Rozdział 1

Ciągłość i topologia

Nadanie precyzyjnego sensu intiucyjnemu pojęciu ciągłości jest jednym z głównych tematów dziedziny matematyki, zwanej topologią. Definicja funkcji ciągłej znana z podstawowego wykładu Analizy Matematycznej dotyczy jednynie liczb rzeczywistych i wykorzystuje dwie struktury, w które wyposażone są liczby rzeczywiste: dodawanie i porządek. Definicja topologii w zbiorze motywowana jest pytaniem, jaka możliwie najsłabsza struktura jest potrzebna, aby mówić o ciągłości w taki sposób, by w znanych przypadkach pokrywało się ono z faktami z analizy matematycznej oraz z intuicją geometryczną związaną z potocznym rozumieniem tego pojęcia.

1.1 Ciągłość funkcji wg. Cauchy

Z Analizy Matematycznej znana jest następująca definicja ciągłości funkcji:

Definicja 1.1.1 (Cauchy[1])**.** Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie będzie funkcją rzeczywistą. Mówimy, że f jest ciągła jeśli dla każdego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ i dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że zachodzi implikacja:

$$|x_0 - x| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x_0) - f(x)| < \epsilon$$

Następne stwierdzenie mówi, że aby mówić o ciągłości wystarczy relacja porządku liczb rzeczywistych, a dokładniej warunek Cauchy można sformułować odwołując się jedynie do odcinków otwartych:

Stwierdzenie 1.1.1. *Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciagła wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego odcinka otwartego $(c,d) \subset \mathbb{R}$ i dowolnego punktu $x \in f^{-1}((c,d))$ istnieje odcinek owarty $(a,b) \ni x$ taki, że $(a,b) \subset f^{-1}((c,d))$, czyli przeciwobraz $f^{-1}((c,d))$ jest sumą mnogościową odcinków otwartych.* □

Ponieważ przeciwobraz sumy zbiorów jest sumą przeciwobrazów ostatnie stwierdzenie można sformułować tak: odwzorowanie jest ciągłe jeśli przeciwobrazy sum mnogościowych odcinków otwartych są sumami mnogościowymi odcinków otwartych.

[1] Augustin Louis Cauchy (Paris 1789 - Sceaux (near Paris) 1857) pioneered the study of analysis, both real and complex, and the theory of permutation groups. He also researched in convergence and divergence of infinite series, differential equations, determinants, probability and mathematical physics. [Mac Tutor]

1.2 Topologie i przestrzenie topologiczne

Definicja topologii w dowolnym zbiorze jest motywowana własnościami podzbiorów prostej rzeczywistej będących sumami mnogościowymi odcinków otwartych, czyli takich podzbiorów $U \subset \mathbb{R}$, że dla każdego punktu $x \in U$ istnieją liczby $s < x < t$ takie, że $(s,t) \subset U$.

Definicja 1.2.1. Niech X będzie zbiorem. *Topologią* w zbiorze X nazywamy rodzinę podzbiorów $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ taką, że:

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(T2) Dla dowolnej rodziny zbiorów $\{U_i\}_{i\in I}$ takich, że $U_i \in \mathcal{T}$ suma mnogościowa $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$

(T3) Dla dowolnej **skończonej** rodziny zbiorów $\{U_i\}_{i\in I}$ takich, że $U_i \in \mathcal{T}$ ich część wspólna $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$

Przestrzenią topologiczną nazywamy parę $(X, \mathcal{T})$, gdzie X jest zbiorem, a $\mathcal{T}$ ustaloną topologią. Zbiory należące do $\mathcal{T}$ nazywa się *otwartymi* w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$.

Zauważmy kilka własności topologii jako podzbiorów zbioru potęgowego $\mathcal{P}(X)$:

- Zbiór topologii w X jest częściowo uporządkowany przez inkluzję rodzin.
- W dowolnym zbiorze X definiuje się dwie topologie: minimalną (antydyskretną) $\mathcal{T}_{\alpha\delta} = \{\emptyset, X\}$ oraz maksymalną (dyskretną) $\mathcal{T}_\delta = \mathcal{P}(X)$. Dla dowolnego zbioru X przestrzeń $(X, \mathcal{T}_{\alpha\delta})$ nazywamy *przestrzenią antydyskretną*, a przestrzeń $(X, \mathcal{T}_\delta)$ nazywamy *przestrzenią dyskretną*.
- Dla dowolnej topologii $\mathcal{T}$ w X : $\quad \mathcal{T}_{\alpha\delta} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\delta$.

Stwierdzenie 1.2.1. *Jeśli $\{\mathcal{T}_s\}_{s\in S}$ jest rodziną topologii w zbiorze X, to ich przecięcie $\bigcap \mathcal{T}_s$ też jest topologią.* □

1.3 Odwzorowania ciągłe i homemorfizmy

Definicja 1.3.1. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ oraz $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Odwzorowanie zbiorów $f : X \to Y$ nazywa się *ciągłym* jeśli dla każdego zbioru $V \in \mathcal{T}_Y$ jego przeciwobraz $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Powyższa definicja jest równoważna następującemu warunkowi, nawiązującemu do definicji ciągłości wg. Cauchy: $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x\in X}\forall_{V\ni f(x)}\exists_{U\ni x}\, f(U) \subset V.$$

Zauważmy, że każde przekształcenie określone na przestrzeni dyskretnej o wartościach w dowolnej przestrzeni topologicznej oraz każde przekształcenie określone na dowolnej przestrzeni topologicznej o wartościach w przestrzeni antydyskretnej jest ciągłe.

Stwierdzenie 1.3.1. *Jeśli odwzorowania* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *są ciągłe, to ich złożenie* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{g \circ f} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *też jest ciągłe. Dla dowolnej przestrzeni topologicznej* $(X, \mathcal{T}_X)$ *odwzorowanie identycznościowe* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{id_X} (X, \mathcal{T}_X)$ *jest ciągłe.*

Definicja 1.3.2. Przekształcenie ciągłe $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywa się *homeomorfizmem* jeśli istnieje przekształcenie ciągłe $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ takie, że $f \circ g = Id_Y$ oraz $g \circ f = Id_X$.

Odnotujmy kilka własności homeomorifzmów:

- Homeomorfizm $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest bijekcją zbiorów $X \xrightarrow{f} Y$, ale nie każda ciągła bijekcja jest homeomorfizmem; np. jeśli zbiór X ma co najmniej dwa punkty, to identyczność $Id : (X, \mathcal{T}_\delta) \to (X, \mathcal{T}_{a\delta})$ jest ciągła, ale nie jest homeomorfizmem!

- Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to obraz dowolnego zbioru otwartego jest zbiorem otwartym, bowiem jeśli g jest ciagłym przekształceniem odwrotnym, to $f(U) = g^{-1}(U)$ a ten zbiór na mocy ciągłości g jest otwarty.

- Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą bijekcją taką, to dla dowolnego zbioru $U \in \mathcal{T}_X$ jego obraz $f(U) \in \mathcal{T}_Y$, to f jest homeomorfizmem; uzasadnienie jak wyżej.

1.4 Zbiory domknięte

Definicja 1.4.1. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Podzbiór $A \subset X$ nazywa się domknięty (w topologii $\mathcal{T}$) jeśli $X \backslash A \in \mathcal{T}$. Rodzinę podzbiorów domkniętych oznaczamy $\mathcal{F}_\mathcal{T}$

Zauważmy, że odwzorowanie $-^c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ przypisujące każdemu zbiorowi jego dopełnienie ustala bijekcję między rodziną zbiorów otwartych $\mathcal{T}$ i rodziną zbiorów domkniętych $\mathcal{F}_\mathcal{T}$.

Ze wzorów De Morgana[2] wynikają następujące własności rodziny zbiorów domkniętych $\mathcal{F}_\mathcal{T}$, dwoiste do własności rodziny zbiorów otwartych $\mathcal{T}$, wymienionych w Definicji 1.2.1:

1. X, $\emptyset \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$,
2. Dla dowolnej **skończonej** rodziny $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}_\mathcal{T}$ suma mnogościowa $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$,
3. Dla dowolnej rodziny $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}_\mathcal{T}$ ich część wspólna $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$.

Odnotujmy fakty dotyczące ciągłości odwzorowań w terminach zbiorów domkniętych, analogiczne do sformułowanych poprzednio dla zbiorów otwartych.

1. Przeształcenie $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobraz $f^{-1}(B)$ dowolnego podzbioru domknietego $B \subset Y$ jest domknięty w X.

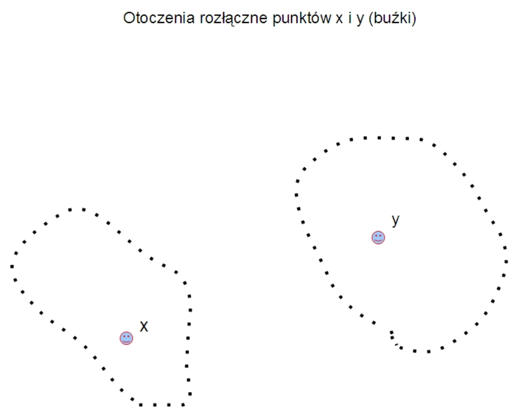
[2] Augustus De Morgan (Madurai, Tamil Nadu, India 1806 - 1871 London, UK) became the first professor of mathematics at University College London and made important contributions to English mathematics. [Mac Tutor]

2. Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to obraz dowolnego zbioru domkniętego jest zbiorem domkniętym.

3. Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągła bijekcją taką, że dla dowolnego zbioru domkniętego $A \subset X$ jego obraz $f(A) \subset Y$ jest zbiorem domkniętym to f jest homeomorfizmem.

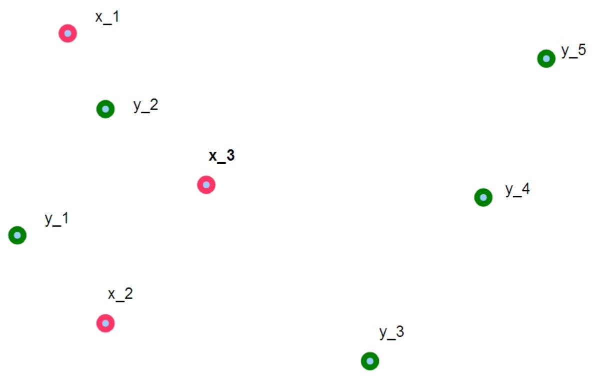
1.5 Własność Hausdorffa

Definicja 1.5.1 (Własność Hausdorffa[3])**.** Przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{T})$ nazywamy przestrzenią Hausdorffa jeśli dla dowolnych różnych punktów $x_0, x_1 \in X$ istnieją zbiory $U_0, U_1 \in \mathcal{T}$ takie, że $x_0 \in U_0,\ x_1 \in U_1$ oraz $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.



Przykład 1.5.1. Na płaszczyźnie z topologią Zariskiego dowolne dwa niepuste zbiory otwarte mają niepuste przecięcie (na rysunku dwa zbiory - jeden po usunięciu punktów x_i, drugi y_j):

[3] Felix Hausdorff (Breslau (Wrocław) 1868 - Bonn 1942) worked in topology creating a theory of topological and metric spaces. He also worked in set theory and introduced the concept of a partially ordered set. [Mac Tutor]



Stwierdzenie 1.5.1. *Jeśli* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{h} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest homeomorfizmem i* $(X, \mathcal{T}_X)$ *jest przestrzenią Haudorffa, to* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *też jest przestrzenią Hausdorffa.* □

1.6 Topologie pochodzące od metryki

Definicja 1.6.1 (Metryka)**.** Metryką w zbiorze X nazywa się funkcję $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:

1. $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$, dla $x, y \in$X,
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, dla $x, y, z \in X$. (nier. trójkąta)

Liczba $d(x, y)$ nazywa się odległością punktów $x, y \in X$ w metryce d. Parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Uwaga 1.6.1. Jeśli $A \subset X$ jest dowolnym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d_X), to obcięcie odwzorowania d do zbioru $A \times A$ zadaje metrykę na A - odpowiednią przestrzeń metryczną oznaczamy $(A, d_X|A)$.

Definicja 1.6.2. Kulą (otwartą) w przestrzeni metrycznej (X, d) o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B(x_0, r) := \{x \in X \,|\, d(x_0, x) < r\},$$

a kulą domkniętą zbiór $D(x_0, r) := \{x \in X \,|\, d(x_0, x) \leqslant r\}$

Stwierdzenie 1.6.1. *Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną. Rodzina podzbiorów zbioru* X*:*

$$\mathcal{T}(d) := \{U \subset X \,|\, \forall_{x \in U} \exists_{r>0}\, B(x, r) \subset U\}$$

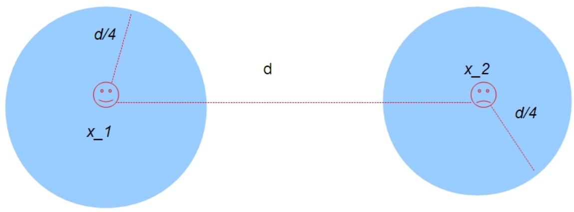
jest topologią w X*, spełniajacą warunek Hausdorffa.*

Dowód. Spełnienie przez zdefinowaną wyżej rodzinę warunków (1), (2) w definicji topologii 1.2.1 jest oczywiste. Jeśli $U_1, .., U_k \in \mathcal{T}(d)$ oraz $x \in U_1 \cap ... \cap U_k$ i dla każdego $i = 1, .., k$ istnieje liczba $r_i > 0$ taka, że $B(x, r_i) \subset U_i$, to dla $r := \min\{r_1, .., r_k\}$ zachodzi inkluzja $B(x, r) \subset U_1 \cap ... \cap U_k$.

Zauważmy, że dowolna kula otwarta $B(x, r) \in \mathcal{T}(d)$, bowiem dla dowolnego punktu $y \in B(x, r)$ z nierówności trójkata wynika, że dla $s := r - d(x, y)$ zachodzi inkluzja $B(y, s) \subset B(x, r)$.

Podobnie warunek Hausdorffa wynika natychmiast z warunku (1) i z nierówności trójkąta. Jeśli $x_1, x_2 \in X$ są różnymi punktami i $d := d(x_1, x_2) > 0$ to kule $B(x_1, \frac{d}{2})$ i $B(x_2, \frac{d}{2})$ są rozłącznymi otoczeniami otwartymi tych punktów. $\square$

Uwaga 1.6.1. Podzbiór $U \in \mathcal{T}(d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą kul otwartych.



Otoczenia rozłączne dwóch punktów w przestrzeni metrycznej.

Nie każda topologia pochodzi od metryki, choćby dlatego, ze nie każda ma własność Hausdorffa. Z drugiej strony dwie różne metryki mogą wyznaczać tę samą topologię. Np. dla dowolnej metryki d jej "obcięcie" z góry przez dowolną liczbę > 0 np. 1, czyli $d'(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$ wyznacza tę samą topologię co d. Stąd następna definicja:

Definicja 1.6.3 (Metryki równoważne i topologia metryzowalna)**.** Metryki d_1, d_2 w zbiorze X nazywają się *równoważne* jeśli $\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2)$. Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią topologiczną taką, że istnieje metryka d na X taka, że $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ to mówimy, że przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest *metryzowalna.*

Stwierdzenie 1.6.2. *Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest metryzowalna, a przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest z nią homeomorficzna, to jest także metryzowalna.*

Dowód. Jeśli $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ jest homeomorfizmem, a $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ metryką taką, że $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}(d_X)$ to definiujemy metrykę "przenosząc" ją przez odwzorowanie g : $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ wzorem $d_Y(y_1, y_2) := d_X(g(y_1), g(y_2))$. $\square$

Stwierdzenie 1.6.3. *Odwzorowanie $(X, \mathcal{T}(d_X)) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}(d_Y))$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x_0 \in X$ i dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$.* $\square$

Definicja 1.6.4. Ciąg punktów $\{x_n\}$ przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbieżny do punktu $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ istnieje liczba $n(\epsilon)$ taka, że dla wszystkich $n > n(\epsilon)$, $x_n \in B(x_0, \epsilon)$ tzn. $d(x_n, x_0) < \epsilon$.

Stwierdzenie 1.6.4. $(X, \mathcal{T}(d_X)) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}(d_Y))$ *jest ciągłe* $\iff$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje granice ciągów, tzn.*

$$x_0 = \lim\{x_n\} \implies f(x_0) = \lim\{f(x_n)\}.$$

Dowód. Powtórz dowód równoważności definicji ciagłości wg Heinego i Cauchy znany z Analizy Matematycznej I. $\square$