod_{s \in S} (X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki $(X_s, \mathcal{T}_s)$ są przestrzeniami zwartymi.*

Dowód. Jak zauważylismy wcześniej zwartość iloczynu pociąga zwartośc czynników. Odwrotnie, skoro rodzina przestrzeni jest skończona wystarczy wykazać tezę dla iloczynu dwóch przestrzeni. Wynika ona natychmiast z Wniosku 6.2.3 oraz Twierdzenia 6.2.3. $\square$

Twierdzenie Tichonowa 6.2.2 w pełnej ogólności jest równoważne pewnikowi wyboru w teorii mnogości, a jego dowód wymaga zastosowania lematu Kuratowskiego-Zorna [p.BCPP Rozdział 7.3].

Przestrzeń ilorazowa i suma prosta

Zachowanie zwartości przy pozostałych dwóch operacjach jest znacznie łatwiejsze do sprawdzenia.

Przestrzeń ilorazowa przestrzeni zwartej jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest przestrzenią Hausdorffa.

Natomiast suma prosta $\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie przestrzenie X_s są zwarte oraz $X_s \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu $s \in S$.

6.3 Zwartość w przestrzeniach metrycznych

6.3.1 Zwartość metryczna i topologiczna

Definicja 6.3.1. Przestrzeń metryczna (X, d) nazywa się zwarta jeśli z dowolnego ciągu jej elementów można wybrać podciąg zbieżny.

Twierdzenie 6.3.1. *Przestrzeń metryczna (X, d) jest zwarta (w sensie metrycznym) wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T}(d))$ jest zwarta.*

Do dowodu implikacji $\Longrightarrow$ potrzebne będą dwa lematy:

Lemat 6.3.1. *Jeśli przestrzeń (X, d) jest zwarta (metrycznie), to topologia $\mathcal{T}(d)$ posiada bazę przeliczalną, a więc z każdego pokrycia otwartego przestrzeni $(X, s\mathcal{T}(d))$ można wybrać pokrycie przeliczalne.*

Dowód. Dla każdej liczby naturalnej n rozważmy pokrycie przestrzeni X kulami o promieniu $\frac{1}{n}$. Z tego pokrycia można wybrać pokrycie skończone $\mathcal{U}_n$. Rodzina $\mathcal{B} := \bigcup \mathcal{U}_n$ jest przeliczalną bazą przestrzeni $(X, \mathcal{T}(d))$, a zatem na podstawie Stw. 2.2.1 z dowolnego pokrycia otwartego można wybrać pokrycie przeliczalne. □

Lemat 6.3.2. *Przestrzeń Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$ taka, że z dowolnego jej pokrycia otwartego można wybrać pokrycie przeliczalne jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda zstepująca rodzina podzbiorów niepustych podzbiorów domkniętych ma niepuste przecięcie.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Dowód wynika natychmiast z Stw. 6.1.1, bowiem zstępująca rodzina podzbiorów domkniętych jest scentrowana.

$\Longleftarrow$ Jeśli $\{U_s\}_{s\in S}$ jest dowolnym pokryciem otwartym, to można z niego wyjąc pokrycie przeliczalne, więc do dowodu zwartości wystarczy ograniczyć się do rozpatrywania otwartych pokryć przeliczalną liczbą zbiorów. Niech więc $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie pokryciem przeliczalnym. Zdefiniujmy zbiory $V_n := U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Wystarczy wykazać, że istnieje N takie, że $V_N = X$. Rozważmy w tym celu zstepującą rodzinę zbiorów domkniętych $F_n := X \setminus V_n$. Ponieważ $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n = \emptyset$, więc istnieje N takie, że $\bigcap_{n=1}^{N} F_n = \emptyset$, a więc $V_N = X$. □

Dowód twierdzenia 6.3.1. $\Longleftarrow$ Niech $A_1 := \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz $A_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Zstępująca rodzina zbiorów domkniętych $F_n := \mathrm{cl}(A_n)$ jest scentrowana, a więc $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ zawiera pewien punkt x_0. Wybierając po jednym punkcie z każdego zbioru $x_{n(k)} \in F_k \cap B(x_0, \frac{1}{k})$ otrzymujemy podciąg zbieżny do x_0.

$\Longrightarrow$ Na mocy lematów 6.3.1 oraz 6.3.2 wystarczy sprawdzić, że dowolna zstepująca przeliczalna rodzina niepustych zbiorów domkniętych ma niepuste przecięcie. Z założenia dowolnie wybrany ciąg elementów $x_n \in F_n$ posiada podciąg zbieżny $\{x_{n_k}\}$, którego granica musi należeć do $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. □

6.3.2 Liczba Lebesgue'a pokrycia

Stwierdzenie 6.3.1. *Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną a $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ jej pokryciem zbiorami $U_s \in \mathcal{T}(d)$. Wówczas istnieje liczba $\lambda > 0$ – zwana liczbą Lebesgue'a*[2] *pokrycia – taka, że $\forall_{x\in X} \exists_{s(x)\in S}\, B(x, \lambda) \subset U_{s(x)}$.*

Dowód. Dla każdego $x \in X$ istnieje zbiór U_s i liczba $\epsilon_{s,x} > 0$ taka, że $B(x, 2\epsilon_{s,x}) \subset U_s$. Z pokrycia kulami $\{B(x, \epsilon_{s,x})\}_{x\in X}$ można wybrać pokrycie skończone $\{B(x_i, \epsilon_{s_i,x_i})\}_{i=1}^{N}$. Liczba $\lambda := \min\{\epsilon_{s_1,x_1}, \ldots, \epsilon_{s_N,x_N}\}$ spełnia tezę twierdzenia. Istotnie, dla dowolnego punktu $y \in X$ oraz istnieje zbiór $B(x_i, \epsilon s_i, x_i \in y$. Zatem dla dowolnego $z \in B(y, \lambda)$ mamy $d(x_i, z) \leqslant d(x_i, y) + d(y, z) \leqslant \epsilon_{s_i,x_i} + \lambda \leqslant 2\epsilon_{s_i,x_i}$, a więc $B(y, \lambda) \subset U_{s_i}$. □

6.3.3 Zwarte podzbiory przestrzeni euklidesowych

Stwierdzenie 6.3.2. *Podzbiór zwarty dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) jest domknięty i ograniczony (tzn. zawarty w pewnej kuli). W przestrzeni przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ podzbiór domknięty i ograniczony jest zwarty.*

Dowód. Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem zwartym przestrzeni metryzowalnej, to musi być domknięty, bowiem przestrzeń metryzowalna jest Hausdorffa. Zauważmy najpierw, że podzbiór zwarty prostej musi być ograniczony. Wybierzmy punkt $a_0 \in A$ i rozważmy funkcję $d(a_0, \cdot)\colon X \to \mathbb{R}$. Ponieważ A jest zbiorem zwartym istnieje $R > 0$ takie, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $d(a_0, a) \leqslant R$, stąd zbiór A jest zawarty w kuli $B(a_0, R)$.

Niech teraz $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni euklidesowej (metryka euklidesowa!). Wtedy istnieje odcinek $[a, b]$ taki, że $A \subset [a, b]^n \subset \mathbb{R}^n$. Ponieważ kostka $[a, b]^n$ jest zwarta, a więc A jako jej podzbiór domknięty jest zbiorem zwartym. □

Przykład 6.3.1. Zbiór macierzy ortogonalnych $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ jest zwarty. Istotnie, jako zbiór rozwiązań układu równań dwuliniowych jest on domknięty. Ponieważ kolumny macierzy ortogonalnej są wektorami o długości 1, $O(n)$ jest zbiorem ograniczonym, a więc zwartym.

[2] Henri Léon Lebesgue, Beauvais (Oise, Picardie, Francja 1875 - 1941 Paryż) formulated the theory of measure in 1901 and the following year he gave the definition of the Lebesgue integral that generalises the notion of the Riemann integral. [Mac Tutor]