# Rozdział 7

# Zbieżność jednostajna

Kilkakrotnie mieliśmy już do czynienia z granicami ciągów, zależnych od dodatkowego parametru, który mógł być liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Przyjęliśmy np. definicję funkcji wykładniczej

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\,.$$

Dla każdego $z \in \mathbb{C}$ wartość $\exp(z)$ funkcji wykładniczej jest więc granicą wartości konkretnych wielomianów. Można zadać naturalne pytania: jeśli, ogólnie, $f(z) = \lim_n f_n(z)$ dla wszystkich $z$ z pewnego podzbioru prostej lub płaszczyzny, to które własności wszystkich funkcji $f_n$ (ciągłość? różniczkowalność? ...) dziedziczy graniczna funkcja $f$? Czy dziedziczy je w każdym przypadku, czy może potrzebne są dodatkowe założenia?

W tym rozdziale postaramy się przynajmniej częściowo wyjaśnić te kwestie.

## 7.1 Definicje i przykłady

Niech $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, a $X$ oznacza (na razie) zupełnie dowolny zbiór.

**Definicja 7.1 (zbieżność punktowa).** Powiemy, że ciąg funkcji $(f_n)$ jest *zbieżny punktowo do $f$ na zbiorze $X$* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in X$ zachodzi równość

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

Piszemy wtedy: $f_n \to f$ na $X$.

**Definicja 7.2 (zbieżność jednostajna).** Powiemy, że ciąg funkcji $(f_n)$ jest *zbieżny jednostajnie do $f$ na zbiorze $X$* wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $x \in X$ i wszystkich $n > n_0$ jest

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\,.$$

Piszemy wtedy: $f_n \rightrightarrows f$ na $X$.

**Uwaga.** Mówimy, że szereg funkcji $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x)$ jest zbieżny punktowo (odpowiednio: jednostajnie) do funkcji $f(x)$ na zbiorze $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych

$S_n = \sum_{k=k_0}^{n} f_k$ tego szeregu jest zbieżny do $f$ punktowo (odpowiednio: jednostajnie) na zbiorze $X$. Zwykle będziemy mieć do czynienia z sytuacją $k_0 = 0$ lub $k_0 = 1$.

Aby ostro uwidocznić różnicę między oboma pojęciami, zapiszemy Definicje 7.1 i 7.2, używając kwantyfikatorów, potrzebnych do określenia granicy:

**Zbieżność punktowa $f_n \to f$ na $X$:** $\boxed{\forall x \in X}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) > 0$ $\forall n > n_0$

zachodzi warunek $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

**Zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$ na $X$:** $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ $\boxed{\forall x \in X}$ $\forall n > n_0$

zachodzi warunek $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Różnica polega na tym, że liczbę $n_0$ w pierwszym przypadku wybieramy, ustaliwszy wcześniej zarówno $x \in X$, jak i $\varepsilon > 0$. Dlatego $n_0$ *może* zależeć zarówno od $\varepsilon$, jak i od punktu $x \in X$. Natomiast w drugim przypadku najpierw ustalamy $\varepsilon > 0$, a potem wybieramy liczbę $n_0$ *niezależną od* $x \in X$, tak, aby warunek $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ zachodził dla wszystkich $n > n_0$ i *wszystkich* $x \in X$ *jednocześnie.*[1]

Zacznijmy od standardowego przykładu, wskazującego, że różnica między obiema definicjami jest istotna.

**Przykład 7.3.** Niech $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ i niech $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f_n(x) = x^n$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Innymi słowy, ciąg $f_n$ jest zbieżny punktowo na $[0, 1]$ do funkcji $f$. Nie jest to jednak zbieżność jednostajna: dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest

$$f_n(2^{-1/n}) - f(2^{-1/n}) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

a zatem warunek z definicji zbieżności jednostajnej z pewnością nie zachodzi dla żadnej liczby dodatniej $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

**Przykład 7.4.** Jak poprzednio, niech $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Połóżmy

$$f(x) = \exp(x), \qquad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in [0, 1], \ n = 1, 2, \ldots$$

Z Twierdzenia 4.52 wynika, że $f_n \to f$ na $[0, 1]$, tzn. dla każdego $x \in [0, 1]$ szereg $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$

[1] Z podobnym rozróżnieniem spotkaliśmy się już, definiując ciągłość jednostajną.

jest zbieżny do $\exp(x)$. Mamy ponadto

$$\begin{aligned} |f(x)-f_n(x)| &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right)=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}<\frac{2}{n!}\,. \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy oszacowanie *niezależne* od liczby $x\in[0,1]$. Jeśli $\varepsilon>0$, to biorąc $n_0=[2/\varepsilon]+1>2/\varepsilon$, otrzymujemy

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{2}{n!}<\frac{2}{n}<\frac{2}{n_0}<\varepsilon\qquad\text{dla wszystkich } x\in[0,1] \text{ i } n>n_0.$$

Dlatego tym razem $f_n\rightrightarrows f$ na $[0,1]$.

Zauważmy jeszcze, że do podobnego oszacowania można dojść, posługując się wzorem Taylora–MacLaurina z resztą Lagrange'a:

$$\exp(x)=f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j\ +\ \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad\text{dla pewnego } c_n\in(0,x)\subset(0,1),$$

a zatem, ponieważ w tym przykładzie $f^{(j)}\equiv f$ dla wszystkich $j$,

$$f(x)=f_n(x)+r_n,\qquad\text{gdzie}\qquad |r_n|=\frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}\le\frac{e}{(n+1)!}\,,$$

**Zadanie 7.5.** Wykazać, że ciąg funkcji

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$$

jest zbieżny jednostajnie do $f(z)=\exp z$

(a) na każdym ograniczonym przedziale $[-M,M]\subset\mathbb{R}$;

(b) na każdym kole domkniętym $K_M=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|\le M\subset\mathbb{C}$.

To, że w poprzednim przykładzie, a także w ostatnim zadaniu, mamy do czynienia ze zbiorami *ograniczonymi*, jest rzeczą istotną.

**Przykład 7.6.** Na zbiorze $X=\mathbb{R}$ ciąg

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},\qquad x\in\mathbb{R},\ n=1,2,\ldots$$

*nie jest* zbieżny jednostajnie do funkcji wykładniczej. Udowodnimy to przez zaprzeczenie.

Załóżmy przez chwilę, że dla $\varepsilon=1>0$ istnieje $n_0$ takie, że $|f_n(x)-f(x)|<1=\varepsilon$ dla wszystkich $n>n_0$ i $x\in\mathbb{R}$. Ustalmy $n>n_0$. Dla $x>0$ jest

$$|f(x)-f_n(x)|=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Wstawiając do tego oszacowania $x_n = \big((n+1)!\big)^{1/(n+1)}$, otrzymujemy

$$|f(x_n) - f_n(x_n)| > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1,$$

to zaś jest sprzeczność, bo dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, a więc także dla $x = x_n$, powinna zgodnie z założeniem zachodzić nierówność przeciwna. Warunek z definicji jednostajnej zbieżności nie jest więc w tym przypadku spełniony. □

**Norma jednostajna. Interpretacja geometryczna zbieżności jednostajnej**

Nietrudno zauważyć, że Definicja 7.2 jest równoważna następującej:

> *Ciąg $f_n \rightrightarrows f$ na $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczbowy*
>
> $$d_n \equiv d(f_n, f) \colon = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$$
>
> *jest zbieżny do zera dla $n \to \infty$.*

Wprowadza się czasem oznaczenie

$$\|g\|_{\infty,X} = \sup_{x \in X} |g(x)|$$

(indeks $X$ opuszczamy, gdy wiadomo dobrze, o jaki zbiór chodzi). Liczbę $\|g\|_{\infty,X}$ nazywamy *normą jednostajną* funkcji $g$ (na zbiorze $X$).[2] Przy takich oznaczeniach,

$$d_n \equiv d(f_n, f) = \|f_n - f\|_{\infty,X}.$$

Tę liczbę można traktować jak – abstrakcyjnie zdefiniowaną! – *odległość funkcji $f_n$ i $f$*. Jeśli bowiem $Y = \mathbb{R}^X$ jest zbiorem wszystkich funkcji $f \colon X \to \mathbb{R}$, to funkcja

$$Y \times Y \ni (f, g) \longmapsto d(f, g) = \|f - g\|_{\infty,X} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

spełnia trzy naturalne warunki, które spełnia np. zwykła odległość punktów na płaszczyźnie czy w przestrzeni:

1. Dla wszystkich $f, g \in Y$ warunek $d(f, g) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f = g$;
2. Dla wszystkich $f, g \in Y$ jest $d(f, g) = d(g, f)$.
3. Dla wszystkich $f, g, h \in Y$ zachodzi *nierówność trójkąta*

$$d(f, g) \le d(f, h) + d(h, g)\,.$$

Pierwsze dwa warunki są oczywiste. Trzeci wynika z nierówności trójkąta w $\mathbb{R}$ i definicji kresu górnego: dla każdego $x \in X$ jest

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\le \sup_{t \in X} |f(t) - h(t)| + \sup_{t \in X} |h(t) - g(t)| = d(f, h) + d(h, g); \end{aligned}$$

[2] Oczywiście $\|g\|_{\infty,X} < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g$ jest funkcją ograniczoną.

biorąc teraz supremum lewej strony względem $x \in X$, otrzymujemy

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \le d(f,h) + d(h,g)\,.$$

Mówi się krótko, że $d$ jest *metryką* na zbiorze $Y$. Z ogólnym pojęciem *przestrzeni metrycznej* i *metryki* Czytelnik zapozna się bliżej na II roku studiów, na zajęciach z Topologii i z Analizy. Podkreślmy jednak już teraz dwie rzeczy:

1. Zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$ na $X$ jest równoważna temu, że odległość

   $$d(f_n, f) = \|f_n - f\|_{\infty,X} \to 0 \qquad \text{dla } n \to \infty.$$

   Traktujemy zatem funkcje *tak jak punkty* zbioru $Y = \mathbb{R}^X$; zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$ to zbieżność (odpowiednio określonej) odległości *punktów* $f_n$ i $f$ w zbiorze $Y = \mathbb{R}^X$ do zera.

2. Warunek

   $$d(f,g) = \|f - g\|_{\infty,X} = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \le \varepsilon$$

   jest oczywiście równoważny następującemu:

   $$f(x) - \varepsilon \le g(x) \le f(x) + \varepsilon \qquad \text{dla wszystkich } x \in X.$$

   Oznacza to, że $d(f,g) \le \varepsilon$, gdy wykres $g$ zawiera się w krzywoliniowym pasku o wysokości $2\varepsilon$, narysowanym wokół wykresu funkcji $f$ (patrz rysunek).

### Ciągłość granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyjnego

Zakończymy ten wstępny podrozdział prostym, ale ważnym twierdzeniem, które wyjaśnia jeden z powodów wprowadzenia pojęcia jednostajnej zbieżności ciągów funkcyjnych.

**Twierdzenie 7.7.** *Załóżmy, że $P \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym przedziałem. Niech $f_n \colon P \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi na $P$. Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ na $P$, to $f$ jest ciągła na $P$.*

Dowód. Ustalmy $x \in P$ oraz dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, a także liczbę $\eta > 0$, którą dobierzemy do $\varepsilon$ pod koniec dowodu. Wskażemy liczbę $\delta > 0$ taką, że

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{dla } y \in P,\ |y - x| < \delta. \tag{7.1}$$

(Na mocy Stwierdzenia 5.27, wyniknie stąd ciągłość $f$ w punkcie $x \in P$.)

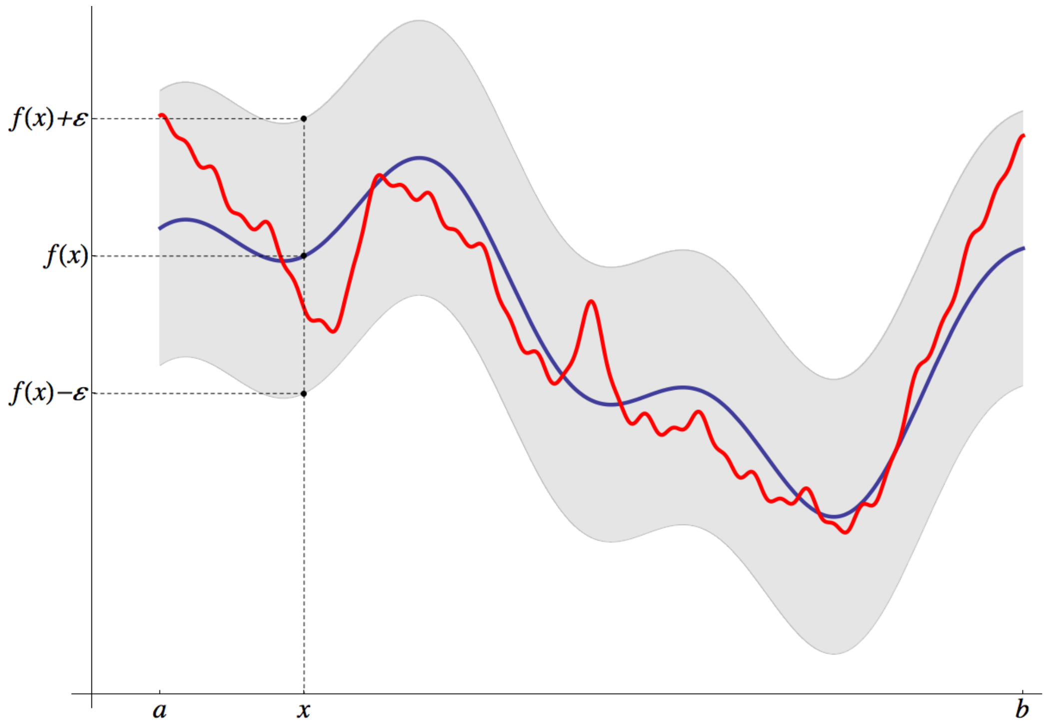
Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|f_n(t) - f(t)| < \eta$ dla wszystkich $t \in P$. Ustalmy jakąkolwiek liczbę $n > n_0$. Z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \eta + |f_n(x) - f_n(y)| + \eta = 2\eta + |f_n(x) - f_n(y)|\,. \end{aligned}$$

Funkcja $f_n$ jest ciągła w $x \in P$. Istnieje zatem liczba $\delta > 0$ taka, że $|f_n(x) - f_n(y)| < \eta$ dla wszystkich $y \in P$, spełniających nierówność $|x - y| < \delta$. Dlatego

$$|f(x) - f(y)| < 2\eta + |f_n(x) - f_n(y)| < 3\eta\,.$$

dla $y \in P$ takich, że $|y - x| < \delta$. Wybierając $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$, otrzymujemy warunek (7.1) i kończymy dowód. $\square$




Warunek $d(f,g) = \|f-g\|_\infty < \varepsilon$ oznacza, że wykres $g$ mieści się w "pasku o wysokości $2\varepsilon$" wokół wykresu $f$.

**Uwaga 7.8.** Udowodniliśmy w istocie nieco więcej: jeśli $f_n \rightrightarrows f$ na przedziale $P$ i wszystkie funkcje $f_n$ są ciągłe w $x_0 \in P$, to $f$ jest ciągła w $x_0$.

**Uwaga 7.9.** Omówiony wcześniej przykład ciągu $f_n(x) = x^n$, zbieżnego na $[0,1]$ punktowo (ale nie jednostajnie!) do funkcji $f = \chi_{[0,1)}$ nieciągłej w $x_0 = 1$ wskazuje, że założenie *jednostajnej* zbieżności jest w tym twierdzeniu istotne.

**Uwaga 7.10.** Może się zdarzyć, że ciąg funkcji $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zbieżny punktowo (ale nie jednostajnie) do funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Oto przykład takiej sytuacji: $f(x) = 1$ jest funkcją stałą. Wybieramy $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłą i taką, że

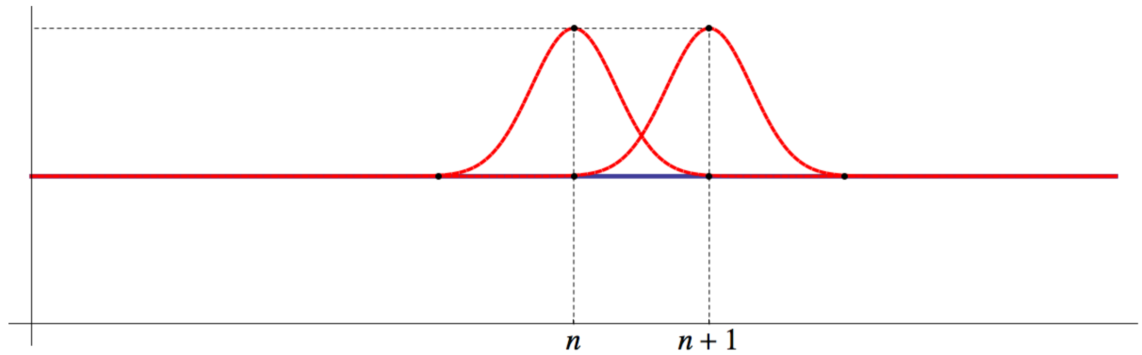
$$g(x) = 0 \quad \text{dla } x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty), \qquad g(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (-1,1), \qquad \sup g = 1\,.$$

Następnie, kładziemy $f_n(x) = 1 + g(x-n)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wykresy funkcji $f_n$ wyglądają jak garby, przesuwające się w równym tempie w stronę $+\infty$ (patrz rysunek). Przy ustalonym $x \in \mathbb{R}$ mamy po prostu $f_n(x) = 1 = f(x)$ dla $n > x+1$. Nietrudno sprawdzić, że w tej sytuacji oczywiście $f_n \to f$ na $\mathbb{R}$, ale $\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup g = 1$, czyli $f_n \not\rightrightarrows f$.

**Uwaga 7.11.** Tak samo definiuje się zbieżność jednostajną ciągów funkcji $f_n\colon X \to \mathbb{C}$ (moduł oznacza wtedy wszędzie po prostu moduł liczby zespolonej). Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

> *Jeśli ciąg funkcji ciągłych $f_n\colon C \subset X \to \mathbb{C}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f\colon X \to \mathbb{C}$, to $f$ jest ciągła na $X$.*

Dowód jest taki sam, jak w przypadku rzeczywistym.




“Wędrujący garb”: ciąg funkcji $g_n \to f$ punktowo, ale $d(g_n, f) = \|g_n - f\|_\infty = \text{const} > 0$ dla wszystkich $n$.

## 7.2 Najprostsze kryteria zbieżności jednostajnej

**Stwierdzenie 7.12.** *Niech $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Następujące warunki są równoważne:*

*(a) Ciąg $(f_n)$ jest zbieżny jednostajnie na $X$ do pewnej funkcji $f \colon X \to \mathbb{R}$;*

*(b) Ciąg $(f_n)$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $m, n > n_0$ i wszystkich $x \in X$ zachodzi nierówność*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,.$$

Dowód. Całe rozumowanie polega na zastosowaniu warunku Cauchy'ego dla ciągów liczbowych (patrz Twierdzenie 2.37) i uważnej lekturze definicji. Oto szczegóły.

*Część I.* (a) $\Rightarrow$ (b). Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$ na $X$, więc istnieje $n_0 \in N$ takie, że $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich $n > n_0$ i $x \in X$. Zatem, dla wszystkich $m, n > n_0$ i wszystkich $x \in X$ otrzymujemy z nierówności trójkąta

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

*Część I.* (b) $\Rightarrow$ (a). Załóżmy, że $(f_n)$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego $b$. Wtedy dla każdego $x \in X$ ciąg liczbowy $(f_n(x))_{n=1,2,\ldots}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc na mocy Twierdzenia 2.37 ma granicę w $\mathbb{R}$. Oznaczmy tę granicę $f(x)$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$ i zastosujmy (b) do liczby $\varepsilon/2$: istnieje takie $n_0$ (zależne tylko od $\varepsilon$!), że dla wszystkich $m, n > n_0$ i $x \in X$ jest $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ustalmy teraz liczbę $n$ i przejdźmy do granicy $m \to \infty$. Ponieważ w granicy zachowują się nierówności nieostre, więc otrzymamy

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \text{dla wszystkich } n > n_0 \text{ i } x \in X.$$

Zatem istotnie $f_n \rightrightarrows f$ na $X$. $\square$

**Stwierdzenie 7.13 (kryterium Weierstrassa).** *Niech $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Jeśli*

$$|f_n(x)| \le a_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

*a szereg liczbowy $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest zbieżny, to wówczas szeregi funkcyjne*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \textit{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

*są zbieżne jednostajnie na $X$.*

**Uwaga terminologiczna.** W takiej sytuacji mówimy, że szereg $\sum f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.

Dowód. Niech

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} |f_n(x)|$$

oznacza $m$-tą sumę częściową szeregu $\sum |f_n|$. Z założenia $|f_n(x)| \le a_n$, a więc gdy $m, k \in \mathbb{N}$ i $m > k$, to

$$|S_m(x) - S_k(x)| = S_m(x) - S_k(x) \le a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m \qquad \text{dla wszystkich } x \in X.$$

Szereg liczbowy zbieżny $\sum a_n$ spełnia warunek Cauchy'ego dla szeregów, patrz Stwierdzenie 4.4. Zatem dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takie, że

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m = |a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

dla wszystkich $m > k > n_0$. Stąd

$$|S_m(x) - S_k(x)| \le a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m < \varepsilon \qquad \text{dla wszystkich } x \in X \text{ i } m > k > n_0.$$

Ciąg funkcyjny $(S_m)$ spełnia więc *jednostajny warunek Cauchy'ego na $X$*, tzn. na mocy poprzedniego stwierdzenia jest jednostajnie zbieżny. Z definicji, oznacza to zbieżność jednostajną szeregu $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)|$ na zbiorze $X$.

Dowód jednostajnej zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ jest analogiczny. Trzeba tylko zauważyć, że dla $m > k$ jest

$$\left| \sum_{n=1}^{m} f_n(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{m} f_n(x) \right| \le \sum_{n=k+1}^{m} |f_n(x)| \le a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m\,.$$

Łatwo stąd (podobnie, jak w pierwszej części dowodu) wywnioskować, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum f_n$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego na $X$. □

**Uwaga 7.14.** Oba stwierdzenia przenoszą się bez zmian na przypadek funkcji o wartościach zespolonych.

## 7.3 Twierdzenia Weierstrassa i Diniego

**Oznaczenia.** Niech $P \subset \mathbb{R}$. W dalszym ciągu symbolem $C(P)$ będziemy oznaczali zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f\colon P \to \mathbb{R}$.

Udowodnimy teraz fundamentalne twierdzenie, które ma liczne zastosowania w Analizie Matematycznej. Niektóre z nich poznamy wkrótce.

**Twierdzenie 7.15** (Weierstrass)**.** *Jeśli* $a, b \in \mathbb{R}$ *i* $f \in C([a,b])$*, to istnieje ciąg wielomianów* $P_n$ *o współczynnikach rzeczywistych taki, że* $P_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$.

Zauważmy najpierw, że wystarczy udowodnić twierdzenie w szczególnym przypadku: dla $a = 0$ i $b = 1$. Dla innych przedziałów uzyskamy wtedy tezę, składając odpowiednie funkcje z funkcjami liniowymi

$$[0,1] \ni t \longmapsto x = a + t(b-a) \in [a,b]\,.$$

Istotnie, przypuśćmy, że dla dowolnej $f \in C([0,1])$ istnieją wielomiany $P_n$ takie, że $P_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$. Dla ustalonej $g \in C([a,b])$ niech $f(t) = g\big(a+t(b-a)\big)$, gdzie $t \in [0,1]$; $f$ jest funkcją ciągłą na $[0,1]$. Wybierzmy ciąg wielomianów $P_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ i połóżmy

$$Q_n(x) := P_n\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big) \qquad \text{dla } x \in [a,b].$$

Wtedy $Q_n$ są wielomianami i $Q_n \rightrightarrows g$ na $[a,b]$, gdyż $\|Q_n - g\|_{\infty,[a,b]} = \|P_n - f\|_{\infty,[0,1]}$.

Dlatego ograniczymy się do dowodu następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 7.16** (S.N. Bernstein)**.** *Niech* $f \in C\big([0,1]\big)$. *Połóżmy*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\,, \qquad x \in [0,1], \quad n = 1, 2, \ldots$$

*Wówczas* $B_n(f) \rightrightarrows f$ *na* $[0,1]$.

**Uwaga terminologiczna.** Wielomian $B_n(f)$ nazywa się *$n$-tym wielomianem Bernsteina funkcji $f$.*

Dowód. Najpierw udowodnimy trzy pomocnicze fakty:

(a) Jeśli $f_1(x) \equiv 1$ na $[0,1]$, to $B_n(f_1) \equiv 1$ na $[0,1]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(b) Jeśli $f_2(x) = x$ na $[0,1]$, to $B_n(f_2)(x) = x$ na $[0,1]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(c) Jeśli $f_3(x) = x^2$ na $[0,1]$, to $B_n(f_3)(x) = x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n}$ na $[0,1]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Własność (a) wynika natychmiast z dwumianu Newtona. Istotnie, jeśli $f_1 \equiv 1$, to

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \big(x + (1-x)\big)^n = 1^n = 1\,.$$

Dla dowodu (b) zauważmy, że $\frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$ dla $k \geq 1$ (a dla $k = 0$ lewa strona jest zerem). Dlatego dla funkcji $f_2(x) = x$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} B_n(f_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} \; = \; x. \end{aligned}$$

(Przechodząc do trzeciej linijki, podstawiliśmy $j = k - 1$). Aby sprawdzić (c), piszemy

$$\frac{k^2}{n^2} = \frac{k^2 - k}{n^2} + \frac{k}{n^2} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

i rachujemy

$$\begin{aligned} B_n(f_3)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} \cdot x^2 \cdot (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} B_n(f_2)(x) \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j \cdot (1-x)^{n-2-j}}_{=\,1,\text{ z dwumianu Newtona}} + \frac{x}{n} = x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n}\,. \end{aligned}$$

Teraz przejdziemy do zasadniczej części dowodu. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f$ jest *jednostajnie ciągła* na $[0,1]$, więc istnieje $\delta > 0$ takie, że $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \frac{\varepsilon}{2}$, gdy $|x - \frac{k}{n}| < \delta$. Różnicę między $f$ i jej $n$-tym wielomianem Bernsteina szacujemy następująco:

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n} \Big( f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \qquad (7.2) \\ &\le \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =: S_1(n) + S_2(n)\,, \end{aligned}$$

gdzie

$$S_i(n) = \sum_{k \in A_i} \left| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad i = 1, 2,$$

dla

$$A_1 = \Big\{ k = 0, 1, \ldots, n\colon \Big| x - \frac{k}{n} \Big| < \delta \Big\} \quad \textbf{oraz} \quad A_2 = \Big\{ k = 0, 1, \ldots, n\colon \Big| x - \frac{k}{n} \Big| \ge \delta \Big\}\,.$$

(po prostu dzielimy całą sumę na dwie inne, odpowiednio dobrane). Oszacowanie sumy $S_1(n)$ jest łatwe: gdy $|\frac{k}{n} - x| < \delta$, to $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \frac{\varepsilon}{2}$ i dlatego

$$S_1(n) \le \sum_{k \in A_1} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \overset{\text{(a)}}{=} \frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (7.3)$$

Kluczowy krok to szacowanie sumy $S_2$. Niech $M = \sup_{[0,1]} |f|$. Zauważmy, że

$$\delta \le \Big| x - \frac{k}{n} \Big|, \qquad \text{stąd zaś} \qquad 1 \le \left( \frac{k - nx}{n\delta} \right)^2 \quad \text{dla } k \in A_2.$$

Ponadto, oczywiście $|f(x)-f(\frac{k}{n})|\le |f(x)|+|f(\frac{k}{n})|\le 2M=2\sup|f|$. Dlatego

$$\begin{aligned} S_2(n) &\le 2M\sum_{k\in A_2}\left(\frac{k-nx}{n\delta}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &\le \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2}-2x\frac{k}{n}+x^2\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=S_3(n)\end{aligned}$$

(zwiększamy zakres sumowania z $k\in A_2$ do wszystkich $0\le k\le n$). Ostatnią sumę można łatwo wyrazić przez wielomiany Bernsteina funkcji $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$ i $f_3(x)=x^2$, a następnie obliczyć, korzystając z pomocniczych faktów (a)–(c); prowadzi to do oszacowania

$$\begin{aligned} S_2(n)\le S_3(n) &= \frac{2M}{\delta^2}\Big(B_n(f_3)(x)-2x\cdot B_n(f_2)(x)+x^2B_n(f_1)(x)\Big) \\ &= \frac{2M}{\delta^2}\Big(x^2-\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n}-2x^2+x^2\Big) \\ &= \frac{2M}{\delta^2}\cdot\frac{x(1-x)}{n}\le\frac{M}{2n\delta^2}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

gdyż $x(1-x)\le\frac14$ na $\mathbb{R}$.

Wstawiając oszacowania (7.3) i (7.4) do (7.2), otrzymujemy

$$|f(x)-B_n(f)(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2}<\varepsilon \qquad \text{dla wszystkich } x\in[0,1]$$

i dla $n>n_0:=\big[M/(\varepsilon\delta^2)\big]+1$. To kończy dowód. $\square$

Jedno z zastosowań twierdzenia Weierstrassa zobaczymy nieco później w tym rozdziale, w dowodzie twierdzenia, orzekającego, że każda funkcja ciągła $f\colon P\to\mathbb{R}$ na przedziale $P\subset\mathbb{R}$ jest pochodną pewnej funkcji $F\colon P\to\mathbb{R}$. Jest to jeden z podstawowych faktów, wykorzystywanych w rachunku całkowym.

Podamy teraz dwa niezbyt trudne twierdzenia, ilustrujące związek zbieżności jednostajnej z monotonicznością.

**Twierdzenie 7.17** (pierwsze twierdzenie Dini'ego)**.** *Przypuśćmy, że funkcje $f, f_n\colon K\to\mathbb{R}$, gdzie $n\in\mathbb{N}$ i $K\subset\mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym, są ciągłe. Jeśli $f_n\to f$ punktowo na $K$, a ponadto*

$$f_1\le f_2\le f_3\le\ldots\le f_n\le\ldots \qquad \textit{na } K,$$

*to wówczas $f_n\rightrightarrows f$ na $K$*

Dowód. Przypuśćmy, że zbieżność $f_n\to f$ nie jest jednostajna. Istnieje wtedy $\varepsilon>0$ takie, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ znajdziemy $m>n$ i punkt $x_m\in K$, dla których

$$|f(x_m)-f_m(x_m)|=f(x_m)-f(x_m)\ge\varepsilon>0\,. \tag{7.5}$$

Opuszczając moduł, skorzystaliśmy z założenia o monotoniczności ciągu $(f_m)$.

Zbiór $K$ jest zwarty, więc ciąg $(x_m)$ ma podciąg zbieżny do pewnego $x\in K$. Przechodząc do tego podciągu, możemy bez zmniejszenia ogólności rozważań założyć, że po prostu $x_m\to x$ dla $m\to\infty$. Weźmy teraz dowolne $k\in\mathbb{N}$. Dla $m>k$ zachodzą nierówności

$$f_k(x_m)\le f_m(x_m)\overset{(7.5)}{\le} f(x_m)-\varepsilon$$

i dlatego, dzięki ciągłości $f$,

$$f_k(x) = \lim_{m\to\infty} f_k(x_m) \le \lim_{m\to\infty} f(x_m) - \varepsilon = f(x) - \varepsilon.$$

To jednak przeczy punktowej zbieżności $f_k \to f$: granica ciągu liczbowego $(f_k(x))$ powinna być równa $f(x)$. □

**Twierdzenie 7.18** (drugie twierdzenie Dini'ego)**.** *Jeśli funkcje $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ są niemalejące i ciąg $(f_n)$ jest punktowo zbieżny na $[a,b]$ do funkcji ciągłej $f$, to wówczas $f_n \rightrightarrows f$.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ i $\eta > 0$. Ponieważ na mocy Twierdzenia 5.57 $f$ jest jednostajnie ciągła na $[a,b]$, więc istnieje $\delta > 0$ takie, że $|f(x) - f(y)| < \eta$, gdy $|x-y| < \delta$. Podzielmy $[a,b]$ na $N$ przedziałów o równych długościach $\frac{b-a}{N} < \delta$. Niech $x_0, x_1, \ldots, x_N$ oznaczają końce tych przedziałów. Wybierzmy teraz $n_0$ tak, aby

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| < \eta \qquad \text{dla wszystkich } n > n_0 \text{ i } k = 0,1,\ldots,N. \tag{7.6}$$

Niech $x \in [a,b]$. Wtedy $x \in [x_k, x_{k+1}]$ dla pewnego $k = 0,1,\ldots,N-1$. Funkcja $f$ jest niemalejąca jako ciągu granica funkcji niemalejących, więc dzięki (7.6) otrzymujemy dla $n > n_0$ nierówności

$$\underbrace{f(x_k) \le f(x) \le f(x_{k+1})}_{\text{monotoniczność } f}, \qquad f(x_k) - \eta \overset{(7.6)}{<} \underbrace{f_n(x_k) \le f_n(x) \le f_n(x_{k+1})}_{\text{monotoniczność } f_n} \overset{(7.6)}{<} f(x_{k+1}) + \eta\,.$$

Stąd już wynika, że zarówno $f(x)$, jak i $f_n(x)$, należą do przedziału $I$ o końcach $f(x_k) - \eta$ i $f(x_{k+1}) + \eta$. Odstępy między punktami $x_k$ są mniejsze od $\delta$, więc dzięki doborowi $\delta$ do $\eta$ długość przedziału $I$ jest mniejsza od $3\eta$. Biorąc teraz $\eta = \varepsilon/3$ otrzymujemy

$$|f(x) - f_n(x)| < 3\eta = \varepsilon \qquad \text{dla wszystkich } x \in [a,b] \text{ i } n > n_0,$$

co kończy dowód. □

Zauważmy, że w dowodzie *nie było potrzebne* założenie o ciągłości $f_n$. Istotna jest oczywiście ciągłość funkcji $f$ oraz monotoniczność wszystkich rozpatrywanych funkcji.

## 7.4 Twierdzenie o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych

Udowodnimy teraz ważne twierdzenie, które w wielu sytuacjach pozwala wnioskować, że funkcja, określona jako granica ciągu (lub suma szeregu) funkcyjnego, ma pochodną.

### 7.4.1 Przypadek rzeczywisty

**Twierdzenie 7.19.** *Załóżmy, że $f_n\colon \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $n = 1,2,\ldots$, są różniczkowalne. Jeśli ciąg $f_n' \rightrightarrows g$ na $[a,b]$, a ponadto istnieje taki punkt $x_0 \in [a,b]$, że ciąg $\big(f_n(x_0)\big)$ jest zbieżny, to wówczas:*

*(a) Ciąg $f_n$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$;*

*(b) Funkcja $f$ jest różniczkowalna na $[a,b]$ i $f' = g$.*

Dowód. Najpierw sprawdzimy, że ciąg $(f_n)$ spełnia na przedziale $[a,b]$ jednostajny warunek Cauchy'ego.

**Lemat 7.20.** *Niech $\Delta_{n,m} = f_n - f_m \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że spełnione są założenia Twierdzenia 7.19. Wówczas dla każdej liczby $\eta > 0$ istnieje takie $n_0 \in N$, że dla wszystkich $n,m > n_0$ i wszystkich $x,y \in [a,b]$ zachodzi nierówność*

$$|\Delta_{n,m}(x) - \Delta_{n,m}(y)| < \eta |x-y|\,.$$

Dowód Lematu 7.20. Ustalmy $\eta > 0$. Funkcja $\Delta_{n,m}$ jest różniczkowalna na $[a,b]$ i $\Delta'_{n,m} = f'_n - f'_m$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że

$$|\Delta_{n,m}(x) - \Delta_{n,m}(y)| = |f'_n(\theta_{x,y}) - f'_m(\theta_{x,y})| \cdot |x-y| \qquad \text{dla pewnego } \theta_{x,y} \in (x,y)$$

(zakładamy bez zmiany ogólności, że $x < y$). Jednak ciąg $(f'_n)$ jest jednostajnie zbieżny, a więc na mocy Stwierdzenia 7.12 istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \eta \qquad \text{dla wszystkich } t \in [a,b] \text{ i } m,n > n_0.$$

Wstawiając to oszacowanie do poprzedniego, kończymy dowód lematu. □

Przejdźmy teraz do zasadniczej części dowodu twierdzenia.

*Krok 1. Zbieżność ciągu* $(f_n)$. Niech $\varepsilon > 0$ i $\eta = \varepsilon/2(b-a)$. Dobierzmy do $\eta$ liczbę $n_0$ z Lematu 7.20. Z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\le |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \big|f_n(x) - f_m(x) - \big(f_n(x_0) - f_m(x_0)\big)\big| \\
&= |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \big|\Delta_{n,m}(x) - \Delta_{n,m}(x_0)\big| \\
&< |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \\
&\le |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned}$$

Pierwszy składnik jest niegroźny: ciąg $(f_n(x_0))$ jest zbieżny, a zatem istnieje $n_1$ takie, że $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich $m,n > n_1$. Dlatego dla $m,n > \max(n_0,n_1)$ i dla wszystkich $x \in [a,b]$ zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$$

co oznacza, że ciąg $(f_n)$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, a więc na mocy Stwierdzenia 7.12 jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, która oczywiście jest ciągła (patrz Twierdzenie $C0 - granica$).

*Krok 2. Różniczkowalność funkcji* $f$. Wykażemy, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x) \qquad \text{dla } x \in [a,b].$$

Ustalmy w tym celu $x \in [a,b]$ i liczby $\eta, \varepsilon > 0$; znajdziemy $\delta > 0$ takie, że

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| < \varepsilon \qquad \text{dla } |h| < \delta. \tag{7.7}$$

Przekształcimy prawą stronę nierówności (7.7), próbując przybliżyć $f$ przez $f_n$ i $g$ przez $f_n'$. Mamy

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right| \\
&\quad = \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f_n(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-g(x)\right| \\
&\quad \le \left|\frac{f(x+h)-f_n(x+h)-\big(f(x)-f_n(x)\big)}{h}\right| + \left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-g(x)\right| \\
&\quad =: A+B\,.
\end{aligned}$$

Każdy ze składników oszacujemy osobno.

*Oszacowanie składnika* $A$. Z Lematu 7.20 wynika, że dla $m,n>n_0=n_0(\eta)$ jest

$$|f_m(x+h)-f_n(x+h)-(f_m(x)-f_n(x))| = |\Delta_{m,n}(x+h)-\Delta_{n,m}(x)| < \eta|h|\,.$$

Ponieważ $f_m(t)\to f(t)$ dla każdego $t\in[a,b]$, więc przechodząc do granicy $m\to\infty$, a następnie dzieląc obie strony przez $|h|$ otrzymujemy

$$A=\left|\frac{f(x+h)-f_n(x+h)-\big(f(x)-f_n(x)\big)}{h}\right| \le \eta$$

dla wszystkich $|h|>0$ i $n>n_0$.

*Oszacowanie składnika* $B$. Z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned}
B=\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-g(x)\right| &= \left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f_n'(x)+f_n'(x)-g(x)\right| \\
&\le \left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f_n'(x)\right| + \big|f_n'(x)-g(x)\big| < \eta+\eta=2\eta\,,
\end{aligned}$$

o ile $n$ jest ustalone i dostatecznie duże, a $|h|$ dostatecznie małe. Aby się o tym przekonać, ustalmy najpierw liczbę $n>n_0$ tak, aby $|f_n'(x)-g(x)|<\eta$ dla wszystkich $x\in[a,b]$; możemy to zrobić, gdyż $f_n'\rightrightarrows g$. Następnie, korzystając z różniczkowalności $f_n$ w punkcie $x$, wybierzmy $\delta>0$ takie, by

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f_n'(x)\right|<\eta \qquad \text{dla } |h|<\delta.$$

Wtedy istotnie $B<2\eta$.

Ostatecznie, kładąc $\eta=\varepsilon/3$ i używając obu oszacowań, otrzymujemy dla $0<|h|<\delta$ nierówność

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right| \le A+B<\eta+2\eta=3\eta=\varepsilon\,.$$

Zachodzi więc warunek (7.7). To kończy dowód całego twierdzenia. □

Oczywiście, odpowiednik tego twierdzenia zachodzi dla szeregów funkcyjnych: to tylko kwestia zmiany języka.

**Wniosek 7.21.** *Załóżmy, że $f_n\colon \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, są różniczkowalne. Jeśli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ jest zbieżny jednostajnie na $[a,b]$ do funkcji $g$, a ponadto istnieje taki punkt $x_0 \in [a,b]$, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ jest zbieżny, to wówczas:*

*(a) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$;*

*(b) Funkcja $f$ jest różniczkowalna na $[a,b]$ i $f' = g$.*

**Przykład 7.22.** Niech $g(x) = 1/(1-x)$, gdzie $|x| \le q < 1$. Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego,

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n .$$

Powyższy szereg jest na przedziale $[-q,q]$ zbieżny jednostajnie. To wynika z kryterium Weierstrassa (patrz Stwierdzenie 7.13), gdyż $|x^n| \le q^n$ na $[-q,q]$, a $\sum q^n$ jest zbieżnym szeregiem liczb dodatnich.

Połóżmy $f_n(x) = x^{n+1}/(n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$, $x \in [-q,q]$. Wtedy $f_n'(x) = x^n$. Stwierdziliśmy już, że szereg $\sum f_n' = \sum x^n$ jest na $[-q,q]$ zbieżny jednostajnie. Szereg $\sum f_n$ jest zbieżny (co najmniej) w jednym punkcie: dla $x_0 = 0$ wszystkie składniki są zerami. Dlatego, na mocy Wniosku 7.21,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{dla wszystkich } |x| \le q.$$

Innymi słowy, nieskończoną sumę $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ wolno na tym przedziale różniczkować tak samo, jak sumę skończoną: pochodna sumy jest sumą pochodnych. Należy jednak pamiętać, że **bez założenia zbieżności jednostajnej szeregu pochodnych** to nie musi być prawdą! Przykład takiej sytuacji zobaczymy w następnym podrozdziale.

Zauważmy jeszcze, że funkcje $f(x) = \sum f_n(x) = \sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ oraz $\varphi(x) = -\ln(1-x)$ mają na przedziale $[-q,q]$ tę samą pochodną, równą $1/(1-x)$. Dlatego $(f-\varphi)' = 0$ na $[-q,q]$, więc $f - \varphi = \mathrm{const} = f(0) - \varphi(0) = 0 - 0 = 0$. Ostatecznie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \qquad \text{dla wszystkich } |x| < 1,$$

gdyż całe rozumowanie można przeprowadzić, używając *dowolnej* liczby $q < 1$. $\square$

**Przykład 7.23.** Niech $f_n(x) = n^{-1} \operatorname{arc\,tg}(x/n)$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Dla $x_0 = 0$ mamy $f_n(x_0) = 0$ dla każdego $n$, więc szereg funkcyjny $\sum f_n$ jest zbieżny w $x_0$. Pochodna $f_n'$ spełnia nierówności

$$0 < f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + (x/n)^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2 + x^2} \le \frac{1}{n^2} .$$

Ponieważ szereg liczbowy $\sum 1/n^2$ jest zbieżny, więc z kryterium Weierstrassa wynika, że szereg $\sum f_n'$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dlatego szereg

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n}$$

jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[a, b] \in \mathbb{R}$ i dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} .$$

**Uwaga 7.24.** Jeśli ciąg (lub szereg) funkcyjny jest zbieżny jednostajnie na wszystkich zwartych podzbiorach pewnego ustalonego podzbioru $P \subset \mathbb{R}$ (bądź $P \subset \mathbb{C}$), to mówimy, że jest *zbieżny niemal jednostajnie na* $P$. W ostatnim przykładzie mieliśmy do czynienia właśnie z taką sytuacją.

### 7.4.2 Przypadek zespolony

Uważny Czytelnik spostrzegł być może, że w dowodzie Twierdzenia 7.19 posłużyliśmy się twierdzeniem Lagrange'a o wartości średniej, *które nie zachodzi dla funkcji o wartościach zespolonych*, patrz Przykład 6.41. Dlatego zespolona wersja twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych wymaga nieco innego dowodu, który pokrótce naszkicujemy.

Ustalmy najpierw terminologię.

**Definicja 7.25.** Zbiór $Z \subset C$ nazywa się *domknięty* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu zbieżnego $(z_n) \subset Z$ jest $z = \lim z_n \in Z$.

Przykład: koło domknięte $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \le R\}$ jest zbiorem domkniętym (nierówności nieostre zachowują się po przejściu granicznym), a koło otwarte $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$ nie jest zbiorem domknietym (nierówności ostre mogą po przejściu granicznym zmienić się w nieostre).

**Definicja 7.26.** Zbiór $Z \subset C$ nazywa się *ograniczony* wtedy i tylko wtedy, gdy $Z$ zawiera się w pewnym kole.

**Twierdzenie 7.27.** *Załóżmy, że $W$ jest domkniętym, wypukłym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{C}$, a funkcje $f_n \colon \mathbb{C} \supset W \to \mathbb{C}$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, są różniczkowalne (w sensie zespolonym). Jeśli ciąg $f_n' \rightrightarrows g$ na $W$, a ponadto istnieje taki punkt $z_0 \in W$, że ciąg $\big(f_n(z_0)\big)$ jest zbieżny, to wówczas:*

*(a) Ciąg $f_n$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej $f \colon W \to \mathbb{R}$;*

*(b) Funkcja $f$ jest różniczkowalna na $W$ i $f' = g$.*

**Szkic dowodu.** Jedynym miejscem w dowodzie Twierdzenia 7.19, gdzie skorzystaliśmy z faktu, że mamy do czynienia z funkcjami zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych, był Lemat 7.20 (w jego dowodzie skorzystaliśmy z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej). Podamy "zespolony" odpowiednik tego fragmentu rozumowania. Sformułowanie zespolonej wersji twierdzenia o wartości średniej poprzedzimy technicznym lematem.

**Lemat 7.28.** *Niech $\varphi, \psi \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ będą ciągłe na $[0, 1]$ i różniczkowalne w $(0, 1)$. Jeśli $a > 1$, to funkcja*

$$\Phi_a(t) = \big(\varphi^2(t) + \psi^2(t)\big)^{a/2}$$

*jest różniczkowalna w $(0, 1)$ i zachodzi nierówność*

$$|\Phi_a'(t)| \le a \left(\varphi^2(t) + \psi^2(t)\right)^{(a-1)/2} \cdot \Big(\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2\Big)^{1/2} .$$

Dowód. *Przypadek 1.* Jeśli $\varphi^2(t)+\psi^2(t)>0$, to różniczkowalność $\Phi_a$ w punkcie $t$ wynika z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej. Ponieważ

$$|\varphi\varphi'+\psi\psi'|\le\left(\varphi^2+\psi^2\right)^{1/2}\left((\varphi')^2+(\psi')^2\right)^{1/2}$$

z nierówności Schwarza, więc mamy w takim punkcie

$$\begin{aligned}|\Phi_a'| &= \frac{a}{2}\left(\varphi^2+\psi^2\right)^{\frac{a}{2}-1}\cdot 2|\varphi\varphi'+\psi\psi'|\\ &\le a\left(\varphi^2+\psi^2\right)^{\frac{a}{2}-1}\left(\varphi^2+\psi^2\right)^{1/2}\left((\varphi')^2+(\psi')^2\right)^{1/2}\\ &= a\left(\varphi^2+\psi^2\right)^{(a-1)/2}\cdot\left(\left(\varphi'\right)^2+\left(\psi'\right)^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

To jest szukana nierówność.

*Przypadek 2.* Jeśli $\varphi^2(t)+\psi^2(t)=0$, to $\Phi_a'(t)=0$. Wykażemy to, posługując się definicją pochodnej. W takim punkcie $t$ jest $\Phi_a(t)=0$, a ponadto

$$(\varphi^2+\psi^2)^{1/2}\le|\varphi|+|\psi|,$$

więc dla wszystkich dostatecznie małych $h$ zachodzi nierówność

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Phi_a(t+h)-\Phi_a(t)}{h}\right| &= \left|\frac{\Phi_a(t+h)}{h}\right|\\ &\le \frac{|\varphi(t+h)|+|\psi(t+h)|}{|h|}\cdot\left(\varphi^2(t+h)+\psi^2(t+h)\right)^{(a-1)/2}\\ &\le (|\varphi'(t)|+|\psi'(t)|+2)\cdot\left(\varphi^2(t+h)+\psi^2(t+h)\right)^{(a-1)/2}.\end{aligned}$$

Pisząc ostatnią linijkę, skorzystaliśmy z nierówności $|\varphi(t+h)|/|h|<|\varphi'(t)|+1$, która zachodzi dla wszystkich małych $|h|$, oraz z analogicznej nierówności dla $\psi$. Przechodząc do granicy $h\to0$, otrzymujemy $\Phi_a'(t)=0$, gdyż czynnik

$$\left(\varphi^2(t+h)+\psi^2(t+h)\right)^{(a-1)/2}\to0,$$

bowiem $\varphi^2(t+h)+\psi^2(t+h)\to\varphi^2(t)+\psi^2(t)=0$ dla $h\to0$, a mamy $a>1$. □

**Uwaga:** w ostatnim kroku jest istotne, że $a>1$!

**Wniosek 7.29.** *Niech $\varphi,\psi\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ będą ciągłe na $[0,1]$ i różniczkowalne w $(0,1)$. Jeśli $\varphi(0)=\psi(0)=0$ oraz $h(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ dla $t\in[0,1]$, to wówczas*

$$|h(1)|\le\sup_{t\in(0,1)}|h'(t)|\,.$$

Dowód. Przyjmijmy takie oznaczenia, jak w poprzednim lemacie. Ponieważ $\psi(0)=\varphi(0)=0$, więc

$$|h(1)|^a=|\Phi_a(1)|=|\Phi_a(1)-\Phi_a(0)|=|\Phi_a'(c)|$$

dla pewnego $c\in(0,1)$. Wiemy jednak, że

$$\begin{aligned}|\Phi_a'(c)| &\le a\left(\varphi^2(c)+\psi^2(c)\right)^{(a-1)/2}\cdot\left(\left(\varphi'(c)\right)^2+\left(\psi'(c)\right)^2\right)^{1/2}\\ &\le a\cdot\left(\sup_{t\in[0,1]}|h(t)|\right)^{(a-1)/2}\cdot\sup_{t\in(0,1)}|h'(t)|\,.\end{aligned}$$

Dlatego

$$|h(1)|^a \le a \cdot \left(\sup_{t\in[0,1]} |h(t)|\right)^{(a-1)/2} \cdot \sup_{t\in(0,1)} |h'(t)|\,;$$

przechodząc do granicy $a \to 1^+$, otrzymujemy tezę wniosku. $\square$

**Wniosek 7.30 (twierdzenie o wartości średniej, wariant zespolony).** *Załóżmy, że $W \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem wypukłym, a $H\colon W \to \mathbb{C}$ funkcją różniczkowalną na $W$. Wówczas dla wszystkich punktów $z, w \in W$ zachodzi nierówność*

$$|H(z) - H(w)| \le |z - w| \cdot \sup_{\zeta\in W} |H'(\zeta)|.$$

Dowód. Gdy $w = z$, nierówność jest banalna: $0 \le 0$. Załóżmy, że $z \neq w$. Połóżmy

$$h(t) = H(w + t(z - w)) - H(w) \quad \text{dla } t \in [0, 1], \qquad \varphi = \operatorname{Re} h, \quad \psi = \operatorname{Im} h\,.$$

Wtedy $\varphi, \psi$ i $h$ spełniają wszystkie założenia poprzedniego wniosku. Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} |H(z) - H(w)| = |h(1)| &\le \sup_{t\in(0,1)} |h'(t)| = \sup_{t\in(0,1)} |H'(w + t(z - w))| \cdot |z - w| \\ &\le |z - w| \sup_{\zeta\in W} |H'(\zeta)|\,, \end{aligned}$$

gdyż $I = \{z + t(w - z)\colon t \in [0, 1]\} \subset W$. $\square$

**Wniosek 7.31.** *Załóżmy, że spełnione są założenia Twierdzenia 7.27. Niech $\Delta_{n,m} = f_n - f_m\colon W \to \mathbb{C}$. Wówczas dla każdej liczby $\eta > 0$ istnieje takie $n_0 \in N$, że dla wszystkich $n, m > n_0$ i wszystkich $z, w \in W$ zachodzi nierówność*

$$|\Delta_{n,m}(z) - \Delta_{n,m}(w)| < \eta |z - w|\,.$$

Dowód Wniosku 7.31 (szkic). Stosujemy poprzedni wniosek do funkcji $H = \Delta_{n,m}$. Wtedy $H' = \Delta'_{n,m} = f'_n - f'_m$. Otrzymujemy

$$|\Delta_{n,m}(z) - \Delta_{n,m}(w)| \le |z - w| \cdot \sup_{\zeta\in W} |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)|\,.$$

Ponieważ ciąg $(f'_n)$ jest jednostajnie zbieżny na $W$, więc dla ustalonego $\eta$, posługując się jednostajnym warunkiem Cauchy'ego, znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sup_{\zeta\in W} |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)| < \eta \qquad \text{dla wszystkich } m, n > n_0.$$

To kończy dowód wniosku. $\square$

Dalszy ciąg dowodu twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych w przypadku zespolonym jest, począwszy od tego miejsca, taki sam, jak w przypadku rzeczywistym. Czytelnik, zainteresowany rozumieniem teorii, zechce samodzielnie sprawdzić wszystkie szczegóły.

### 7.4.3 Istnienie funkcji pierwotnej

Udowodnimy teraz zapowiedziane wcześniej twierdzenie: każda funkcja ciągła jest pochodną pewnej funkcji. Najpierw wprowadzimy tradycyjną terminologię.

**Definicja 7.32.** Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, a $f\colon P \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją. Funkcja różniczkowalna $F\colon P \to \mathbb{R}$ nazywa się *funkcją pierwotną* $f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in P$.

**Stwierdzenie 7.33.** *Jeśli $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, a $F_1, F_2\colon P \to \mathbb{R}$ są funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji $f\colon P \to \mathbb{R}$, to wówczas $F_1 - F_2$ jest funkcją stałą na $P$.*

Dowód. Wprost z definicji wynika, że $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$. Zatem, na mocy Wniosku 6.43, funkcja $F_1 - F_2$ jest stała na $P$. $\square$

**Twierdzenie 7.34.** *Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie (dowolnym) przedziałem Każda funkcja ciągła $f\colon P \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną.*

Dowód. Przedstawmy przedział $P$ jako sumę wstępującego ciągu przedziałów domkniętych $[a_k, b_k]$, tzn. niech

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]\,, \qquad \text{gdzie} \quad a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots, \quad b_1 \le b_2 \le b_3 \ldots .$$

Bez zmniejszenia ogólności założymy, że $0$ jest punktem wspólnym wszystkich przedziałów $[a_k, b_k]$. Z Twierdzenia 7.15 wynika, że istnieje ciąg wielomianów $P_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taki, że

$$\sup_{x\in[a_k,b_k]} |P_k(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{7.8}$$

Dla każdego $k$ znajdziemy wielomian $Q_k$ taki, że $Q_k'(x) = P_k(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $Q_k(0) = 0$. Istotnie, jeśli $P_k(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, to podane warunki spełnia

$$Q_k(x) = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{a_n x^n}{n}\,.$$

Ustalmy teraz $k$. Zauważmy, że ciąg liczbowy $(Q_n(0))_{n\ge k}$ jest zbieżny (bo składa się z samych zer), natomiast wobec (7.8) ciąg $(P_n)_{n\ge k}$, tzn. ciąg pochodnych wielomianów $Q_n$, jest zbieżny jednostajnie do $f$ na $[a_k, b_k]$. Spełnione są więc założenia Twierdzenia 7.19; wynika zeń, że ciąg $(Q_n)_{n\ge k}$ jest zbieżny jednostajnie na $[a_k, b_k]$ do funkcji $F_k\colon [a_k, b_k] \to \mathbb{R}$ takiej, że $F_k' = f$ na $[a_k, b_k]$ i $F_k(0) = \lim_{n\to\infty} Q_n(0) = 0$.

Zauważmy, że dla $m > k$ uzyskane w ten sposób funkcje $F_m$ i $F_k$ pokrywają się na $[a_m, b_m] \cap [a_k, b_k] = [a_k, b_k]$. Istotnie,

$$F_m'(x) - F_k'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \text{dla } x \in [a_k, b_k],$$

więc $F_m - F_k = \text{const}$, ale $F_m(0) = F_k(0) = 0$. Dlatego $F_m = F_k$ na $[a_k, b_k]$. Można więc określić funkcję $F\colon P = \bigcup [a_k, b_k] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(x) := F_k(x) \qquad \text{dla } x \in [a_k, b_k].$$

Sprawdziliśmy, że prawa strona nie zależy od wyboru liczby $k$, a zatem definicja jest poprawna. Ponieważ dla wszystkich $k$ jest $F_k' = f$ na $[a_k, b_k]$, więc $F' = f$. $\square$

### 7.4.4 Inne przykłady

Podamy teraz przykłady dwóch funkcji ciągłych. Każda z nich jest określona jako suma pewnego szeregu funkcyjnego. Jedna z nich nie ma pochodnej w żadnym punkcie, druga natomiast ma pochodne wszystkich rzędów.

**Przykład 7.35 (van der Waerden; funkcja ciągła nigdzie nieróżniczkowalna).** Niech

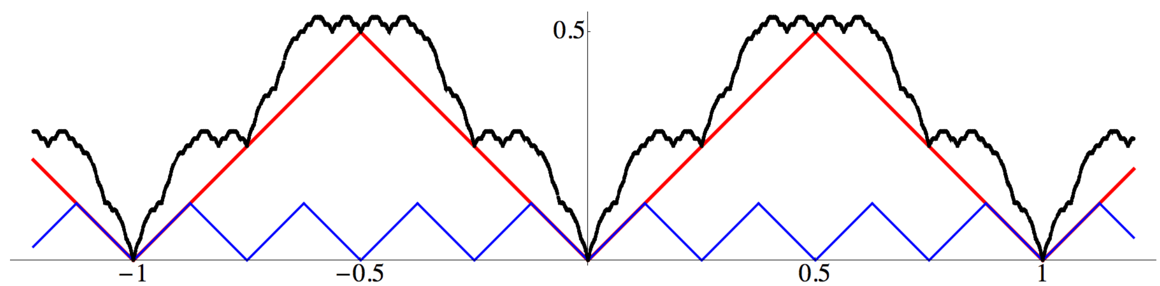
$$d(x) = \inf\{|x-m|\colon m\in\mathbb{Z}\}\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

Innymi słowy, $d(x)$ jest odległością $x$ od najbliższej liczby całkowitej. Można sprawdzić, że $d(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ dla $x\in[0,1]$ i $d$ jest ciągłą, kawałkami liniową, funkcją okresową o okresie 1. Pochodna funkcji $d$ istnieje w punktach $x\neq k/2$, gdzie $z\in\mathbb{Z}$, i jest w nich równa $\pm1$. Wykres funkcji $d$ jest przedstawiony na rysunku. Mamy $\inf d = 0$, $\sup d = \frac{1}{2}$.

Połóżmy

$$d_n(x) = \frac{d(4^n x)}{4^n}\,, \qquad W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x)\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

Ponieważ $|d_n(x)| = |4^{-n}d(4^n x)| \le 4^{-n}\cdot\frac{1}{2}$, a szereg geometryczny $\sum 4^{-n}$ jest zbieżny, więc z kryterium Weierstrassa wynika, że szereg definiujący funkcję $W$ jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny na $\mathbb{R}$. Dlatego $W\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.




Funkcje $d = d_0$ (środkowy zygzak), $d_1$ (drobniejszy, dolny zygzak) oraz $d_0+d_1+\cdots+d_7$ (nieregularna, czarna krzywa). W żargonie Mathematiki użyto definicji `d[x_]:=Abs[x-Round[x]]`.

Wykażemy, że $W$ nie ma skończonej pochodnej w żadnym punkcie. Ustalmy dowolne $x\in\mathbb{R}$ i $m\in\mathbb{N}$. Funkcja $4^{-m}d(4^m x)$ jest liniowa na przedziałach długości $4^{-m}\cdot\frac{1}{2}$; wybierzmy taki z nich, do którego należy punkt $x$. Dobierzmy teraz liczbę $h_m$ tak, żeby spełnione były dwa warunki:

- $|h_m| = 4^{-m-1}$;
- W przedziale $I$ o końcach $x$ i $x+h_m$ funkcja $d_m(x) = 4^{-m}d(4^m x)$ jest liniowa.

Obliczymy teraz iloraz różnicowy $\big(W(x+h_m) - W(x)\big)/h_m$.

Otóż, $d_m(x+h_m) - d_m(x) = \pm h_m$ dzięki doborowi $h_m$ do $x$. Podobnie, dla wszystkich $n<m$ jest $d_n(x+h_m) - d_n(x) = \pm h_m$, gdyż dla $n<m$ funkcja $d_n$ jest liniowa na przedziale $I$, na którym liniowa jest funkcja $d_m$. Dlatego

$$\frac{d_n(x+h_m) - d_n(x)}{h_m} = \pm1\,, \qquad n=0,1,\ldots,m. \tag{7.9}$$

Natomiast dla $n > m$ funkcja $d_n$ ma okres $4^-n$. Liczba $|h_m| = 4^{-m-1} = 4^{-n} \cdot 4^{n-m-1}$ jest wtedy wielokrotnością $4^{-n}$, więc także jest okresem $d_n$. Dlatego w tym przypadku $d_n(x+h_m) = d_n(x)$. Zatem

$$\frac{d_n(x+h_m) - d_n(x)}{h_m} = 0\,, \qquad n = m+1,\, m+2,\, m+3,\, \ldots. \tag{7.10}$$

Z bezwzględnej zbieżności szeregu definiującego $W(x)$ wynika, że

$$\frac{W(x+h_m) - W(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(x+h_m) - d_n(x)}{h_m} \overset{(7.10)}{=} \sum_{n=0}^{m} \frac{d_n(x+h_m) - d_n(x)}{h_m} \overset{(7.9)}{=} \sum_{n=0}^{m} \pm 1\,.$$

Jednak *suma parzystej liczby składników* $\pm 1$ *jest parzystą liczbą całkowitą, a suma nieparzystej liczby* $\pm 1$ *jest nieparzystą liczbą całkowitą*. Dlatego ciąg $\bigl(W(x+h_m) - W(x)\bigr)/h_m$ ma na przemian wyrazy parzyste i nieparzyste i z pewnością nie spełnia warunku Cauchy'ego, a więc nie może być zbieżny do granicy skończonej. □

**Przykład 7.36.** Niech[3]

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 t)\,, \qquad t > 0\,. \tag{7.11}$$

Wówczas funkcja $f$ ma na $(0, \infty)$ ciągłe pochodne wszystkich rzędów. Wykażemy przez indukcję, że

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k n^{2k} \exp(-n^2 t), \qquad t > 0\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7.12}$$

Niech $0 < \varepsilon < M < \infty$ będą dowolne. Wystarczy sprawdzić, że wzór (7.12) zachodzi na $[\varepsilon, M]$. Dla $k = 0$ mamy na tym przedziale $0 < \exp(-n^2 t) \le \bigl(e^{-\varepsilon}\bigr)^n = q^n$. Liczba $q = e^{-\varepsilon} \in (0,1)$, więc na mocy kryterium Weierstrassa szereg (7.12) jest dla $k = 0$ jednostajnie zbieżny na $[\varepsilon, M]$, a jego suma $f$ jest funkcją ciągłą.

Załóżmy teraz, że (7.12) zachodzi dla pewnej liczby $k$. Różniczkując kolejno składniki prawej strony, otrzymujemy szereg o wyrazach

$$\frac{d}{dt}\Bigl((-1)^k n^{2k} \exp(-n^2 t)\Bigr) = (-1)^{k+1} n^{2(k+1)} \exp(-n^2 t)\,. \tag{7.13}$$

Na przedziale $[\varepsilon, M]$ jest

$$\left| \frac{d}{dt}\Bigl((-1)^k n^{2k} \exp(-n^2 t)\Bigr) \right| = n^{2(k+1)} \exp(-n^2 t) \le n^{2(k+1)} \bigl(e^{-\varepsilon}\bigr)^n$$

i dlatego szereg zbudowany ze składników (7.13), tzn. pochodnych składników szeregu (7.12), jest, na mocy kryterium Weierstrassa[4], jednostajnie zbieżny na $[\varepsilon, M]$. Sam szereg (7.12) też jest zbieżny na całym przedziale $[\varepsilon, M]$; to jest założenie indukcyjne. Z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów i szeregów funkcyjnych wynika teraz, że wzór (7.12) zachodzi także dla liczby $k+1$.

Na mocy zasady indukcji zupełnej, (7.12) zachodzi dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. □

[3] W późniejszym okresie studiów matematycznych Czytelnik zobaczy, że podobne szeregi pojawiają się we wzorach na rozwiązania równań różniczkowych, opisujących proces rozchodzenia się ciepła.

[4] Czytelnik zechce przypomnieć sobie Przykłady 4.15–4.16, gdzie była mowa o zbieżności szeregów liczbowych $\sum n^k q^n$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ jest ustalone, a $q \in (0,1)$.

## 7.5 Twierdzenie Arzeli–Ascoliego

Udowodnimy w tym podrozdziale ważne twierdzenie, określające warunki konieczne i dostateczne na to, aby z *każdego* ciągu funkcyjnego, zawartego w pewnej rodzinie funkcji ciągłych $\mathscr{F}$ można było wybrać podciąg jednostajnie zbieżny, którego granica też należy do rodziny $\mathscr{F}$. Najpierw wprowadzimy kilka definicji.

**Definicja 7.37** ($\delta$-sieć)**.** Niech $\delta > 0$. Powiemy, że podzbiór $A_1$ zbioru $A \subset \mathbb{R}$ *jest $\delta$-siecią* w $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in A$ istnieje $y \in A_1$ takie, że $|x - y| < \delta$.

**Przykład 7.38.** Zbiór $A_1 = \{k/2 \colon k \in \mathbb{Z}\}$ jest $\delta$-siecią w $A = \mathbb{R}$ dla każdej liczby $\delta > \frac{1}{4}$. Zbiór liczb wymiernych $A_1 = \mathbb{Q}$ jest $\delta$-siecią w $A = \mathbb{R}$ dla każdej liczby $\delta > 0$.

**Definicja 7.39.** Zbiór niepusty $A \subset \mathbb{R}$ nazywa się *całkowicie ograniczony* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\delta > 0$ w $A$ istnieje *skończona* $\delta$-sieć.

**Lemat 7.40.** *Każdy niepusty zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}$ jest całkowicie ograniczony.*

Dowód. Przypuśćmy, że lemat jest fałszywy. Niech $K \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem zwartym, w którym dla pewnego $\delta > 0$ nie ma skończonej $\delta$-sieci. Weźmy dowolne $x_1 \in K$. Zbiór $\{x_1\}$ nie jest $\delta$-siecią w $K$, więc istnieje $x_2 \in K$ takie, że $|x_2 - x_1| \geq \delta$. Zbiór $\{x_1, x_2\}$ nie jest $\delta$-siecią w $K$, więc istnieje $x_3 \in K$ takie, że $|x_3 - x_j| \geq \delta$ dla $j = 1, 2$. Postępując dalej w taki sposób, znajdziemy ciąg punktów $(x_n) \subset K$ taki, że $|x_i - x_j| \geq \delta$ dla wszystkich $i \neq j$. Żaden podciąg ciągu $(x_n)$ nie spełnia warunku Cauchy'ego, więc żaden podciąg ciągu $(x_n)$ nie jest zbieżny. To jest sprzeczność: każdy ciąg $(x_n) \subset K$ powinien zawierać podciąg zbieżny, gdyż $K$ jest zwarty. □

Wprowadzimy teraz kilka określeń, opisujących własności rodzin funkcji. Zanim podamy twierdzenie Arzeli–Ascoliego, zilustrujemy te własności prostymi przykładami.

**Definicja 7.41.** Rodzina $\mathscr{F} \subset C(K)$ nazywa się *zwarta* wtedy i tylko wtedy, gdy z dowolnego ciągu funkcji $(f_n) \subset \mathscr{F}$ można wybrać podciąg $(f_{n_j})$ zbieżny jednostajnie na $K$ do pewnej funkcji $f \in \mathscr{F}$.

Okazuje się, że jeśli $K \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym, to zwartość dowolnej rodziny funkcji $\mathscr{F} \subset C(K)$ można dość łatwo scharakteryzować. Kluczowym pojęciem, służącym do tego celu, jest *równociągłość*.

**Definicja 7.42.** Powiemy, że rodzina $\mathscr{F} \subset C(K)$ jest *równociągła*[5] wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdej funkcji $f \in \mathscr{F}$ i wszystkich punktów $x, y \in K$, $|x - y| < \delta$, zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Czytelnik zechce zwrócić uwagę na *kolejność kwantyfikatorów* w definicji. Chodzi o to, że liczbę $\delta > 0$ można wybrać *jednocześnie* dla wszystkich funkcji $f \in \mathscr{F}$.

**Przykład 7.43.** Rodzina $\mathscr{F} \subset C([0,1])$ wszystkich funkcji, spełniających warunek Lipschitza ze stałą 2011, jest równociągła: dla każdego $\varepsilon > 0$ warunek podany w definicji spełnia liczba $\delta = \varepsilon/2011$. Jeśli bowiem $|x - y| \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta = \varepsilon/2011$ i $f$ jest jakąkolwiek funkcją, spełniającą na $[0, 1]$ warunek Lipschitza ze stałą 2011, to

$$|f(x) - f(y)| \leq 2011|x - y| < 2011\delta = \varepsilon\,.$$

[5] Mówi się też zamiennie: *jednakowo ciągła*.

**Przykład 7.44.** Rodzina funkcji $f_n(x) = \sin nx$, gdzie $x \in [0, 2\pi]$ i $n = 1, 2, \ldots$, *nie jest* równociągła na $[0, 2\pi]$. Istotnie, niech $\varepsilon = 1/2$. Jeśli $\delta > 0$, a $n$ wybierzemy tak, żeby $\pi/2n < \delta$, to $|f_n(0) - f_n(\pi/2n)| = |\sin 0 - \sin \frac{\pi}{2}| = 1 > \varepsilon$

**Definicja 7.45.** Powiemy, że rodzina $\mathscr{F} \subset C(K)$ jest *wspólnie ograniczona* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $M > 0$ taka, że $\|f\|_{\infty,K} \le M$ dla każdej funkcji $f \in \mathscr{F}$.

**Przykład 7.46.** Rodzina wszystkich wielomianów na $[0, 1]$ nie jest wspólnie ograniczona, gdyż zawiera dowolnie duże funkcje stałe. Rodzina $f_n(x) = \sin nx$, gdzie $x \in [0, 2\pi]$ i $n = 1, 2, \ldots$, jest wspólnie ograniczona przez liczbę $M = 1$.

**Definicja 7.47.** Powiemy, że rodzina $\mathscr{F} \subset C(K)$ jest *domknięta* wtedy i tylko wtedy, gdy granica każdego jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji z rodziny $\mathscr{F}$ też należy do $\mathscr{F}$.

**Przykład 7.48.** Rodzina $\mathscr{W}$ wszystkich wielomianów na $[0, 1]$ *nie jest* domknięta. Istnieje bowiem ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie na $[0, 1]$ do $f(x) = \exp(x)$, tzn. do funkcji, nie należącej do $\mathscr{W}$.

**Twierdzenie 7.49** (Arzela, Ascoli). *Niech $K \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem zwartym i niech $\mathscr{F} \subset C(K)$. Następujące warunki są wówczas równoważne:*

*(i) $\mathscr{F}$ jest zwarta;*

*(ii) $\mathscr{F}$ jest domknięta, wspólnie ograniczona i równociągła.*

Dowód. Najpierw wykażemy nieco łatwiejszą implikację (i) $\Rightarrow$ (ii). Niech $\mathscr{F} \subset C(K)$ będzie rodziną zwartą. Domkniętość rodziny $\mathscr{F}$ jest oczywista: jeśli $(f_n) \subset \mathscr{F}$ jest jednostajnie zbieżnym ciągiem funkcji, to jego granica $f$ z pewnością należy do $\mathscr{F}$, gdyż $f$ jest granicą każdego podciągu ciągu $(f_n)$.

Udowodnimy teraz, że $\mathscr{F}$ jest wspólnie ograniczona. Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Wtedy dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $f_m \in \mathscr{F}$ taka, że $\|f_m\|_\infty > m$, tzn., z definicji normy jednostajnej, $|f_m(x_m)| > m$ dla pewnego $x_m \in K$. Z ciągu $(f_m)$ można, dzięki zwartości rodziny $\mathscr{F}$, wybrać podciąg $f_{m_j} \rightrightarrows f$ na $K$. Funkcja $f$ jest ciągła, a więc jest ograniczona na $K$; niech $M = \sup |f| + 1$. Jeśli $m_j > M$ jest dostatecznie duże, to $|f - f_{m_j}| < 1$ na $K$ z definicji jednostajnej zbieżności. Zatem, z nierówności trójkąta,

$$|f(x_{m_j})| \ge |f_{m_j}(x_{m_j})| - |f_{m_j}(x_{m_j}) - f(x_{m_j})| > m_j - 1 > M - 1 = \sup |f|,$$

a to jest oczywista sprzeczność. Rodzina $\mathscr{F}$ musi więc być wspólnie ograniczona.

Wreszcie, sprawdzimy, że $\mathscr{F}$ jest równociągła. Jeszcze raz będziemy rozumować przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że rodzina $\mathscr{F}$ nie jest równociągła. Istnieje wtedy liczba $\varepsilon_0 > 0$ taka, że dla każdej liczby $\delta_n = \frac{1}{n}$ istnieje funkcja $f_n \in \mathscr{F}$ i punkty $x_n, y_n \in K$ takie, że $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, ale $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \ge \varepsilon_0$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $x_n - y_n \to 0$.

Ponieważ rodzina $\mathscr{F}$ jest zwarta, więc – przechodząc w razie potrzeby do podciągu zbieżnego – ,ożemy bez zmniejszenia ogólności przyjąć, że ciąg $(f_n) \subset \mathscr{F}$ jest jednostajnie zbieżny. Funkcja $f = \lim f_n$ jest ciągła na $K$, a więc na mocy twierdzenia Cantora jest jednostajnie ciągła. Wybierzmy teraz $n_0$ tak, żeby $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon_0/3$ dla wszystkich $n > n_0$. Wtedy, z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &\ge |f_n(x_n) - f_n(y_n)| - |f_n(x_n) - f(x_n)| - |f_n(y_n) - f(y_n)| \\ &\ge \varepsilon_0 - 2\|f_n - f\|_\infty > \frac{\varepsilon_0}{3}\,. \end{aligned}$$

Zatem $x_n - y_n \to 0$, ale $f_n(x_n) - f(y_n) \not\to 0$. To przeczy jednostajnej ciągłości $f$ na $K$. Dowód implikacji (i) ⇒ (ii) jest zakończony.

Przejdziemy teraz do dowodu ciekawszej i ważniejszej implikacji (ii) ⇒ (i). Udowodnimy najpierw następujący fakt:

*Jeśli rodzina $\mathscr{F} \subset C(K)$ jest wspólnie ograniczona i równociągła, to z każdego ciągu $(f_n) \subset \mathscr{F}$ można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny.*

Z Lematu 7.40 wynika, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ w $K$ istnieje skończona $\frac{1}{m}$-sieć. Suma $P$ tych wszystkich sieci jest zbiorem przeliczalnym. Ponumerujmy punkty poszczególnych sieci tak, aby $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$.

Ustalmy ciąg $(f_n) \subset \mathscr{F}$. Wykażemy, że z $(f_n)$ można wybrać taki podciąg $g_k = f_{n_k}$, że ciąg liczbowy $\big(g_k(x_m)\big)_{k=1,2,\ldots}$ jest zbieżny dla każdego ustalonego $m \in \mathbb{N}$. (Wykorzystamy w tym celu metodę przekątniową). Następnie udowodnimy, że wybrany podciąg funkcji jest nie tylko zbieżny w każdym z punktów $x_m$, ale także jednostajnie zbieżny na $K$.

Rodzina $\mathscr{F}$ jest wspólnie ograniczona, więc ciąg liczb $f_n(x_1)$ jest ograniczony. Posługując się twierdzeniem Bolzano–Weierstrassa, można zeń wybrać podciąg zbieżny. Oznaczmy go $f_{1,n}(x_1)$. Aby wybrać następny podciąg, zauważmy, że ciąg $f_{1,n}(x_2)$ jest ograniczony, a więc zawiera podciąg zbieżny $f_{2,n}(x_2)$. Odnotujmy, że ciąg $f_{2,n}(x_1)$ też jest zbieżny, gdyż jest podciągiem zbieżnego ciągu $f_{1,n}(x_1)$. Załóżmy teraz, że dla pewnej liczby $k$ wybraliśmy już podciągi $f_{i,n}$, gdzie $i = 1, \ldots, k$, o następujących własnościach:

- Gdy $j > i$, to $(f_{j,n})$ jest podciągiem $(f_{i,n})$;
- Ciągi liczbowe $\big(f_{k,n}(x_i)\big)_{n=1,2,\ldots}$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, k$, są zbieżne.

Rozpatrzmy teraz ciąg $\big(f_{k,n}(x_{k+1})\big)_{n=1,2,\ldots}$. Jest on ograniczony, więc ma podciąg zbieżny $\big(f_{k+1,n}(x_{k+1})\big)_{n=1,2,\ldots}$. Podciąg $f_{k+1,n}$ jest oczywiście podciągiem każdego z ciągów $f_{i,n}$ dla $i \le k$, więc wszystkie ciągi liczbowe $\big(f_{k+1,n}(x_i)\big)_{n=1,2,\ldots}$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, k+1$, są zbieżne. Kontynuując tę procedurę, otrzymamy nieskończenie wiele podciągów $f_{k,n}$ wyjściowego ciągu $(f_n)$; $k$-ty z tych podciągów, $f_{k,n}$, jest zbieżny w punktach $x_1, \ldots, x_k$. Wygodnie jest zapisać te podciągi w nieskończonej tabeli

| $k$ | 1 | 2 | 3 | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|
| | $f_{1,1}$ | $f_{2,1}$ | $f_{3,1}$ | $\ldots$ |
| | $f_{1,2}$ | $f_{2,2}$ | $f_{3,2}$ | $\ldots$ |
| | $f_{1,3}$ | $f_{2,3}$ | $f_{3,3}$ | $\ldots$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Ciąg w $k$-tej kolumnie jest podciągiem każdej z wcześniejszych kolumn i jest zbieżny w punktach $x_1, \ldots, x_k$. Połóżmy teraz $g_n = f_{n,n}$. (Jest to ciąg funkcji, wypisanych na głównej przekątnej powyższej tabeli). Zauważmy, że dla każdego ustalonego $m$ ciąg $g_n(x_m)$ jest, począwszy od $m$-tego miejsca, podciągiem $f_{m,n}(x_m)$. Dlatego granica $\lim_n g_n(x_m)$ istnieje dla każdego $m \in \mathbb{N}$.

Wykażemy teraz, że ciąg $g_n$ jest jednostajnie zbieżny na $K$. W tym celu udowodnimy, że $(g_n)$ spełnia na $K$ jednostajny warunek Cauchy'ego. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy do $\varepsilon/3 > 0$

liczbę $\delta > 0$, korzystając z definicji równociągłości. Ustalmy teraz $N$ tak duże, aby wśród punktów $x_1, \ldots, x_N$ zbioru $P$ znalazła się pewna $\delta$-sieć w zbiorze $K$. Jest to możliwe, gdyż zbiór przeliczalny $P$ był sumą skończonych $\frac{1}{n}$-sieci dla $K$.

Ponieważ ciągi $g_n(x_j)$ są zbieżne dla każdego $j = 1, \ldots, N$, więc – na mocy warunku Cauchy'ego dla ciągów liczbowych – istnieje $n_0$ takie, że

$$|g_n(x_j) - g_m(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{dla wszystkich } m, n > n_0 \text{ i wszystkich } j = 1, \ldots, N. \tag{7.14}$$

Niech $x \in K$. Istnieje $j \in \{1, \ldots, N\}$ takie, że $|x - x_j| < \delta$. Zatem, dla $n, m > n_0$,

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - g_m(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dwa skrajne składniki oszacowaliśmy, korzystając z równociągłości i doboru $\delta$ do $\varepsilon/3$, środkowy zaś – korzystając z (7.14). Otrzymujemy ostatecznie $|g_n - g_m| < \varepsilon$ na $K$ dla wszystkich $m, n > n_0$, więc ciąg $g_n$, tzn. podciąg $f_n$ wybrany metodą przekątniową, jest zbieżny jednostajnie na $K$.

Z domkniętości rodziny $\mathscr{F}$ wynika, że granica ciągu $g_n$ też należy do $\mathscr{F}$. $\square$

Bardzo często jest w analizie używany natychmiastowy wniosek z powyższego dowodu.

**Wniosek 7.50.** *Załóżmy, że $K$ jest zbiorem zwartym w $\mathbb{R}$, a rodzina funkcji $\mathscr{F} \subset C(K)$ jest wspólnie ograniczona i równociągła. Wówczas każdy ciąg $(f_n) \subset \mathscr{F}$ zawiera podciąg jednostajnie zbieżny.*